REPUBLIK INDONESIA
KEMENTERIAN HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA

SURAT PENCATATAN CIPTAAN

Dalam rangka pelindungan ciptaan di bidang ilmu pengetahuan, seni dan sastra berdasarkan Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta, dengan ini menerangkan:

Nomor dan tanggal permohonan	:	EC00201850852, 22 Oktober 2018
Pencipta		
Nama	:	**Hastri Rosiyanti**
Alamat	:	Jl. Peta Barat, Gg. Gondang 3. RT. 006 RW. 013. No. 24, Kelurahan Kalideres Kecamatan Kalideres , Jakarta Barat, Dki Jakarta, 11840
Kewarganegaraan	:	Indonesia
Pemegang Hak Cipta		
Nama	:	**Hastri Rosiyanti**
Alamat	:	Jl. Peta Barat, Gg. Gondang 3. RT. 006 RW. 013. No. 24, Kelurahan Kalideres Kecamatan Kalideres, Jakarta Barat, Dki Jakarta, 11840
Kewarganegaraan	:	Indonesia
Jenis Ciptaan	:	**Buku**
Judul Ciptaan	:	**Matematika Dasar Untuk Tingkat Mahasiswa Pertama**
Tanggal dan tempat diumumkan untuk pertama kali di wilayah Indonesia atau di luar wilayah Indonesia	:	21 September 2017, di Jakarta
Jangka waktu pelindungan	:	Berlaku selama hidup Pencipta dan terus berlangsung selama 70 (tujuh puluh) tahun setelah Pencipta meninggal dunia, terhitung mulai tanggal 1 Januari tahun berikutnya.
Nomor pencatatan	:	000121608

adalah benar berdasarkan keterangan yang diberikan oleh Pemohon.
Surat Pencatatan Hak Cipta atau produk Hak terkait ini sesuai dengan Pasal 72 Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta.

a.n. MENTERI HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA
DIREKTUR JENDERAL KEKAYAAN INTELEKTUAL

Dr. Freddy Harris, S.H., LL.M., ACCS.
NIP. 196611181994031001

Matematika Dasar

Untuk Mahasiswa Tingkat Pertama

Edisi I

Buku ini disusun berdasarkan Rencana Pembelajaran Semester (RPS) pada mata kuliah Matematika Dasar di Program Studi Pendidikan Matematika FIP UMJ yang telah dibuat sebelumnya. Buku ini diperuntukan bagi mahasiswa yang mengambil mata kuliah Matematika Dasar pada tingkat pertama.

Penulis berharap dengan adanya buku Matematik Dasar yang telah disusun, memberikan pengetahuan dan pemahaman konsep dasar mahasiswa matematika tingkat pertama mengenai materi logika, himpunan, sistem bilangan riil, fungsi, dan persamaan dan pertidaksamaan aljabar, lingkaran maupun trigonometri. Adapun materi pokok yang dibahas yaitu:

1. Logika
2. Himpunan
3. Sistem Bilangan Real
4. Fungsi
5. Persamaan dan Pertidaksamaan

Penerbit:

Jl. KH. Ahmad Dahlan, Cirendeu, Ciputat 15419, Telp. (021) 7442028 Fax (021) 7442330

Email : fip@umj.ac.id

9 786025 080920

Matematika Dasar

Hastri Rosiyanti, M.PMat

2017

Matematika Dasar

Untuk Mahasiswa Tingkat Pertama

Edisi I

Hastri Rosiyanti, M.PMat

UMJ

Enlightening, Empowering

FAKULTAS ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH JAKARTA

E-mail : fip@umj.ac.id | Website : www.fip.umj.ac.id

Matematika Dasar

Untuk Mahasiswa Tingkat Pertama

Edisi 1

Matematika Dasar

Untuk Mahasiswa Tingkat Pertama

Edisi 1

Hastri Rosiyanti, M.PMat

FAKULTAS ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH JAKARTA
E-mail : fip@umj.ac.id | Website : www.fip.umj.ac.id

Perpustakaan Nasional RI : Katalog Dalam Terbitan

MATEMATIKA DASAR

Untuk Mahasiswa Tingkat Pertama

Oleh: Hastri Rosiyanti, M.PMat
Ahli Materi dan Bahasa: Dr. Faisal, M.Si
Ahli Penyajian: Viarti Eminita, M.Si
Penata Letak dan Desainer Sampul : Hastri Rosiyanti, M.PMat

Diterbitkan Oleh:
Fakultas Ilmu Pendidikan Universitas Muhammadiyah Jakarta.
Jln. K.H. Ahmad Dahlan, Cirendeu, Ciputat
Telp: (021) 7442028, Fax: (021) 7442330
E-mail: fip_umj@yahoo.c.id, Website: http://www.fipumj.ac.id

ISBN:978-602-50809-2-0

Edisi Pertama
Cetakan Pertama, 2017

Kusembahkan

Untuk Suamiku Tercinta,

Dr. Faisal, M.Si

dan Putraku Tersayang,

Hanfaraby Alrafaeyza Faiz

Ucapan Terima Kasih

Terima Kasih Kepada Allah subhanahu wa ta 'ala yang telah memberikan kesempatan waktu dan tambahan kekuatan untuk penulis dalam menyelesaikan buku ini.

Terima Kasih pula saya sampaikan kepada

1. Direktorat Pembelajaran dan Kemahasiswaan RISTEKDIKTI yang telah memberikan dana kepada UMJ dalam Hibah Revitalisasi Lembaga Pendidikan Tenaga Kependidikan tahun 2017.
2. Prof. Dr. Syaiful Bakhri, SH, MH., selaku rektor UMJ yang telah memberikan motivasi dalam menyusun buku ini.
3. Dr. Herwina Bahar, MA.,selaku Dekan FIP UMJ yang telah memberikan motivasi dalam menyusun buku imi.
4. Wikipedia yang secara tidak langsung memberi kemudahan kepada penulis dalam mencari info mengenai penemu ilmu Matematika.

Kata Pengantar

Alhamdulillah Rabbil 'Alamin, puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah Subhahu Wa Ta'ala yang telah memberikan rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan buku Matematika Dasar.

Buku ini penulis susun berdasarkan Rencana Pembelajaran Semester (RPS) Pada Mata Kuliah Matematika Dasar di Kurikulum Berbasis Kerangka Kualifikasi Nasional Indonesia (KKNI). Pemberian contoh di buku ini disajikan pada setiap pembahasan, sehingga pembaca lebih mudah untuk memahami setiap pembahasan yang dijelaskan.

Adapun 5 bab yang dibahas pada buku ini, diantaranya adalah (1) logika, (2) himpunan, (3) sistem bilangan riil, (4) fungsi, dan (5) persamaan dan pertidaksamaan. Setiap akhir bab diberikan 10 latihan soal beserta penyelesaiannya. Tes Formatif disajikan di setiap akhir bab guna memberikan evaluasi bagi pembaca agar dapat mengukur tingkat penguasaan pada setiap materi matematika.

Penulis mengharapkan saran dan kritik guna membangun penyempurnaan buku ini. Terima Kasih atas kepercayaan pembaca dalam menggunakan buku ini sebagai referensi pembelajaran mata kuliah Matematika Dasar ataupun pembelajaran lainnya.

Jakarta, September 2017

Hastri Rosiyanti

Daftar Isi

BAB 4 Fungsi

BAB 5 Persamaan dan Pertidaksamaan

BAB 1 Logika

Dalam bab ini, akan membahas mengenai logika yang mencakup materi – materi bahasan sebagai berikut:

1. Konsep dasar Logika.
2. Proposisi.
3. Proposisi majemuk.
4. Validitas kalimat logika proposisi.
5. Logika Predikat.

Penulis berharap bagi pembaca yang telah mempelajari bab ini, secara umum diharapkan memiliki dasar – dasar dalam penalaran logis. Adapun capaian pembelajaran mata kuliah (CPMK) pada bab ini sebagai berikut.

1. Memahami konsep dasar Logika Matematika, termasuk diantaranya proposisi, proposisi majemuk, serta menentukan nilai kebenaran suatu proposisi majemuk atau Kalimat Logika Proposisi (KLP).
2. Membuat dan mengidentifikasi suatu tabel kebenaran dari suatu KLP.
3. Menentukan validitas suatu proposisi majemuk dengan tabel kebenaran, pohon semantik, dan strategi pembalikan.
4. Melakukan penalaran dari beberapa proposisi menjadi argumen serta membuktikan validitas argumen tersebut dengan aturan penyimpulan, pertukaran, serta metode deduksi.
5. Mengenal simbol logika predikat, kuantifikasi universal dan eksistensi, serta ekspresi logika predikat.

Berdasarkan CPMK yang telah dirancang, selanjutnya berikut merupakan sub – CPMK yang telah dirancang.

1. Membedakan antara proposisi, bukan proposisi, dan kalimat terbuka.
2. Mengkonversi kalimat ke dalam simbol matematika atau sebaliknya.
3. Menentukan nilai kebenaran suatu suatu proposisi majemuk/kalimat logika proposisi.
4. Membuat tabel kebenaran.
5. Mengidentifikasi tabel – tabel kebenaran yang ekuivalen, tautologi, kontradiksi, maupun kontingen.
6. Menentukan validitas KLP dengan tabel kebenaran.
7. Menentukan validitas KLP dengan pohon semantik.
8. Menentukan validitas KLP dengan strategi pembalikan.
9. Membuktikan validitas argumen dengan metode deduksi.
10. Mengkonversi kalimat yang berkuantor dalam simbol-simbol logika predikat dan sebaliknya.

Adapun hubungan materi logika dengan surat di Al Qur'an, yaitu pada surat Al Hujaraat ayat 6 yang berbunyi,

يَـٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓا۟ إِن جَآءَكُمْ فَاسِقٌۢ بِنَبَإٍ فَتَبَيَّنُوٓا۟ أَن تُصِيبُوا۟ قَوْمًۢا بِجَهَـٰلَةٍ

فَتُصْبِحُوا۟ عَلَىٰ مَا فَعَلْتُمْ نَـٰدِمِينَ ﴿٦﴾

Artinya: Hai orang-orang yang beriman, jika datang kepadamu orang fasik membawa suatu berita, Maka periksalah dengan teliti agar kamu tidak menimpakan suatu musibah kepada suatu kaum tanpa mengetahui keadaannya yang menyebabkan kamu menyesal atas perbuatanmu itu.(QS. Al – Hujaraat, 49:6).

Berpikir adalah kegiatan manusia yang sangat penting dengan melibatkan otak. Otak manusia adalah pusat logika manusia. Logika membantu manusia untuk dapat berpikir secara nalar, kritis, tepat, sistematis, dan konsisten. Berpikir secara logis, manusia akan mengetahui nilai kebenaran, yaitu benar dan salah. Selain itu, dengan berpikir secara logis, manusia akan mencari solusi dari suatu kesalahan dan mudah mengetahui letak suatu kesalahan. Berdasarkan manfaat logika yang kita ketahui bahwa proses berpikir itu penting dalam kehidupan sehari – hari. Oleh karena itu, kita perlu mempelajari ilmu logika dalam kehidupan kita.

A. Konsep Dasar Logika

Logika merupakan salah satu bidang ilmu yang mengkaji prinsip – prinsip penalaran yang benar dan penarikan kesimpulan yang sah. Ada dua tipe penalaran dalam matematika, yaitu penalaran deduktif dan penalaran induktif.

Math Info

***Aristoteles** (384 SM – 322 SM) merupakan filsuf Yunani lahir di Stagira, kota wilayah Chalcidice. Ia menemukan diagram Venn. Sumbangan penting aristoteles dalam ilmu logika adalah silogisme.*

Penalaran deduktif, dapat juga disebut logika deduktif, yaitu penarikan kesimpulan yang diperoleh dari kasus – kasus yang sudah umum untuk menjadi sebuah kesimpulan yang ruang lingkupnya bersifat khusus. Sebuah argument deduktif dinyatakan valid jika dan hanya jika kesimpulannya merupakan konsekuensi logis dari premis – premisnya. Penalaran ini biasanya digunakan dalam pembuktian suatu teorema atau dalil. Pembuktian suatu teorema pada dasarnya adalah penurunan teorema tersebut dari definisi, aksioma atau teorema yang telah dibuktikan menurut suatu penalaran yang logis. Berikut contoh penalaran deduktif.

<u>Contoh 1.1</u>

Premis 1 : Semua manusia pasti butuh makan.

Premis 2 : Aristoteles adalah manusia.

Kesimpulan : Aristoteles pasti butuh makan.

Contoh 1.2 Menentukan hasil penjumlahan $1+2+3+\cdots+n$. Berdasarkan rumus deret aritmatika dengan suku pertama $a=1$, beda $b=1$, dan suku ke- n $U_n = n$, sehingga dengan menerapkan rumus $S_n = \frac{1}{2}n(a+U_n)$ diperoleh $1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(1+n)$.

Penalaran induktif, dapat juga disebut logika induktif, yaitu menyusun data sedemikian hingga dapat ditarik suatu kesimpulan yang berlaku umum. Kesimpulan yang diperoleh dengan cara ini baru disebut teorema dugaan (*konjektur*). Teorema dugaan ini masih perlu dibuktikan secara deduktif agar menjadi suatu teorema. Berikut contoh penalaran induktif.

Contoh 1.3 Membuat 3 buah segitiga dan mengukur besar sudut tiap – tiap segitiga dengan busur derajat. Hasil pengukuran besar sudut yang diperoleh dari 3 buah segitiga adalah jumlah besar ketiga sudut dalam masing – masing segitiga yang dibuat adalah 180^0. Dari 3 contoh segitiga yang telah dibuat dapat ditarik kesimpulan bahwa jumlah besar ketiga sudut dalam segitiga adalah 180^0.

B. Proposisi

Proposisi adalah pernyataan yang bernilai benar atau bernilai salah, tetapi tidak sekaligus bernilai kedua – duanya. Proposisi juga dapat dikatakan kalimat tertutup. Berikut contoh pernyataan yang bernilai benar.

Contoh 1.4

1. Sebuah segitiga memiliki 3 sisi.
2. 14 lebih dari 6.
3. 7 merupakan bilangan bulat ganjil.

Setelah diberikan contoh proposisi yang bernilai benar, berikut merupakan proposisi yang bernilai salah.

Contoh 1.5

1. Sebuah segiempat mempunyai 5 sudut.
2. 6 kurang dari 2.
3. 9 merupakan bilangan prima.

Pernyataan yang tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya merupakan bukan proposisi. Berikut merupakan contoh yang merupakan bukan proposisi.

Contoh 1.6

1. Apakah kamu lapar?
2. $3x + y = 6$
3. Buka pintu itu!

Pada contoh nomor (1) merupakan kalimat pertanyaan dan nomor (3) merupakan kalimat perintah, sehingga kalimat ini tidak dapat disimpulkan benar atau salah. Perhatikan untuk nomor (2), jika nilai x dan y diketahui maka pernyataan tersebut menjadi proposisi. Pernyataan yang dapat diubah menjadi proposisi dengan mengganti variabel dengan suatu nilai, kita sebut kalimat terbuka.

Dalam penyingkatan penulisan, suatu proposisi diberi lambang dengan huruf alfabet kecil, yaitu $a, b, c,$ ... atau lainnya, sedangkan untuk nilai benar dan salah berturut – turut disingkat dengan B dan S. Berikut contoh dalam pemberian lambang pada suatu proposisi.

Contoh 1.7

1. “2 adalah suatu bilangan prima” diberi lambang a.
2. “Semua bilangan ganjil habis dibagi oleh 3” diberi lambang b.

3. “$3x = 6$, dengan $x = 2$” diberi lambang c.

Pada contoh 1.7, proposisi a bernilai B (benar), proposisi b bernilai S (salah), proposisi c bernilai B. Perhatikan pada nomor (2), b menyatakan “semua bilangan ganjil habis dibagi oleh 3” dan proposisinya bernilai S, sedangkan proposisi “ada bilangan ganjil yang tidak habis dibagi oleh 3” bernilai B. Dapat dikatakan bahwa proposisi “ada bilangan ganjil yang tidak habis dibagi oleh 3” merupakan **negasi** atau **ingkaran** dari proposisi “semua bilangan ganjil yang habis dibagi oleh 3”. Selanjutnya, negasi dari b dilambangkan “$\sim b$”. Pada contoh (1), a menyatakan “2 adalah suatu bilangan prima” dan proposisi bernilai *B*, sedangkan proposisi $\sim a$ menyatakan “2 bukan suatu bilangan prima” bernilai S.

Berdasarkan contoh 1.7 dapat disimpulkan bahwa **Negasi** suatu proposisi adalah suatu proposisi yang bernilai salah apabila proposisi semula bernilai benar, dan bernilai benar apabila proposisi semula bernilai salah. Notasi “$\sim$” dapat dibaca “tidak”, “bukan”, “tidak benar”.

Contoh 1.8

1. d : Kucing itu berwarna putih
   $\sim d$: Kucing itu tidak berwarna putih/ tidaklah benar kucing itu berwarna putih
2. e : Lira menggunakan topi
   $\sim e$:Lira tidak menggunakan topi
3. f : Ada mahasiswa masuk ke ruangan kelas
   $\sim f$: Semua mahasiswa tidak masuk ke ruangan kelas

Perhatikan pada contoh (1), proposisi “Kucing itu berwarna hitam” bukan merupakan negasi dari “Kucing itu berwarna putih”. Sebab apabila kenyataannya “Kucing itu berwarna coklat” maka dua proposisi tersebut bernilai salah.

Proposisi dan negasinya mempunyai nilai – nilai kebenaran yang selalu berbeda, artinya jika proposisinya bernilai B maka negasinya bernilai S dan sebaliknya jika proposisinya bernilai S maka negasinya bernilai B.

Dalam logika matematika, tabel kebenaran adalah tabel dalam matematika yang digunakan guna melihat kebenaran dari suatu proposisi. Misalkan tabel kebenaran untuk negasi suatu proposisi dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 1.1
Negasi Suatu Proposisi

a	$\sim a$	$\sim(\sim a)$
B	S	B
S	B	S

C. Proposisi Majemuk

Proposisi majemuk terbentuk dari dua atau lebih proposisi yang dihubungkan dengan kata penghubung/perangkat logika. Proposisi – proposisi yang dirangkai dalam proposisi majemuk disebut proposisi tunggal. Kata penghubung yang dimaksudkan adalah “dan”, “atau”, “jika … maka …” dan “… jika dan hanya jika…”. Lambang kata – kata penghubung tersebut dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 1.2
Lambang Kata Penghubung

Proposisi Majemuk	Lambang	Kata Penghubung
Konjungsi	$\wedge$	Dan, Tetapi, Meskipun
Disjungsi (Inklusif)	$\vee$	Atau, Ataupun
Disjungsi (Eksklusif)	$\oplus$	Atau
Implikasi	$\rightarrow$	Jika … maka … Akibatnya …
Biimplikasi	$\leftrightarrow$	… Jika dan hanya jika …

1. Konjungsi

Konjungsi adalah kata penghubung "dan" yang digunakan untuk menghubungkan dua proposisi. Konjungsi dapat ditulis dengan notasi ($\wedge$). Nilai kebenaran dari suatu proposisi majemuk yang menggunakan konjungsi tergantung dari nilai kebenaran dari proposisi – proposisi tunggalnya.

Nilai kebenaran dari dua proposisi yang dihubungkan dengan konjungsi ditentukan dengan aturan konjungsi dua proposisi a dan b (ditulis "$a \wedge b$" dibaca a dan b) bernilai B (benar) jika dan hanya jika dua proposisi a dan b masing – masing bernilai B, sedangkan untuk nilai – nilai kebenaran a dan b lainnya "$a \wedge b$" bernilai S (salah). Aturan tersebut dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 1.3
Nilai Kebenaran Konjungsi

a	b	$a \wedge b$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Contoh 1.9 Indah pergi kuliah dan belajar matematika dasar. Pernyataan ini merupakan proposisi majemuk karena pernyataan itu merupakan rangkaian dua proposisi, yaitu "Indah pergi kuliah" dilambangkan p dan "Indah belajar matematika dasar" dilambangkan q. Maka proposisi majemuk itu dilambangkan dengan $p \wedge q$. Pernyataan ini bernilai benar jika Indah melakukan dua hal tersebut, yaitu pergi kuliah dan belajar matematika dasar. Perhatikan kesimpulan nilai kebenaran dari proposisi "p dan q" untuk semua kemungkinan nilai kebenaran p dan q.

a. p : Indah pergi kuliah (B).
   q : Indah belajar matematika dasar (B).

Artinya Indah melakukan dua hal tersebut dan kesimpulannya benar.

b. p : Indah pergi kuliah (B).
q : Indah belajar matematika dasar (S).

Artinya Indah hanya pergi kuliah tetapi tidak belajar matematika dasar, jadi kesimpulan salah.

c. p : Indah pergi kuliah (S).
q : Indah belajar matematika dasar (B).

Sama halnya dengan nomor (2) Indah hanya belajar matematika dasar tetapi tidak pergi kuliah, jadi kesimpulan salah.

d. p : Indah pergi kuliah (S).
q : Indah belajar matematika dasar (S).

Artinya Indah tidak melakukan dua hal tersebut, jadi kesimpulan salah.

Menentukan negasi dari konjungsi dua proposisi dapat dilihat pada tabel nilai kebenaran berikut.

Tabel 1.4
Nilai Kebenaran Negasi dari Konjungsi

a	b	$\sim a$	$\sim b$	$a \wedge b$	$\sim(a \wedge b)$
B	B	S	S	B	S
B	S	S	B	S	B
S	B	B	S	S	B
S	S	B	B	S	B

2. Disjungsi (Inklusif)

Disjungsi adalah kata penghubung "atau" yang digunakan untuk menghubungkan dua proposisi. Disjungsi dapat ditulis dengan notasi ($\vee$). Nilai kebenaran dari suatu proposisi majemuk yang menggunakan disjungsi tergantung dari nilai kebenaran dari proposisi – proposisi tunggalnya. Nilai kebenaran dari dua proposisi yang dihubungkan dengan disjungsi ditentukan dengan aturan disjungsi dua proposisi a dan b (ditulis "$a \vee b$" dan dibaca "a atau b") bernilai S (salah) jika dan hanya jika dua proposisi a dan b masing – masing bernilai S, sedangkan untuk nilai – nilai kebenaran a dan b lainnya, "$a \vee b$" bernilai B (benar). Aturan tersebut dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 1.5
Nilai Kebenaran Disjungsi (Inklusif)

a	b	$a \vee b$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Contoh 1.10 Budi adalah nama untuk perempuan atau laki – laki. Pernyataan ini merupakan proposisi majemuk karena pernyataan itu merupakan rangkaian dua proposisi, yaitu "Budi adalah nama untuk perempuan" dilambangkan p dan "Budi adalah nama untuk laki – laki" dilambangkan q. Maka proposisi majemuk itu dilambangkan dengan $p \vee q$. Pernyataan ini bernilai salah jika Budi bukan nama untuk perempuan dan laki – laki. Perhatikan kesimpulan nilai kebenaran dari proposisi "p dan q" untuk semua kemungkinan nilai kebenaran p dan q.

a. p : Budi adalah nama untuk perempuan (B).
   q : Budi adalah nama untuk laki – laki (B).

Artinya Budi dapat dipakai untuk nama perempuan atau nama laki – laki , jadi kesimpulan benar.

b. p : Budi adalah nama untuk perempuan (B).
   q : Budi adalah nama untuk laki – laki (S).

Artinya Budi dapat dipakai untuk nama perempuan, jadi kesimpulan benar.

c. p : Budi adalah nama untuk perempuan (S).
   q : Budi adalah nama untuk laki – laki (B).

Artinya Budi dapat dipakai untuk nama laki – laki, jadi kesimpulan benar.

d. p : Budi adalah nama untuk perempuan (S).
   q : Budi adalah nama untuk laki – laki (S).

Artinya Budi bukan nama perempuan maupun nama laki – laki, jadi kesimpulan salah.

Menentukan negasi dari disjungsi (inklusif) dua pernyataan dapat dilihat pada tabel nilai kebenaran berikut.

Tabel 1.6
Nilai Kebenaran Negasi dari Disjungsi (Inklusif)

a	b	$\sim a$	$\sim b$	$a \vee b$	$\sim(a \vee b)$
B	B	S	S	B	S
B	S	S	B	B	S
S	B	B	S	B	S
S	S	B	B	S	B

3. Disjungsi (Eksklusif)

Disjungsi (Eksklusif) adalah kata penghubung “atau” yang digunakan untuk menghubungkan dua proposisi. Disjungsi ini dapat ditulis dengan notasi ($\oplus$). Berbeda dengan disjungsi inklusif, disjungsi eksklusif tidak diizinkan untuk memilih dua pilihan sekaligus, artinya dua pilihan ini tidak dapat dilakukan secara bersamaan atau tidak bersamaan. Disjungsi eksklusif dapat dibedakan dengan dua cara, (1) memberi penekanan pada pilihannya, sebagai contoh “kopi atau susu tapi tidak keduanya”, (2) memberikan dua pilihan yang tidak bisa dilakukan dilakukan keduanya, sebagai contoh “hidup atau mati”. Dapat kita lihat, pilihan pada cara kedua merupakan dua hal yang berlawanan.

Nilai kebenaran dari suatu proposisi majemuk yang berbentuk ini tergantung dari nilai kebenaran dari proposisi – proposisi tunggalnya. Nilai kebenaran dari dua proposisi yang dihubungkan dengan disjungsi ditentukan dengan aturan disjungsi dua proposisi a dan b (ditulis “$a \oplus b$”

dan dibaca "a atau b") bernilai S (salah) jika dan hanya jika nilai kebenaran dari a sama dengan nilai kebenaran dari b, sedangkan untuk nilai – nilai kebenaran a dan b lainnya, "$a \oplus b$" bernilai B (benar). Aturan tersebut dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 1.7
Nilai Kebenaran Disjungsi (Eksklusif)

a	b	$a \oplus b$
B	B	S
B	S	B
S	B	B
S	S	S

<u>Contoh 1.11</u> Budi masuk sekolah atau bolos sekolah. Pernyataan ini merupakan proposisi majemuk karena pernyataan itu merupakan rangkaian dua proposisi, yaitu "Budi masuk sekolah" dilambangkan p dan "Budi bolos sekolah" dilambangkan q. Maka proposisi majemuk itu dilambangkan dengan $p \oplus q$. Pernyataan ini bernilai salah jika Budi melakukan kedua hal secara bersamaan ataupun tidak. Perhatikan kesimpulan nilai kebenaran dari proposisi "p dan q" untuk semua kemungkinan nilai kebenaran p dan q.

a. p : Budi masuk sekolah (B).
   q : Budi bolos sekolah (B).

Artinya Budi masuk sekolah dan bolos sekolah secara bersamaan, hal ini tidak mungkin terjadi, jadi kesimpulan salah.

b. p : Budi masuk sekolah (B).
   q : Budi bolos sekolah (S).

Artinya Budi masuk sekolah, jadi kesimpulan benar.

c. p : Budi masuk sekolah (S).
   q : Budi bolos sekolah (B).

Artinya Budi bolos sekolah, jadi kesimpulan benar.

d. p : Budi masuk sekolah (S).

q : Budi bolos sekolah (S).

Artinya Budi tidak melakukan hal tersebut, jadi kesimpulan salah.

4. Implikasi

Implikasi adalah kata penghubung "jika … maka" untuk menghubungkan dua proposisi yang menyatakan hubungan sebab akibat. Implikasi dapat ditulis dengan notasi ($\rightarrow$). Nilai kebenaran dari suatu proposisi majemuk yang berbentuk ini tergantung dari nilai kebenaran dari proposisi – proposisi tunggalnya. Untuk menyederhanakan proposisi yang menggunakan implikasi akan kita sebut implikasi.

Nilai kebenaran dari dua proposisi yang dihubungkan dengan implikasi ditentukan dengan aturan implikasi dua proposisi a dan b (ditulis "$a \rightarrow b$" dan dibaca "jika a maka b") bernilai S (salah) jika dan hanya jika proposisi a benar dan b salah, sedangkan untuk nilai – nilai kebenaran a dan b lainnya, "$a \rightarrow b$" bernilai B (benar). Pada implikasi "$a \rightarrow b$", proposisi a disebut pendahulu dan proposisi b disebut pengikut. Nilai kebenaran implikasi $a \rightarrow b$ dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 1.8
Nilai Kebenaran Implikasi

a	b	$a \rightarrow b$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Contoh 1.12 Jika hari ini hujan maka saya membawa payung. Pernyataan ini merupakan proposisi majemuk karena pernyataan itu merupakan rangkaian dua proposisi, yaitu "hari ini hujan" dilambangkan p dan "saya membawa payung" dilambangkan q. Maka proposisi majemuk ini dilambangkan dengan $p \rightarrow q$. Pernyataan ini bernilai salah jika hari ini hujan

tetapi saya tidak membawa payung. Perhatikan kesimpulan nilai kebenaran dari proposisi "p dan q" untuk semua kemungkinan nilai kebenaran p dan q.

a. p : hari ini hujan (B).
   q : saya membawa payung (B).

Artinya hari ini hujan dan saya membawa payung, jadi kesimpulan benar.

b. p : hari ini hujan (B).
   q : saya membawa payung (S).

Artinya hari ini hujan tetapi saya tidak membawa payung, jadi kesimpulan salah.

c. p : hari ini hujan (S).
   q : saya membawa payung (B).

Artinya hari ini tidak hujan tetapi saya tetap membawa payung, jadi kesimpulan benar.

d. p : hari ini hujan (S).
   q : saya membawa payung (S).

Artinya hari ini tidak hujan dan hari ini pun saya tidak membawa payung, jadi kesimpulan benar.

Menentukan negasi dari implikasi dua proposisi dapat dilihat pada tabel nilai kebenaran berikut ini.

Tabel 1.9
Nilai Kebenaran Negasi dari Implikasi

a	b	$\sim b$	$a \rightarrow b$	$\sim(a \rightarrow b)$
B	B	S	B	S
B	S	B	S	B
S	B	S	B	S
S	S	B	B	S

Berdasarkan contoh 1.12 “jika hari ini hujan maka saya membawa payung" dengan “hari ini hujan” dilambangkan p dan “saya membawa payung” dilambangkan q, kita dapat membentuk implikasi baru dari implikasi tersebut, yaitu:

a. Konvers

Konvers dari suatu implikasi adalah pendahulu dan pengikutnya dari implikasi yang diketahui ditukarkan tempatnya, pendahulu menjadi pengikut dan pengikut menjadi pendahulu. Jadi jika diketahui $p \rightarrow q$ maka konversnya adalah $q \rightarrow p$, yaitu “jika hari saya membawa payung maka hari ini hujan”. Nilai kebenaran dari suatu implikasi tidak sama dengan nilai kebenaran dari konvers. Perhatikan nilai kebenaran konvers dari implikasi berikut.

Tabel 1.10
Nilai Kebenaran Konvers dari implikasi

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$
B	B	B	B
B	S	S	B
S	B	B	S
S	S	B	B

b. Invers

Inversnya dari suatu implikasi adalah pendahulu dan pengikutnya dari implikasi yang diketahui masing – masing dinegasikan. Jadi jika diketahui $p \rightarrow q$ maka inversnya adalah $\sim p \rightarrow \sim q$, sehingga “jika hari ini tidak hujan maka saya hari ini tidak membawa payung”.

Nilai kebenaran dari suatu implikasi tidak sama dengan nilai kebenaran dari invers. Perhatikan nilai kebenaran invers dari implikasi berikut.

Tabel 1.11
Nilai Kebenaran Invers dari implikasi

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$\sim p \rightarrow \sim q$
B	B	S	S	B	B
B	S	S	B	S	B
S	B	B	S	B	S
S	S	B	B	B	B

c. Kontrapositif

Kontrapositif dari suatu implikasi adalah pendahulu dan pengikutnya dari implikasi yang diketahui masing – masing dinegasikan dan selanjutnya ditukarkan tempatnya. Jadi jika diketahui $p \rightarrow q$ maka kontrapositifnya adalah $\sim q \rightarrow \sim p$, sehingga "jika saya hari ini tidak membawa payung maka hari ini tidak hujan".

Nilai kebenaran dari suatu implikasi sama dengan nilai kebenaran dari kontrapositif. Perhatikan nilai kebenaran kontrapositif dari implikasi berikut.

Tabel 1.12
Nilai Kebenaran Kontrapositif dari Implikasi

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
B	B	S	S	B	B
B	S	S	B	S	S
S	B	B	S	B	B
S	S	B	B	B	B

5. Biimplikasi

Bimplikasi adalah kata penghubung "… jika dan hanya jika …" yang digunakan untuk menghubungkan dua proposisi. Biimplikasi dapat ditulis dengan notasi ($\leftrightarrow$). Nilai kebenaran dari suatu proposisi majemuk yang berbentuk ini tergantung dari nilai kebenaran dari proposisi – proposisi tunggalnya. Nilai kebenaran dari dua proposisi yang dihubungkan dengan biimplikasi ditentukan dengan aturan: biimplikasi dua proposisi a dan b (ditulis "$a \leftrightarrow b$" dan dibaca "a jika dan hanya jika b") bernilai B (benar) jika dan hanya jika nilai kebenaran dari a sama dengan nilai kebenaran dari b, sedangkan untuk nilai – nilai kebenaran a dan b lainnya, "$a \leftrightarrow b$" bernilai S (salah). Aturan tersebut dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 1.13
Nilai Kebenaran Biimplikasi

a	b	$a \leftrightarrow b$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Contoh 1.13 Rani akan pergi jika dan hanya jika Roni akan pergi. Pernyataan ini merupakan pernyataan majemuk karena pernyataan itu merupakan rangkaian dua pernyataan, yaitu "Rani akan pergi" dilambangkan p dan "Roni akan pergi" dilambangkan q. Maka pernyataan majemuk itu dilambangkan dengan $p \leftrightarrow q$. Pernyataan ini bernilai benar jika Rani dan Roni melakukan hal yang sama. Perhatikan kesimpulan nilai kebenaran dari proposisi "p dan q" untuk semua kemungkinan nilai kebenaran p dan q.

a. p : Rani akan pergi (B).
   q : Roni akan pergi (B).

Artinya Rani dan Roni pergi bersama, jadi kesimpulan benar.

b. p : Rani akan pergi (B).
   q : Roni akan pergi (S).

Artinya Rani pergi tetapi Roni tidak pergi, jadi kesimpulan salah.

c. p : Rani akan pergi (S).
   q : Roni akan pergi (B).

Artinya Roni pergi tetapi Rani tidak pergi, jadi kesimpulan salah.

d. p : Rani akan pergi (S)

q : Roni akan pergi (S)

Artinya Rani dan Roni sama – sama tidak pergi, jadi kesimpulan benar.

Menentukan negasi dari impliasi dua pernyataan dapat dilihat pada tabel nilai kebenaran berikut ini.

Tabel 1.14
Nilai Kebenaran Negasi dari Biimplikasi

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$q \wedge \sim p$	$p \leftrightarrow q$	$\sim(p \leftrightarrow q)$
B	B	S	S	S	S	B	S
B	S	S	B	B	S	S	B
S	B	B	S	S	B	S	B
S	S	B	B	S	S	B	S

D. Validitas Kalimat Logika Proposisi (KLP)

Telah diketahui bahwa logika adalah ilmu tentang penalaran, yang merupakan tahapan penting yang dilakukan oleh manusia sebelum menyatakan pernyataan. Suatu kalimat Logika Proposisi (atau Argumen) adalah kalimat yang terdiri dari proposisi – proposisi pendukung yang disebut premis-premis, yang diakhiri dengan suatu proposisi yang disebut konklusi (kesimpulan).

$$\left.\begin{array}{l}\text{proposisi 1}\\ \text{proposisi 2}\\ \quad\vdots\\ \text{proposisi n}\end{array}\right\}\text{ (premis-premis)}$$
$$\overline{\overline{\therefore\ \text{proposisi baru}}} \rightarrow \text{(konklusi)}$$

Jadi, Kalimat Logika Proposisi (KLP) adalah suatu implikasi yang berbentuk (premis $1 \wedge$ premis $2 \wedge \ldots \wedge$ premis n) $\rightarrow$ konklusi.

Penalaran yang tepat akan menghasilkan konklusi yang tepat atau valid. Kalimat Logika proposisi dikatakan valid jika saat semua premis bernilai benar maka konklusi juga bernilai benar. Sebaliknya Kalimat logika proposisi yang tidak valid disebut invalid. Dengan kata lain KLP yang valid adalah suatu implikasi yang selalu bernilai benar apapun nilai kebenaran dari premis-premisnya. Suatu proposisi yang selalu bernilai benar untuk semua nilai kebenaran dari proposisi-proposisi tunggal yang ada di dalamnya disebut tautologi. Sebaliknya, suatu proposisi yang selalu bernilai salah apapun nilai dari proposisi-proposisi tunggal yang ada di dalamnya disebut suatu kontradiksi. Proposisi yang bukan tautologi dan kontradiksi kita katakan suatu kontingen.

Setelah mengetahui aturan – aturan proposisi, selanjutnya kita akan mempelajari pengujian validitas proposisi. Dalam memvalidasi kalimat logika proposisi (KLP) bernilai benar atau salah dapat kita lakukan dengan beberapa cara, seperti berikut.

1. Tabel Kebenaran

Tabel kebenaran menjelaskan secara terurut dari nilai-nilai kebenaran yang berasal dari proposisi tunggal. *Emil Post* (1987 – 1954) dan *Ludwig Wittgenstein* (1889 – 1951) memperkenalkan bentuk modern dari tabel kebenaran pada sekitar tahun 1920-an. Walaupun demikian, *Gottlob Frege* telah menggunakan tabel kebenaran sewaktu ia mengembangkan teori *Boole* tentang *elective function* (atau fungsi kebenaran). Sejak zaman dahulu, notasi dari tabel kebenaran telah ada, yang digunakan oleh filsuf Yunani dan ahli logika bernama *Philo* dari Megara, dengan teorinya tentang Implikasi.

Tabel kebenaran adalah suatu tabel yang menunjukkan secara sistematis satu demi satu nilai – nilai kebenaran sebagai hasil kombinasi dari proposisi tunggal. Setiap kombinasi dari proposisi tunggal tersebut, nilainya tergantung dari kata penghubung yang digunakan untuk mengkombinasikannya. Setiap kata penghubung pada logika, memiliki kebenarannya masing – masing sesuai jenis kata penghubung yang digunakan. Nilai kebenaran pada setiap kata penghubung telah dijelaskan pada subab sebelumnya. Adapun ketentuan – ketentuan dalam menentukan nilai kebenaran, yaitu:

a. Untuk menentukan nilai kebenaran dari proposisi majemuk atau kalimat logika proposisi (KLP) perlu diperhatikan hirarki dari masing-masing penghubung lebih dahulu.
b. Hirarki tersebut dari urutan yang tertinggi sampai terendah adalah negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi dan biimplikasi.
c. Hirarki yang lebih tinggi harus dikerjakan lebih dahulu.
d. Namun bila dalam KLP terdapat beberapa penghubung yang setingkat hirarkinya, maka pengerjaan dimulai dari yang kiri.

Tabel kebenaran dengan seluruh nilai yang dimungkinkan dibuat dengan rumus 2^n dengan n adalah jumlah variabel suatu proposisi. Jadi jika ada 3 proposisi yaitu $a, b,$ dan c maka ada $2^3 = 8$ nilai yang mungkin seperti yang ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 1.15
Nilai Kebenaran dari 3 Pernyataan

a	b	c
B	B	B
B	B	S
B	S	B
B	S	S
S	B	B
S	B	S
S	S	B
S	S	S

Contoh 1.14 Menentukan nilai kebenaran dari $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ dengan menggunakan tabel kebenaran. Sebelum membuat tabel kebenaran kita dapat menyederhanakan proposisi majemuk sebagai berikut.

$p \vee (q \wedge r) = A$

$(p \vee q) = C$

$(p \vee r) = D$

$C \wedge D = E$

Karena ada 3 proposisi tunggal yaitu p, q dan r maka terdapat 8 nilai yang mungkin terjadi, hal ini dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 1.16
Nilai Kebenaran dari $\boldsymbol{p} \vee (\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r}) \leftrightarrow (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{r})$

p	q	r	$(q \wedge r)$	A	C	D	E	$A \leftrightarrow E$
B	B	B	B	B	B	B	B	B
B	B	S	S	B	B	B	B	B
B	S	B	S	B	B	B	B	B
B	S	S	S	B	B	B	B	B
S	B	B	B	B	B	B	B	B
S	B	S	S	S	B	S	S	B
S	S	B	S	S	S	B	S	B
S	S	S	S	S	S	S	S	B

Berdasarkan hasil kesimpulan dari tabel 1.16 yang ditunjukkan pada kolom terakhir nilai kebenaran selalu B (benar), jadi proposisi tersebut merupakan suatu tautologi, yaitu suatu proposisi majemuk yang selalu benar, untuk setiap nilai kebenaran dari proposisi – proposisi tunggalnya.

Pernah kita jumpai pada saat membuat nilai kebenaran dengan hasil kesimpulannya selalu salah. Ingat kembali bahwa Proposisi majemuk yang selalu salah, untuk setiap nilai kebenaran dari proposisi – proposisi tunggalnya disebut kontradiksi.

<u>Contoh 1.15</u> Menentukan nilai kebenaran dari $\sim\big((\sim p \to r) \vee (p \to \sim q)\big) \wedge r$ dengan menggunakan tabel kebenaran. Sebelum membuat tabel kebenaran kita dapat menyederhanakan proposisi majemuk sebagai berikut.

$\sim p \to r = A$

$p \to \sim q = C$

$A \vee C = D$

$\sim D \wedge r = E$

Karena ada 3 proposisi tunggal yaitu p, q dan r maka terdapat 8 nilai yang mungkin terjadi, hal ini dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 1.17
Nilai Kebenaran dari $\sim\big((\sim \boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{r}) \vee (\boldsymbol{p} \rightarrow \sim \boldsymbol{q})\big) \wedge \boldsymbol{r}$

p	q	r	$\sim p$	$\sim q$	A	C	D	$\sim D$	E
B	B	B	S	S	B	S	B	S	S
B	B	S	S	S	B	S	B	S	S
B	S	B	S	B	B	B	B	S	S
B	S	S	S	B	B	B	B	S	S
S	B	B	B	S	B	B	B	S	S
S	B	S	B	S	S	B	B	S	S
S	S	B	B	B	B	B	B	S	S
S	S	S	B	B	S	B	B	S	S

Berdasarkan hasil kesimpulan dari tabel 1.17 yang ditunjukkan pada kolom terakhir nilai kebenaran selalu S (salah), jadi proposisi tersebut merupakan suatu kontradiksi.

<u>Contoh 1.16</u> Menentukan nilai kebenaran dari $\big((p \rightarrow r) \vee (p \rightarrow \sim q)\big) \wedge r$ dengan menggunakan tabel kebenaran. Sebelum membuat tabel kebenaran kita dapat menyederhanakan pernyataan majemuk sebagai berikut.

$p \rightarrow r = A$

$p \rightarrow \sim q = C$

$A \vee C = D$

$D \wedge r = E$

Karena ada 3 proposisi tunggal yaitu p, q dan r maka terdapat 8 nilai yang mungkin terjadi, hal ini dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 1.18
Nilai Kebenaran dari $\big((p \to r) \vee (p \to \sim q)\big) \wedge r$

p	q	r	$\sim q$	A	C	D	E
B	B	B	S	B	S	B	S
B	B	S	S	S	S	S	S
B	S	B	B	B	B	B	B
B	S	S	B	S	B	B	S
S	B	B	S	B	B	B	B
S	B	S	S	B	B	B	S
S	S	B	B	B	B	B	B
S	S	S	B	B	B	B	S

Berdasarkan hasil kesimpulan dari tabel 1.18 yang ditunjukkan pada kolom terakhir memiliki nilai kebenaran B (benar) dan S (salah), jadi proposisi tersebut merupakan suatu kontingen.

2. Pohon Semantik

Pohon semantik adalah salah satu teknik dalam menentukan validitas suatu proposisi majemuk. Pembuktian validitas kalimat proposisi dengan pohon semantik dapat dilakukan dengan melakukan pemberian nilai kebenaran pada satuan proposisi pendukung dengan dua pencabangan yang masing – masing bernilai B (benar), S (salah) dan diikuti dengan beberapa langkah sebagai berikut.

a. Suatu kalimat logika proposisi (KLP), sebutlah O percabangan, yaitu O_1 atau O_2 .
   1) Cabang O_1 diberikan nilai B pada proposisi pendukung yang dipilih.
   2) Cabang O_2 diberikan nilai S pada proposisi pendukung yang sama dengan pada cabang O_1.

b. Lakukan pemeriksaan.

c. Bila nilai kebenaran KLP dapat ditentukan, maka pemeriksaan berhenti.

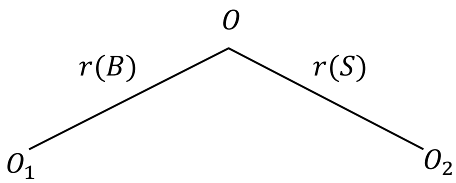
d. Bila nilai kebenaran tidak dapat ditentukan, maka diteruskan dengan melakukan pencabangan kembali (mulai kembali dengan langkah (a)) dengan proposisi pendukung yang lain (proposisi yang sudah dipilih tidak dapat dipilih kembali).

e. Bila KLP bernilai:

1) Selalu B (benar) maka KLP tautologi (valid).
2) Selalu S (salah) maka KLP kontradiksi.
3) B (benar) dan S (salah) maka KLP kontingen.

<u>Contoh 1.17</u> Menentukan nilai kebenaran dari $A\colon \big((p \to q) \wedge (\sim q \vee r)\big) \to (p \to r)$ dengan menggunakan pohon semantik.

$A\colon \big((p \to q) \wedge (\sim q \vee r)\big) \to (p \to r)$ Dilakukan pencabangan O_1 dan O_2, dengan O_1 memberi interpretasi proposisi r dengan nilai B (benar) dan O_2 dengan nilai S (salah).



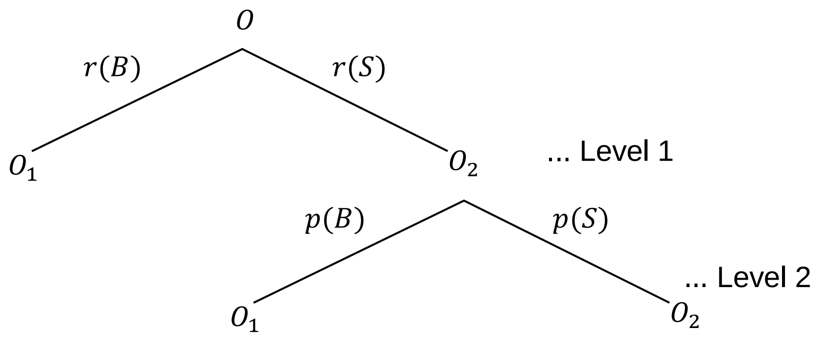
... Level 1

<u>Level 1</u>

Pada O_1 yaitu $A\colon \big((p \to q) \wedge (\sim q \vee B)\big) \to \underbrace{(p \to B)}_{B} \;\therefore A(B)$

Pada O_2 yaitu $A\colon \big((p \to q) \wedge (\sim q \vee S)\big) \to \underbrace{(p \to S)}_{?} \therefore A(?)$

KLP A pada O_1 telah dapat ditentukan nilai kebenarannya yaitu $A(B)$, sedangkan A pada O_2 belum dapat ditentukan nilai kebenarannya. Oleh karena itu, pada O_2 perlu dibuat percabangan dengan memberi interpretasi proposisi p dengan nilai B (benar) pada O_1 dan bernilai salah pada O_2.

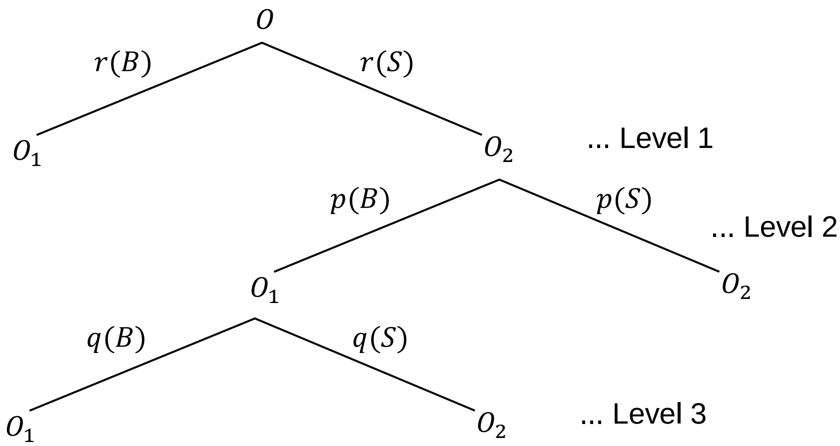


Level 2

Pada O_1 yaitu $A: \big((B \to q) \land (\sim q \lor S)\big) \to \underbrace{(B \to S)}_{S} \;\therefore A(?)$

Pada O_2 yaitu $A: \big((S \to q) \land (\sim q \lor S)\big) \to \underbrace{(S \to S)}_{B} \therefore A(B)$

KLP A pada O_2 telah dapat ditentukan nilai kebenarannya yaitu $A(B)$, sedangkan A pada O_1 belum dapat ditentukan nilai kebenarannya. Oleh karena itu, pada O_1 perlu dibuat percabangan dengan memberi interpretasi proposisi q dengan nilai B (benar) pada O_1 dan bernilai salah pada O_2.

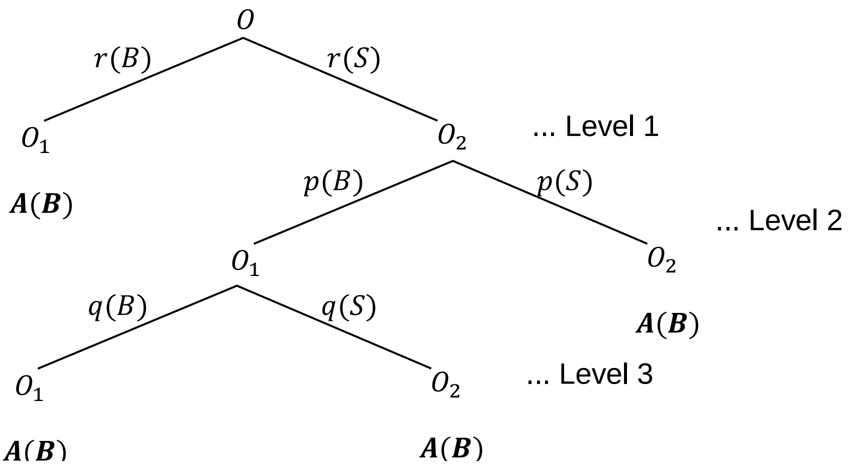


Level 3

Pada O_1 yaitu $A: \underbrace{\big((B \to B) \wedge (S \vee S)\big)}_{S} \to \underbrace{(B \to S)}_{S} \;\therefore A(B)$

Pada O_2 yaitu $A: \underbrace{\big((B \to S) \wedge (B \vee S)\big)}_{S} \to \underbrace{(B \to S)}_{S} \therefore A(B)$

KLP A pada O_1 dan O_2 telah dapat ditentukan nilai kebenarannya yaitu $A(B)$. Setelah melakukan pemeriksaan pada setiap interpretasi dari proposisi – proposisi pendukung KLP A, diperoleh nilai kebenaran KLP A adalah selalu bernilai B (benar). Jadi dapat ditentukan validitas KLP A adalah valid.



3. Strategi Pembalikan

Strategi pembalikan adalah salah satu teknik dalam menentukan nilai kebenaran suatu pernyataan majemuk selain menggunakan pohon semantik. Langkah – langkah pembuktian dengan strategi pembalikan dilakukan sebagai berikut.

a. KLP diinterpretasikan lebih dahulu dengan nilai S (salah).
b. Lakukan pemeriksaan terhadap KLP sehingga didapat nilai kebenaran dari proposisi – proposisi pendukungnya. Bila dalam pemeriksaan terdapat nilai kebenaran proposisi – proposisi pendukung tidak konsisten, maka dapat disimpulkan bahwa KLP valid.
c. Bila nilai kebenaran proposisi – proposisi pendukung konsisten berarti KLP invalid. KLP dapat termasuk kontradiksi atau kontingen.
d. Untuk menentukan KLP termasuk kontradiksi atau kontingen, maka dilakukan interpretasi kedua terhadap KLP dengan nilai B (benar).
e. Bila dalam pemeriksaan kali ini nilai kebenaran proposisi – proposisi pendukung tidak konsisten, maka KLP adalah invalid – kontradiksi. Sedangkan bila terjadi sebaliknya maka KLP invalid – kontingen.

Contoh 1.18 Menentukan nilai kebenaran dari $A: \big((p \to q) \wedge (\sim q \vee r)\big) \to (p \to r)$ dengan menggunakan strategi pembalikan.

$A: \big((p \to q) \wedge (\sim q \vee r)\big) \to (p \to r)$

Interpretasi 1

$A(S): \big((p \to q) \wedge (\sim q \vee r)\big) \to (p \to r)$

$$A_1: \underbrace{\big((p \to q) \wedge (\sim q \vee r)\big)}_{B} \to \underbrace{(p \to r)}_{S_*}$$

Berdasarkan A_1 dari S_* diperoleh p bernilai B (benar) dan r bernilai S (salah). Selanjutnya didistribusikan nilai proposisi yang didapat dari A_1

$$A_2: \left(\underbrace{(p \to q)}_{B_{*1}} \wedge \underbrace{(\sim q \vee r)}_{B_{*2}}\right) \to (p \to r)$$

Berdasarkan A_2 dari B_{*1} diperoleh jika p bernilai B (benar) maka q bernilai B (benar). Dari B_{*2} diperoleh jika r bernilai S (salah) maka q bernilai S (salah). Hal ini terlihat bahwa terdapat proposisi q tidak konsisten (q bernilai B dan juga S) pada A_2. Jadi KLP A valid.

4. Metode Deduksi

Secara umum KLP dapat dibuktikan validitasnya melalui tabel kebenaran, pohon semantik, juga dengan cara strategi pembalikan. Selanjutnya akan dijelaskan cara khusus pembuktian validitas argumen yang disebut metode deduksi. Pembuktian dengan metode deduksi akan menggunakan salah satu atau kombinasi dari beberapa aturan dari bentuk penalaran sederhana (aturan penyimpulan) dan aturan pertukaran (ekuivalensi).

a. Penalaran Sederhana (Aturan Penyimpulan)

Penalaran merupakan langkah penting yang harus dilakukan seseorang sebelum menyatakan suatu pernyataan. Penalaran yang tepat akan menghasilkan suatu pernyataan yang valid. Penalaran selalu memperhatikan lebih dahulu proposisi – proposisi pendukung yang dijadikan sebagai premis, yang kemudian dinilai sehingga didapat suatu konklusi (kesimpulan). Adapun tahapan penalaran sebagai berikut.

1) Menentukan proposisi – proposisi pendukung sebagai premis.
2) Melakukan penyimpulan.
   a) Menilai hubungan antar proposisi – proposisi di dalam premis tersebut.
   b) Menentukan konklusi.

$$\left.\begin{array}{l}\text{proposisi 1}\\ \text{proposisi 2}\\ \quad\vdots\\ \text{proposisi n}\end{array}\right\}\text{(premis)}$$
$$\overline{\overline{\therefore \text{ proposisi baru}}} \rightarrow \text{(konklusi)}$$

3) Lambang dari penalaran dapat berbentuk bahasa atau simbol lainnya (misal simbol logika matematika). Lambang dari penalaran ini disebut pernyataan.

Beberapa bentuk argumen valid (aturan penyimpulan) yang telah diketahui dapat dilihat sebagai berikut.

1) Simplikasi : $\dfrac{p \wedge q}{\therefore p}$ atau $\dfrac{p \wedge q}{\therefore q}$

2) Konjungsi : $\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$

3) Addisi : $\dfrac{p}{\therefore p \vee q}$

4) Silogisme Disjungtif : $\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \hline \therefore q \end{array}$ atau $\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim q \\ \hline \therefore p \end{array}$

5) Silogisme Eksklusif : $\begin{array}{l} p \oplus q \\ p \\ \hline \therefore \sim q \end{array}$ atau $\begin{array}{l} p \oplus q \\ q \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$

6) Absorpsi : $\dfrac{p \rightarrow q}{\therefore p \rightarrow (p \wedge q)}$

7) Modus Ponen : $\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$

8) Modus Tollens : $\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$

9) Silogisme Hipotetik : $\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$

10) Reductio Ad Absurdum (Kontradiksi) : $\begin{array}{l} \sim p \rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \therefore \sim(\sim p) \cong p \end{array}$

11) Dilemma Konstruktif : $p \rightarrow q$

$r \rightarrow s$

$p \vee r$

$\overline{\quad\quad\quad}$

$\therefore q \vee s$

12) Dilemma Desktruktif : $p \rightarrow q$

$r \rightarrow s$

$\sim q \vee \sim s$

$\overline{\quad\quad\quad}$

$\therefore \sim p \vee \sim r$

b. Aturan Pertukaran (Ekuivalensi)

Dua proposisi atau dua proposisi majemuk disebut ekuivalen jika mempunyai nilai kebenaran yang sama. Dua proposisi p dan q yang ekuivalen dinotasikan $p \cong q$. Jika sebagian atau keseluruhan proposisi atau proposisi majemuk ditukar dengan proposisi atau proposisi majemuk yang ekuivalen secara logis maka nilai kebenaran proposisi atau proposisi majemuk yang baru adalah sama dengan nilai kebenaran proposisi atau proposisi majemuk semula. Beberapa aturan dalam aturan pertukaran (ekuivalensi) sebagai berikut.

1) Hukum Negasi Ganda : $p \cong \sim(\sim p)$
2) Komutatif : $p \wedge q \cong q \wedge p$
   $p \vee q \cong q \vee p$
3) Asosiasi : $p \wedge (q \wedge r) \cong (p \wedge q) \wedge r$
   $p \vee (q \vee r) \cong (p \vee q) \vee r$
4) Distribusi : $p \wedge (q \vee r) \cong (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
   $p \vee (q \wedge r) \cong (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
5) Konjungsi Ekuivalensi : $p \wedge q \cong \sim(p \rightarrow \sim q)$
6) Disjungsi Ekuivalensi : $p \vee q \cong \sim p \rightarrow q$
7) a. Implikasi : $p \rightarrow q \cong \sim(p \wedge \sim q)$
   b. Material Implikasi : $p \rightarrow q \cong \sim p \vee q$
   c. Kontraposisi : $p \rightarrow q \cong \sim q \rightarrow \sim p$

8) a. Biimplikasi : $p \leftrightarrow q \cong (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

b. Material Ekuivalensi : $p \leftrightarrow q \cong (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

9) Dalil De Morgan : $\sim(p \wedge q) \cong \sim p \vee \sim q$

: $\sim(p \vee q) \cong \sim p \wedge \sim q$

10) Eksportasi : $(p \wedge q) \rightarrow r \cong p \rightarrow (q \rightarrow r)$

11) Tautologi (Idempoten) :$p \cong (p \vee p) \cong (p \wedge p)$

12) Hukum identitas : $p \wedge B \cong p \cong p \vee S$

$p \wedge S \cong S$

$p \vee B \cong B$

13) Hukum Komplemen : $p \wedge \sim p \cong S$

$p \vee \sim p \cong B$

Setelah dijelaskan mengenai aturan penyimpulan dan aturan pertukaran, selanjutnya kita akan bahas mengenai metode deduksi. Pembuktian dengan menggunakan metode deduksi, semua premis pendukung pernyataan harus dilibatkan dalam uraian pembuktian.

Contoh 1.19 Menyelidiki argumen dari "jika kita bekerja maka kita akan mendapatkan uang. Jika kita mendapatkan uang maka kita bisa belikan sepatu. Kita bekerja. Jadi kita bisa belikan sepatu" valid atau tidak. Berdasarkan pernyataan tersebut, pertama kita dapat melakukan penjabaran sebagai berikut.

Jika kita bekerja **maka** kita akan mendapatkan uang

p q

Jika kita mendapatkan uang **maka** kita bisa belikan sepatu

q r

Kita bekerja

p

Jadi Kita bisa belikan sepatu

r

Dilambangkan :

$p \rightarrow q$

$q \rightarrow r$

$\underline{p \qquad}$

$\therefore r$

Dengan metode deduksi dinyatakan:

a. $p \rightarrow q$ premis 1
b. $q \rightarrow r$ premis 2
c. p premis 3
d. $\therefore r$ konklusi

Libatkan premis 1 lalu premis 2 dan gunakan salah satu aturan penyimpulan yaitu silogisme hipotetik sehingga menghasilkan suatu proposisi majemuk yang baru yaitu $p \rightarrow r$. Selanjutnya dengan menggunakan premis baru libatkan dengan premis 3 dengan menggunakan modus ponen sehingga menghasilkan proposisi baru yaitu r, dimana r adalah konklusi yang dituju. Karena konklusi didapat maka pembuktian selesai dengan argumen dinyatakan valid. Secara lengkap langkah – langkah metode deduksi untuk kasus ini sebagai berikut.

a. $p \rightarrow q$ premis 1
b. $q \rightarrow r$ premis 2
c. p premis 3
d. $p \rightarrow r$ premis 4 (premis 1 dan 2 menggunakan silogisme hipotetik)
e. r konklusi (premis 3 dan 4 menggunakan modus ponen)

Jadi, KLP tersebut valid.

Berdasarkan langkah di atas, metode deduksi terlihat lebih sederhana, namun dalam menggunakan metode deduksi perlu mengandalkan intuisi, sebab tidak ada aturan baku dalam penempatan aturan penyimpulan maupun aturan pertukaran tertentu pada saat pembuktian. Bila argumen ingin dibuktikan dengan tabel kebenaran, pohon semantik atau strategi pembalikan, maka simbol logika perlu dibuat dalam bentuk rangkaian terlebih dahulu. Penghubung antara proposisi atau proposisi majemuk satu dengan yang lain pada premis dihubungkan dengan operator konjungsi (∧). Penghubung premis dengan konklusi digunakan operasi implikasi (→). Oleh karena itu untuk kasus contoh 1.19 didapat rangkaian KLP : $\big((p \to q) \wedge (q \to r) \wedge p\big) \to r$.

E. Logika Predikat

Jika terdapat pernyataan "$x > 5$" atau "x adalah lebih besar dari 5" maka terdapat dua bagian, yaitu pertama variabel "x" dan yang kedua predikat "adalah lebih besar dari 5". Pernyataan tersebut disebut fungsi proposisi P pada x disimbolkan $P(x)$, sehingga pernyataan tersebut dapat ditulis $P(x)$: $x > 5$. Jika nilai x tidak diketahui maka $P(x)$ merupakan kalimat terbuka. Artinya agar kalimat terbuka "$P(x)$" menjadi proposisi (pernyataan) maka semua variabel bebas di dalamnya diganti dengan suatu konstanta.

<u>Contoh 1.20</u>

1. Jika $P(x) = 3 + x < 7$ didefinisikan pada $A =$ himpunan bilangan asli, maka $P(x)$ bernilai benar untuk $x = 1, 2, 3$.
2. Jika $Q(x) = 3 + x < 3$ didefinisikan pada $A =$ himpunan bilangan asli, maka tidak ada x yang menyebabkan $Q(x)$ bernilai benar.

Selain dengan mengganti variabel dengan konstanta dalam mengubah kalimat terbuka menjadi proposisi, salah satu cara lain dalam mengubah suatu kalimat terbuka menjadi suatu pernyataan yang mempunyai nilai kebenaran yaitu dengan menggunakan kuantor. Ada dua jenis kuantor, yaitu kuantor universal (kuantor umum) dan kuantor eksistensial (kuantor khusus).

1. Kuantor Universal

Kuantor universal memiliki lambang $(\forall_x)$ dibaca "untuk semua x berlaku" atau "untuk setiap x berlaku". Misalkan $P(x)$ adalah suatu kalimat terbuka, maka pernyataan $\forall_x P(x)$ dibaca "untuk semua x berlaku $P(x)$" atau "untuk setiap x berlaku $P(x)$". Ingkaran dari pernyataan berkuantor $\sim(\forall x) \cong \exists(\sim x)$.

Contoh 1.21

a. $x \in \mathbb{R}, P(x): x < 2$, maka $\forall_x P(x)$: dibaca "untuk setiap bilangan riil x berlaku $x < 2$. Misalkan $x = 1$ maka $P(1)$ bernilai benar, namun jika $x = 3$ maka $P(3)$ bernilai salah. Jadi $\forall_x P(x)$ bernilai salah.

b. $x \in \mathbb{R}, P(x): x < 2 + x$, maka $\forall_x P(x)$: dibaca "untuk setiap bilangan riil x berlaku $x < 2 + x$. Setiap pemisalan x memenuhi $< 2 + x$. Jadi $\forall_x P(x)$ bernilai benar.

2. Kuantor Eksistensial.

Kuantor eksistensial memiliki lambang $(\exists_x)$ dibaca "terdapat suatu x berlaku". Misalkan $P(x)$ adalah suatu kalimat terbuka, maka pernyataan $\exists_x P(x)$ dibaca "terdapat suatu x berlaku $P(x)$". Ingkaran dari pernyataan berkuantor $\sim(\exists x) \cong \forall(\sim x)$.

Contoh 1.22

a. $x \in \mathbb{R}, P(x): x < 2$, maka $\exists_x P(x)$: dibaca "terdapat bilangan riil x berlaku $x < 2$. Misalkan pilih $x = 1$ maka $P(1)$ bernilai benar. Jadi $\exists_x P(x)$ bernilai benar.

b. $x \in \mathbb{R}, P(x): x = 2 + x$, maka $\exists_x P(x)$: dibaca "terdapat bilangan riil x berlaku $x = 2 + x$. Setiap pemisalan x, tidak ada yang memenuhi $x = x + 1$. Jadi $\exists_x P(x)$ bernilai salah.

Selanjutnya kita akan pelajari cara mengkonversi kalimat ke dalam ekspresi logika predikat, dapat dilihat pada contoh sebagai berikut.

Contoh 1.23

1. Semua singa adalah buas.
   $P(x)$: x adalah singa.
   $Q(x)$: x adalah makhluk buas.
   Jadi $\forall_x \big(P(x) \rightarrow Q(x)\big)$.
2. Beberapa singa tidak buas.
   $P(x)$: x adalah singa.
   $Q(x)$: x adalah makhluk buas.
   Jadi $\exists_x \big(P(x) \wedge {\sim}Q(x)\big)$.
3. Beberapa singa tidak minum kopi.
   $P(x)$: x adalah singa.
   $R(x)$: x adalah minum kopi.
   Jadi $\exists_x \big(P(x) \wedge {\sim}R(x)\big)$.
4. Beberapa makhluk buas tidak minum kopi.
   $Q(x)$: x adalah makhluk buas.
   $R(x)$: x adalah minum kopi.
   Jadi $\exists_x \big(Q(x) \wedge {\sim}R(x)\big)$.

Setelah mempelajari cara mengkonversi kalimat ke dalam ekspresi logika predikat selanjutnya, kita akan pelajari hubungan negasi kalimat berkuantor yang akan dijelaskan sebagai berikut.

1. ${\sim}\forall_x P(x) \cong \exists_x {\sim}P(x)$
   ${\sim}\exists_x P(x) \cong \forall_x {\sim}P(x)$
2. $\forall_x \forall_y P(x,y) \cong \forall_y \forall_x (Px,y)$
   $\exists_x \exists_y P(x,y) \cong \exists_y \exists_x P(x,y)$
3. ${\sim}\big(\forall_x \exists_y P(x,y)\big) \cong \exists_x \forall_y {\sim}P(x,y)$

$\sim \left(\exists_x \forall_y P(x,y)\right) \cong \forall_x \exists_y \sim P(x,y)$

4. $\sim\forall_x\left(P(x) \to Q(x)\right) \cong \exists_x\left(P(x) \wedge \sim Q(x)\right)$

   $\sim\exists_x \left(P(x) \wedge Q(x)\right) \cong \forall_x\left(P(x) \to \sim Q(x)\right)$

Contoh 1.24

1. Menentukan nilai kebenarannya dan negasinya dari $\exists_x(x^2 + x + 1 = 0)$.
   Perhatikan tidak ada akar – akar dari persamaan $x^2 + x + 1 = 0$, dimana $x \in \mathbb{R}$. Sehingga pernyataan dari $\exists_x(x^2 + x + 1 = 0)$ bernilai S (salah). Negasi dari $\exists_x(x^2 + x + 1 = 0)$ adalah $\forall(x^2 + x + 1 \neq 0)$ dengan nilai kebenarannya adalah B (benar).
2. Menentukan nilai kebenaran dan negasinya dari $\exists_y\forall_x(x^2 - y < 3)$.
   Perhatikan tidak ada nilai y yang memenuhi persamaan $x^2 - y < 3$, untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Sehingga pernyataan dari $\exists_y\forall_x(x^2 - y < 3)$ bernilai S (salah). Negasi dari $\exists_y\forall_x(x^2 - y < 3)$ adalah $\forall_y\, \exists_x(x^2 - y \geq 3)$ dengan nilai kebenarannya adalah B (benar). Karena setiap nilai $y \in \mathbb{R}$ pasti ada nilai $x \in \mathbb{R}$ yang memenuhi $x^2 - y \geq 3$.
3. Menentukan nilai kebenaran dan negasinya dari $\forall_x\exists_y(x^2 - y < 3)$.
   Perhatikan untuk setiap nilai $x \in \mathbb{R}$ yang memenuhi persamaan $x^2 - y < 3$, pasti terdapat nilai $y \in \mathbb{R}$. Sehingga pernyataan dari $\forall_x\exists_y(x^2 - y < 3)$ bernilai B (benar). Negasi dari $\forall_x\exists_y(x^2 - y < 3)$ adalah $\exists_y\, \forall_x(x^2 - y \geq 3)$ dengan nilai kebenarannya adalah S (salah). Karena tidak ada nilai y yang memenuhi persamaan $\exists_y\, \forall_x(x^2 - y \geq 3)$ untuk setiap nilai $\in \mathbb{R}$.

F. Latihan Soal Bab 1

1. Tentukan mana yang merupakan kalimat terbuka, proposisi yang bernilai benar dan proposisi yang bernilai salah!
   a. Ambil buku tersebut!
      Penyelesaian: Kalimat terbuka.

b. Siapa dosen tersebut?

Penyelesaian: Kalimat terbuka.

c. $x + 5 = 0$

Penyelesaian: Kalimat terbuka.

d. $x + 5 = 0$, dengan $x < -5$

Penyelesaian: Proposisi dengan nilai salah.

e. $x + 5 = 0$, dengan $x = -5$

Penyelesaian: Proposisi dengan nilai benar.

2. Buat negasi/ingkaran dari proposisi – proposisi berikut.

a. $-5 + 5 = 0$

Penyelesaian: $-5 + 5 \neq 0$.

b. $-5 + 5 < 0$

Penyelesaian: $-5 + 5 \geq 0$.

c. Hari ini hujan.

Penyelesaian: Hari ini tidak hujan.

d. Saya tidak mengikuti ujian akhir.

Penyelesaian: Saya mengikuti ujian akhir.

e. Semua mahasiswa belajar matematika dasar.

Penyelesaian: Beberapa mahasiswa tidak belajar matematika dasar.

3. Diketahui proposisi –proposisi berikut.

p: Saya lulus ujian.

q: Saya masuk perguruan tinggi.

r: Saya menjadi mahasiswa.

Ekspresikan dalam kalimat, jika:

a. $\sim r$

Penyelesaian: Saya tidak menjadi mahasiswa.

b. $\sim p \rightarrow \sim q$

Penyelesaian: Jika saya tidak lulus ujian maka saya tidak masuk perguruan tinggi.

c. $(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge p)$

Penyelesaian: Saya lulus ujian dan saya masuk perguruan tinggi atau saya tidak masuk perguruan tinggi tetapi saya lulus ujian.

d. $p \leftrightarrow q$

Penyelesaian: Saya lulus ujian jika dan hanya jika saya masuk perguruan tinggi.

e. $\sim p \vee r$

Penyelesaian: Saya tidak lulus ujian atau saya menjadi mahasiswa.

4. Diketahui proposisi – proposisi berikut.

p: Saya belajar matematika dasar.

q: Saya mendapatkan nilai tertinggi.

Ekspresikan dalam lambang logika proposisi majemuk untuk:

a. Saya belajar matematika dasar dan mendapatkan nilai tertinggi.

Penyelesaian: $p \wedge q$

b. Saya belajar matematika dasar tetapi tidak mendapat nilai tertinggi.

Penyelesaian: $p \wedge \sim q$

c. Saya tidak belajar matematika dasar dan saya tidak mendapatkan nilai tertinggi.

Penyelesaian: $\sim p \wedge \sim q$

d. Jika saya belajar matematika dasar maka saya akan mendapatkan nilai tertinggi.

Penyelesaian: $p \rightarrow q$

e. Saya belajar matematika dasar atau mendapatkan nilai tertinggi, tetapi saya mendapatkan nilai tertinggi jika saya belajar matematika dasar.

Penyelesaian: $(p \vee q) \wedge (p \rightarrow q)$

5. Tentukan nilai kebenaran dari proposisi – proposisi majemuk berikut yang dibentuk dari soal no. 4, jika p dan q bernilai B (benar)!

a. $p \wedge q$

Penyelesaian: $B \wedge B = B$ (benar).

b. $p \wedge \sim q$

Penyelesaian: $B \wedge S = S$ (salah).

c. $\sim p \wedge \sim q$

Penyelesaian: $S \wedge S = S$ (salah).

d. $p \rightarrow q$

Penyelesaian: $B \rightarrow B = B$ (benar).

e. $(p \vee q) \wedge (p \rightarrow q)$

Penyelesaian: $(B \vee B) \wedge (B \rightarrow B) = B \wedge B = B$ (benar).

6. Tunjukkan dengan tabel kebenaran ekuivalensi dari:

a. $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$.

Penyelesaian:

Misalkan:

$p \vee q = A$

$A \vee r = C$

$q \vee r = D$

$p \vee D = E$

Perhatikan tabel kebenaran berikut.

p	q	r	A	C	D	E
B	B	B	B	B	B	B
B	B	S	B	B	B	B
B	S	B	B	B	B	B
B	S	S	B	B	S	B
S	B	B	B	B	B	B
S	B	S	B	B	B	B
S	S	B	S	B	B	B
S	S	S	S	S	S	S

Perhatikan kolom C dan E memiliki nilai kebenaran yang sama sehingga $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$.

b. $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

Penyelesaian:

Misalkan:

$q \vee r = A$

$p \wedge A = C$

$p \wedge q = D$

$p \wedge r = E$

$D \vee E = F$

Perhatikan tabel kebenaran berikut.

p	q	r	A	C	D	E	F
B	B	B	B	B	B	B	B
B	B	S	B	B	B	S	B
B	S	B	B	B	S	B	B
B	S	S	S	S	S	S	S
S	B	B	B	S	S	S	S
S	B	S	B	S	S	S	S
S	S	B	B	S	S	S	S
S	S	S	S	S	S	S	S

Perhatikan kolom C dan F memiliki nilai kebenaran yang sama, sehingga $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

c. $(p \wedge q) \rightarrow r = p \rightarrow (q \rightarrow r)$.

Penyelesaian:

Misalkan:

$p \wedge q = A$

$A \rightarrow r = C$

$q \rightarrow r = D$

$p \rightarrow D = E$

Perhatikan tabel kebenaran berikut.

p	q	r	A	C	D	E
B	B	B	B	B	B	B
B	B	S	B	S	S	S
B	S	B	S	B	B	B
B	S	S	S	B	B	B
S	B	B	S	B	B	B
S	B	S	S	B	S	B
S	S	B	S	B	B	B
S	S	S	S	B	B	B

Perhatikan kolom C dan E memiliki nilai kebenaran yang sama, sehingga $(p \wedge q) \rightarrow r = p \rightarrow (q \rightarrow r)$.

d. $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

Penyelesaian:

Misalkan:

$q \wedge r = A$

$p \vee A = C$

$p \vee q = D$

$p \vee r = E$

$D \wedge E = F$

Perhatikan tabel berikut.

p	q	r	A	C	D	E	F
B	B	B	B	B	B	B	B
B	B	S	S	B	B	B	B
B	S	B	S	B	B	B	B
B	S	S	S	B	B	B	B
S	B	B	B	B	B	B	B
S	B	S	S	S	B	S	S
S	S	B	S	S	S	B	S
S	S	S	S	S	S	S	S

Perhatikan kolom C dan F memiliki nilai kebenaran yang sama, sehingga $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

e. $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$.

Penyelesaian:

Misalkan:

$q \wedge r = A$

$p \wedge A = C$

$p \wedge q = D$

$D \wedge r = E$

Perhatikan tabel berikut.

p	q	r	A	C	D	E
B	B	B	B	B	B	B
B	B	S	S	S	B	S
B	S	B	S	S	S	S
B	S	S	S	S	S	S
S	B	B	B	S	S	S
S	B	S	S	S	S	S
S	S	B	S	S	S	S
S	S	S	S	S	S	S

Perhatikan kolom C dan F memiliki nilai kebenaran yang sama, sehingga $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r)$.

7. Tentukan mana yang merupakan tautologi, kontradiksi, atau kontingen untuk proposisi – proposisi majemuk berikut! (Gunakan tabel kebenaran)

   a. $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$.

   Penyelesaian:

   Misalkan:

   $p \wedge q = A$

   $p \vee q = C$

   $A \rightarrow C = D$

   Perhatikan tabel berikut.

p	q	A	C	D
B	B	B	B	B
B	S	S	B	B
S	B	S	B	B
S	S	S	S	B

   Perhatikan kolom D memiliki nilai kebenaran B (benar) semua, sehingga proposisi majemuk ini merupakan tautologi.

   b. $\big((p \vee q) \oplus (r \wedge p)\big) \rightarrow {\sim}r$.

   Penyelesaian:

   Misalkan:

   $p \vee q = A$

$r \wedge p = C$

$A \oplus C = D$

$D \rightarrow \sim r = E$

Perhatikan tabel berikut.

p	q	r	$\sim r$	A	C	D	E
B	B	B	S	B	B	S	B
B	B	S	B	B	S	B	B
B	S	B	S	B	B	S	B
B	S	S	B	B	S	B	B
S	B	B	S	B	S	B	S
S	B	S	B	B	S	B	B
S	S	B	S	B	S	B	S
S	S	S	B	S	S	S	B

Perhatikan kolom D memiliki nilai kebenaran B (benar) dan S (salah), sehingga proposisi majemuk ini merupakan kontingen.

c. $\big((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)\big) \wedge \sim(p \rightarrow q)$.

Penyelesaian:

Misalkan:

$p \rightarrow q = A$

$q \rightarrow r = C$

$A \wedge C = D$

$D \wedge \sim A = E$

Perhatikan tabel berikut.

p	q	r	$\sim p$	A	$\sim A$	C	D	E
B	B	B	S	B	S	B	B	S
B	B	S	S	B	S	S	S	S
B	S	B	S	S	B	B	S	S
B	S	S	S	S	B	B	S	S
S	B	B	B	B	S	B	B	S
S	B	S	B	B	S	S	S	S
S	S	B	B	B	S	B	B	S
S	S	S	B	B	S	B	B	S

Perhatikan kolom E memiliki nilai kebenaran S (salah) semua, sehingga proposisi majemuk ini merupakan kontradiksi.

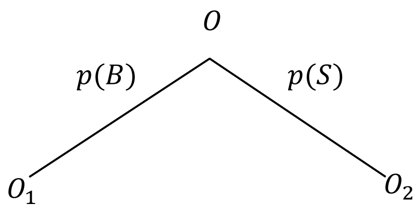
8. Tunjukkan dengan tabel kebenaran Tunjukkan validitas KLP – KLP dari proposisi majemuk pada nomor 7 dengan menggunakan pohon semantik! (Gunakan juga dengan strategi pembalikan pada poin (a) dan (b)).

   a. $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$.

   Penyelesaian:

   <u>Pohon Semantik:</u>

   $A: (p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ Dilakukan pencabangan O_1 dan O_2, dengan O_1 memberi interpretasi proposisi p dengan nilai B (benar) dan O_2 dengan nilai S (salah).



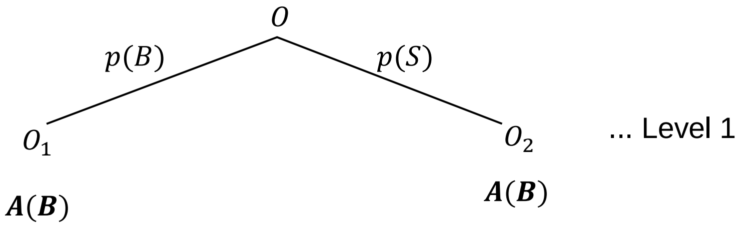
... Level 1

   <u>Level 1</u>

   Pada O_1 yaitu $A: (B \wedge q) \rightarrow \underbrace{(B \vee q)}_{B}$ $\therefore A(B)$.

   Pada O_2 yaitu : $\underbrace{(S \wedge q)}_{S} \rightarrow (S \vee q) \therefore A(B)$.

   KLP A pada O_1 dan O_2 telah dapat ditentukan nilai kebenarannya yaitu $A(B)$. Setelah melakukan pemeriksaan pada setiap interpretasi dari proposisi – proposisi pendukung KLP A, diperoleh nilai kebenaran KLP A adalah selalu benar B (benar). Jadi dapat ditentukan validitas KLP A adalah valid.



Strategi Pembalikan:

$A: (p \wedge q) \to (p \vee q)$.

Interpretasi 1

$A(S): (p \wedge q) \to (p \vee q)$.

$A_1: \underbrace{(p \wedge q)}_{B} \to \underbrace{(p \vee q)}_{S_*}$.

Berdasarkan A_1 dari S_* diperoleh p bernilai S (salah) dan q bernilai S. Selanjutnya didistribusikan nilai proposisi yang didapat dari A_1.

$A_2: (\underbrace{p}_{B_{*1}} \wedge \underbrace{q}_{B_{*2}}) \to (p \vee q)$.

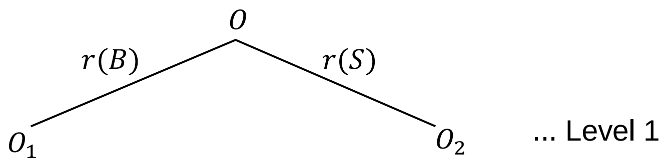
Berdasarkan A_2 dari B_{*1} diperoleh p bernilai B (benar). Dari B_{*2} diperoleh q bernilai B (benar). Hal ini terlihat bahwa terdapat proposisi p dan q tidak konsisten (p dan q bernilai B dan juga S) pada A_2. Jadi KLP A valid.

b. $\big((p \vee q) \oplus (r \wedge p)\big) \to {\sim} r$.

Penyelesaian:

Pohon Semantik:

$A: \big((p \vee q) \oplus (r \wedge p)\big) \to {\sim} r$ Dilakukan pencabangan O_1 dan O_2, dengan O_1 memberi interpretasi proposisi r dengan nilai B (benar) dan O_2 dengan nilai S (salah).

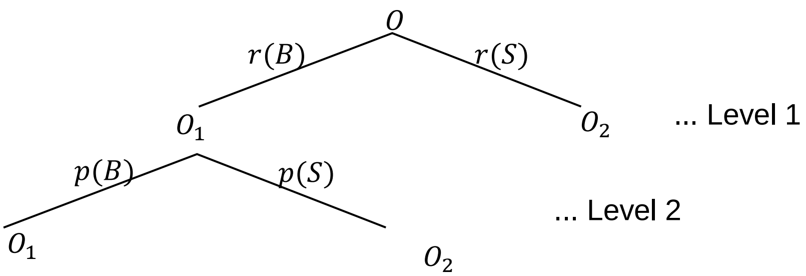


Level 1

Pada O_1 yaitu A: $\left((p \lor q) \oplus \underbrace{(S \land p)}_{S}\right) \to S \;\; \therefore A(?)$.

Pada O_2 yaitu : $\left((p \lor q) \oplus (B \land p)\right) \to B \therefore A(B)$.

KLP A pada O_2 telah dapat ditentukan nilai kebenarannya yaitu $A(B)$, sedangkan A pada O_1 belum dapat ditentukan nilai kebenarannya. Oleh karena itu, pada O_1 perlu dibuat percabangan dengan memberi interpretasi proposisi p dengan nilai B (benar) pada O_1 dan bernilai salah pada O_2.

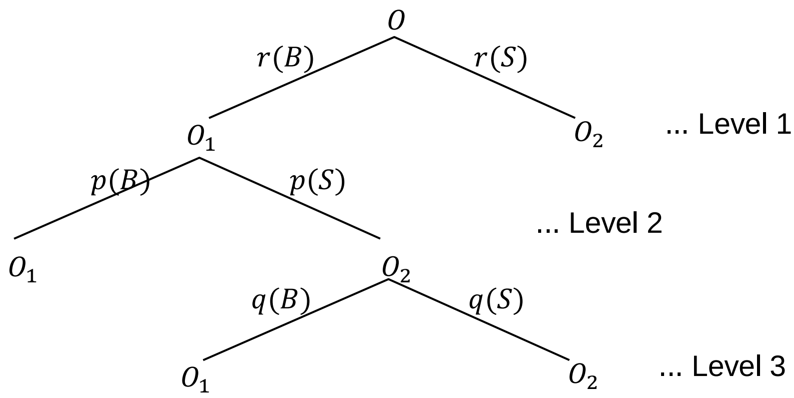


Level 2

Pada O_1 yaitu A: $\underbrace{\left(\underbrace{(B \lor q)}_{B} \oplus \underbrace{(S \land B)}_{S}\right)}_{B} \to S \;\; \therefore A(S)$.

Pada O_2 yaitu : $\left((S \lor q) \oplus \underbrace{(S \land S)}_{S}\right) \to S \therefore A(?)$.

KLP A pada O_1 telah dapat ditentukan nilai kebenarannya yaitu $A(S)$, sedangkan A pada O_2 belum dapat ditentukan nilai kebenarannya. Oleh karena itu, pada O_2 perlu dibuat percabangan dengan memberi interpretasi proposisi q dengan nilai B (benar) pada O_1 dan bernilai salah pada O_2.

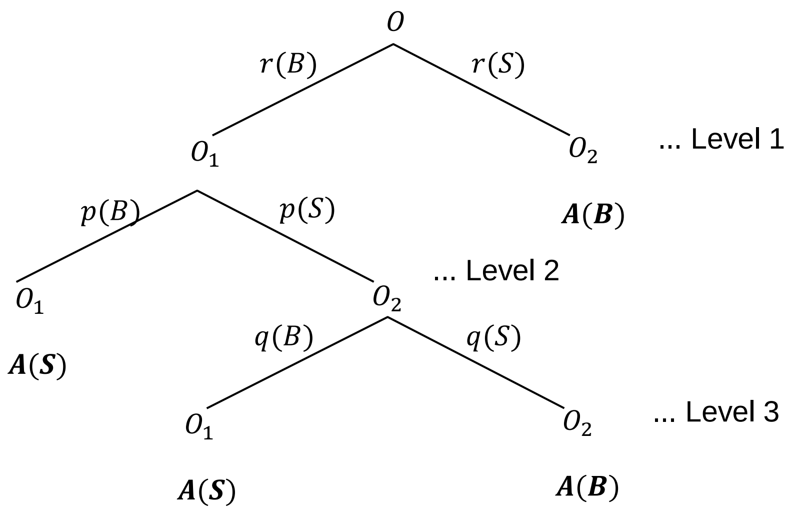


Level 3

Pada O_1 yaitu A: $\underbrace{\left(\underbrace{(S \vee B)}_{B} \oplus \underbrace{(S \wedge S)}_{S}\right)}_{B} \rightarrow S \;\therefore A(S)$.

Pada O_2 yaitu : $\underbrace{\left(\underbrace{(S \vee S)}_{S} \oplus \underbrace{(S \wedge S)}_{S}\right)}_{S} \rightarrow S \therefore A(B)$.

KLP A pada O_1 dan O_2 telah dapat ditentukan nilai kebenarannya yaitu $A(S)$ pada O_1 dan $A(B)$ pada O_2. Setelah melakukan pemeriksaan pada setiap interpretasi dari proposisi – proposisi pendukung KLP A, diperoleh nilai kebenaran KLP A adalah tidak selalu bernilai B (benar). Jadi dapat ditentukan validitas KLP A adalah kontingen.



Strategi Pembalikan:

A: $\left((p \vee q) \oplus (r \wedge p)\right) \rightarrow \sim r$.

Interpretasi 1

$A(S)$: $\left((p \vee q) \oplus (r \wedge p)\right) \rightarrow \sim r$.

A_1: $\underbrace{\left((p \vee q) \oplus (r \wedge p)\right)}_{B} \rightarrow \underbrace{\sim r}_{S_*}$.

Berdasarkan A_1 dari S_* diperoleh r bernilai B (benar). Selanjutnya didistribusikan nilai proposisi yang didapat dari A_1. Proposisi majemuk yang dihubungkan dengan operator $\oplus$ bernilai benar B (benar) maka proposisi pendukung harus bernilai berbeda, yaitu $B \oplus S$ atau $S \oplus B$. Maka pada A_2 akan dibuat alternatif a dan b.

Alternatif a. Yaitu $(B \oplus S)$.

A_{2a}: $\left(\underbrace{(p \vee q)}_{B_*} \oplus \underbrace{(r \wedge p)}_{S_*}\right) \rightarrow \sim r$.

Berdasarkan A_{2a} dari S_* diperoleh r bernilai B (benar) dan p bernilai S (salah). Dari B_* diperoleh p bernilai S (salah) dan q bernilai B (benar). Hal ini terlihat bahwa nilai kebenaran proposisi – proposisi pendukung konsisten. Pemeriksaan pada interpretasi pertama dapat berhenti di sini dengan kesimpulan sementara KLP A tersebut invalid. Dalam menentukan bahwa KLP A kontradiksi atau kontingen maka perlu dilakukan interpretasi kedua.

Interpretasi 2

$A(B)$: $\left((p \vee q) \oplus (r \wedge p)\right) \rightarrow \sim r$.

Proposisi majemuk yang dihubungkan operator $\rightarrow$ bernilai B (benar), maka terdapat 3 alternatif, yaitu $B \rightarrow B, S \rightarrow B$, dan $S \rightarrow S$. Maka A_2 akan diperiksa dalam alternatif a, b, dan c.

Alternatif a. $(B \rightarrow B)$.

A_{2a}: $\underbrace{\left((p \vee q) \oplus (r \wedge p)\right)}_{B} \rightarrow \underbrace{\sim r}_{B_*}$.

Berdasarkan A_{2a} dari B_* diperoleh r bernilai S (salah). Proposisi majemuk yang dihubungkan dengan operator $\oplus$ bernilai B (benar) maka proposisi pendukung harus bernilai berbeda, yaitu $B \oplus S$ atau $S \oplus B$. Maka pada A_{2a} akan dibuat alternatif a dan b.

<u>Alternatif aa. Yaitu $(B \oplus S)$.</u>

$$A_{2aa}: \left(\underbrace{(p \vee q)}_{B_*} \oplus \underbrace{(r \wedge p)}_{S_*} \right) \rightarrow \sim r.$$

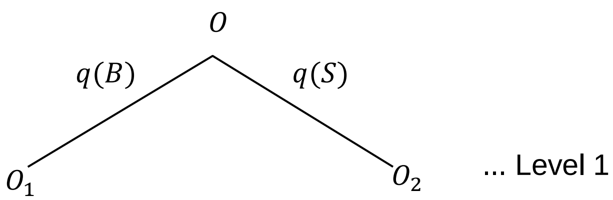
Berdasarkan A_{2aa} dari S_* diperoleh r bernilai S (salah) dan p dapat bernilai B (benar) atau S (salah), Dari B_*, diperoleh jika p bernilai B(benar) maka q dapat bernilai B atau S, tetapi jika p bernilai S (salah) maka q bernilai B. Ternyata terdapat nilai kebenaran proposisi – proposisi pendukung KLP konsisten. Jadi KLP A tersebut invalid kontingen.

c. $\big((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)\big) \wedge \sim(p \rightarrow q)$.

Penyelesaian:

<u>Pohon Semantik:</u>

$A: \big((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)\big) \wedge \sim(p \rightarrow q)$ Dilakukan pencabangan O_1 dan O_2, dengan O_1 memberi interpretasi proposisi q dengan nilai B (benar) dan O_2 dengan nilai S (salah).

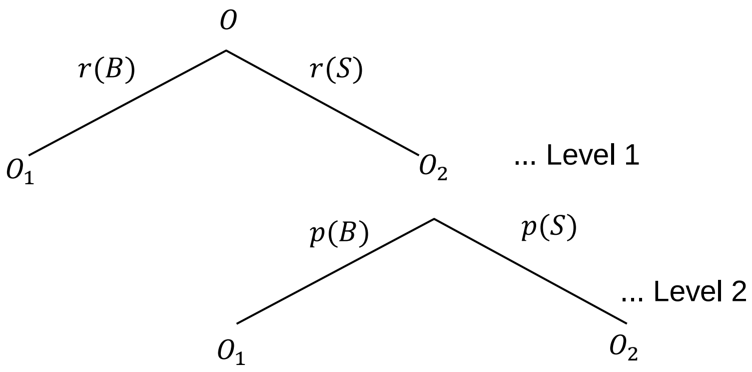


<u>Level 1</u>

Pada O_1 yaitu $A: \left(\underbrace{(p \rightarrow B)}_{B} \wedge (B \rightarrow r) \right) \wedge \underbrace{\sim(p \rightarrow B)}_{S} \therefore A(S)$

Pada O_2 yaitu $A: \left((p \rightarrow S) \wedge \underbrace{(S \rightarrow r)}_{B} \right) \wedge \sim(p \rightarrow S) \therefore A(?)$

KLP A pada O_1 telah dapat ditentukan nilai kebenarannya yaitu $A(S)$, sedangkan A pada O_2 belum dapat ditentukan nilai kebenarannya. Oleh karena itu, pada O_2 perlu dibuat percabangan dengan memberi interpretasi proposisi p dengan nilai B (benar) pada O_1 dan bernilai salah pada O_2.

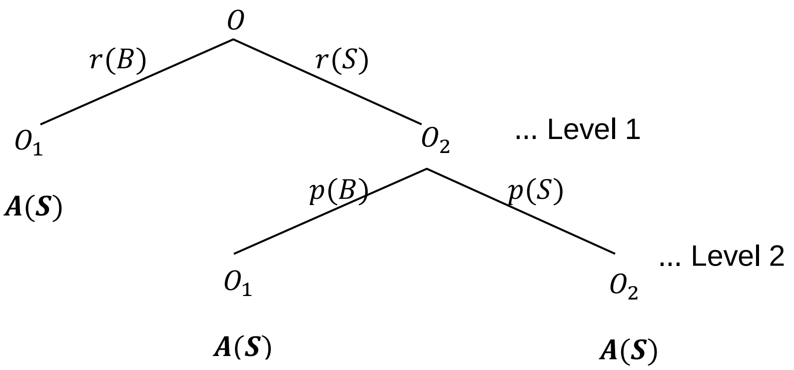


Level 2

Pada O_1 yaitu A: $\underbrace{\left(\underbrace{(B \to S)}_{B} \wedge \underbrace{(S \to r)}_{S}\right)}_{B} \wedge \sim \underbrace{(B \to S)}_{B} \ \therefore A(S)$.

Pada O_2 yaitu : $\underbrace{\left(\underbrace{(S \to S)}_{B} \wedge \underbrace{(S \to r)}_{B}\right)}_{B} \wedge \sim \underbrace{(S \to S)}_{B} \therefore A(S)$.

KLP A pada O_1 dan O_2 telah dapat ditentukan nilai kebenarannya yaitu $A(S)$. Setelah melakukan pemeriksaan pada setiap interpretasi dari proposisi – proposisi pendukung KLP A, diperoleh nilai kebenaran KLP A adalah tidak selalu bernilai S (salah). Jadi dapat ditentukan validitas KLP A adalah invalid kontradiksi.



9. Buktikan dengan metode deduksi, validitas argument dari “jika mahasiswa rajin belajar, maka ia menjadi pintar. Jika menjadi mahasiswa bodoh, maka masa depannya tidak cerah. Mahasiswa rajin belajar atau menjadi mahasiswa bodoh. Jadi, mahasiswa harus menjadi pintar atau mempunyai masa depan yang tidak cerah!

   Penyelesaian:

   Jika <u>mahasiswa rajin belajar</u>, **maka** <u>ia menjadi pintar.</u>

   p $\qquad\qquad$ q

   Jika <u>menjadi mahasiswa bodoh</u>, **maka** <u>masa depannya tidak cerah</u>.

   $\sim q$ $\qquad\qquad$ $\sim r$

   <u>Mahasiswa rajin belajar</u> **atau** <u>menjadi mahasiswa bodoh.</u>

   p $\qquad\qquad$ $\sim q$

   Jadi, <u>mahasiswa harus menjadi pintar</u> **atau** <u>mempunyai masa depan yang tidak cerah</u>.

   p $\qquad\qquad$ $\sim q$

   Misalkan dilambangkan:

   $p \rightarrow q$

   $\sim q \rightarrow \sim r$

   $p \vee \sim q$

   $\therefore q \vee \sim r$

   Dengan metode deduksi dinyatakan:

   a. $p \rightarrow q$ premis 1 (diketahui)

   b. $\sim q \rightarrow \sim r$ premis 2 (diketahui)

c. $p \vee \sim q$ premis 3 (diketahui)

d. $\sim p \rightarrow \sim q$ premis 4 (ekuivalensi dari premis 3)

e. $q \rightarrow p$ premis 5 (ekuivalensi dari premis 4)

f. $r \rightarrow q$ premis 6 (ekuivalensi dari premis 2)

g. $r \rightarrow p$ premis 7 (premis 5 dan 6 menggunakan silogisme)

h. $r \rightarrow q$ premis 8 (premis 1 dan 7 menggunakan silogisme)

i. $\sim q \rightarrow \sim r$ premis 9 (ekuivalensi dari premis 8)

j. $q \vee \sim r$ konklusi (ekuivalensi dari premis 9)

Jadi KLP valid

10. a. Tentukan nilai kebenaran dan negasi dari $\forall_x \exists_y \left(\frac{y}{x} = 3\right)$!

Penyelesaian:

Bernilai salah karena tidak benar bahwa setiap nilai $x \in \mathbb{R}$ memenuhi $\frac{y}{x} = 3,$, untuk suatu $y \in \mathbb{R}$. Contohnya untuk $x = 0$ tidak ada $y \in \mathbb{R}$ yang memenuhi $\frac{y}{x} = 3$. Negasinya adalah $\exists_x \forall_y \left(\frac{y}{x}\right) = 3$

b. $S(x, y)$ merupakan pernyataan "x menyayangi y",jika x dan y merupakan himpunan seluruh manusia di dunia, ekspresikan pernyataan "tidak ada orang yang menyayangi setiap orang" ke dalam bentuk logika predikat!

Penyelesaian:

$\sim\left(\exists_x \forall_y \big(S(x, y)\big)\right)$

G. Rangkuman Bab 1

1. Logika merupakan salah satu bidang ilmu yang mengkaji prinsip – prinsip penalaran yang benar dan penarikan kesimpulan yang sah.
2. Ada dua tipe penalaran dalam matematika, yaitu penalaran deduktif dan penalaran induktif.
3. Proposisi adalah pernyataan yang bernilai benar atau bernilai salah, tetapi tidak sekaligus bernilai kedua – duanya.
4. Proposisi juga dapat dikatakan kalimat tertutup.

5. Pernyataan yang dapat diubah menjadi proposisi dengan mengganti variabel dengan suatu nilai, kita sebut kalimat terbuka.
6. Negasi suatu proposisi adalah suatu proposisi yang bernilai salah apabila proposisi semula bernilai benar, dan bernilai benar apabila proposisi semula bernilai salah. Notasi “~” dapat dibaca “tidak”, “bukan”, “tidak benar”.
7. Proposisi majemuk terbentuk dari dua atau lebih proposisi yang dihubungkan dengan kata penghubung/perangkat logika.
8. Proposisi – proposisi yang dirangkai dalam proposisi majemuk disebut proposisi tunggal.
9. Contoh Kata penghubung adalah “dan”, “atau”, “jika … maka …” dan “… jika dan hanya jika …”.
10. Nilai Kebenaran dari masing – masing kata penghubung

<table>
<tr><th rowspan="2">Proposisi Majemuk</th><th rowspan="2">Lambang</th><th rowspan="2">Kata Penghubung</th><th colspan="2">Nilai Kebenaran yang Hasilnya Salah (S)</th></tr>
<tr><th>p</th><th>q</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Konjungsi</td><td rowspan="3">$\wedge$</td><td rowspan="3">Dan, Tetapi, Meskipun</td><td>B</td><td>S</td></tr>
<tr><td>S</td><td>B</td></tr>
<tr><td>S</td><td>S</td></tr>
<tr><td>Disjungsi (Inklusif)</td><td>$\vee$</td><td>Atau, Ataupun</td><td>S</td><td>S</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Disjungsi (Eksklusif)</td><td rowspan="2">$\oplus$</td><td rowspan="2">Atau</td><td>B</td><td>B</td></tr>
<tr><td>S</td><td>S</td></tr>
<tr><td>Implikasi</td><td>$\rightarrow$</td><td>Jika … maka
… Akibatnya …</td><td>B</td><td>S</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Biimplikasi</td><td rowspan="2">$\leftrightarrow$</td><td rowspan="2">… Jika dan hanya jika …</td><td>B</td><td>S</td></tr>
<tr><td>S</td><td>B</td></tr>
</table>

11. Jika diketahui $p \rightarrow q$ maka:

    a. konversnya adalah $q \rightarrow p$

    b. inversnya adalah $\sim p \rightarrow \sim q$

    c. kontrapositifnya adalah $\sim q \rightarrow \sim p$
12. Ekuivalen dari $p \rightarrow q$ adalah $\sim q \rightarrow \sim p$ dan $\sim p \vee q$
13. Ada dua jenis kuantor, yaitu kuantor universal (kuantor umum) dan kuantor eksistensial (kuantor khusus).

14. Kuantor universal memiliki lambang $(\forall_x)$ dibaca "untuk semua x berlaku" atau "untuk setiap x berlaku".
15. Kuantor eksistensial memiliki lambang $(\exists_x)$ dibaca "terdapat suatu x berlaku". Misalkan $P(x)$ adalah suatu kalimat terbuka, maka pernyataan dibaca "terdapat suatu x berlaku $P(x)$".

Tes Formatif 1

1. Tentukan mana yang merupakan kalimat terbuka, proposisi yang bernilai benar dan proposisi yang bernilai salah!
   a. Rajin pangkal pandai.
   b. Setiap bilangan riil pasti bilangan bulat
   c. $3x \leq 9$ dengan $x = 3$
   d. Seorang itu adalah dosen matematika
   e. $2x + y = 7$
2. Buat negasi/ingkaran dari proposisi – proposisi pada no (1)!
3. Diketahui proposisi –proposisi berikut.

   p: Saya masuk ke ruangan perpustakaan

   q: Saya mencari buku matematika dasar

   r: Saya meminjam buku di perpustakaan

   a. Ekspresikan dalam lambang logika proposisi majemuk "Saya tidak masuk ke ruangan perpustakaan tetapi saya ingin mencari buku matematika dasar. Jadi saya harus masuk ke ruangan perpustakaan"!
   b. Ekspresikan dalam kalimat $\big((p \wedge q) \wedge\sim r\big) \vee (p \wedge q) \wedge r)$!
   c. Tentukan nilai kebenaran dari proposisi – proposisi majemuk yang dibentuk dari soal no. (3a), jika p dan r bernilai B (benar) serta q bernilai S (salah)!
   d. Tunjukkan dengan tabel kebenaran dari $\big((p \wedge q) \wedge\sim r\big) \vee (p \wedge q) \wedge r)$
   e. Tentukan apakah proposisi $\big((p \wedge q) \wedge\sim r\big) \vee (p \wedge q) \wedge r)$ termasuk tautologi, kontradiksi, atau kontingen! (Gunakan tabel kebenaran/pohon semantik/strategi pembalikan/deduksi)
4. a. Tentukan nilai kebenaran dan negasi dari $\exists_x(|x - 2| \leq 3)$!

   b. Tulis "semua mahasiswa tidak lulus ujian" dalam bentuk simbolik!

Cocokanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat dibagian akhir bab ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi logika.

$$\text{Tingkat penguasaan } (x) = \frac{\text{Jumlah jawaban yang benar}}{\text{Jumlah pertanyaan}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan :

$100\% \leq x < 90\%$ baik sekali

$90\% \leq x < 80\%$ baik

$80\% \leq x \leq 70\%$ cukup

$x < 70\%$ kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan materi bab 2. Jika masih di bawah 80% Anda harus mengulangi materi bab 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif 1

1. a. Proposisi bernilai benar.
   b. Proposisi bernilai salah.
   c. Proposisi bernilai benar.
   d. Kalimat terbuka.
   e. Kalimat terbuka.
2. a. Rajin bukan pangkal pandai.
   b. Terdapat bilangan riil yang bukan bilangan bulat.
   c. $3x > 9$ dengan $x = 3$.
3. a. $(\sim p \wedge q) \rightarrow q$.
   b. Saya masuk ke ruangan perpustakaan dan mencari buku matematika dasar tetapi tidak meminjam buku di perpustakaan atau saya masuk ke ruangan perpustakaan dan mencari buku matematika dasar dan meminjam buku di perpustakaan.
   c. Benar.
   d. Misalkan:

   $\sim p \wedge q = A$

   $A \wedge \sim r = C$

   $A \wedge r = D$

   $C \vee D = E$

   Perhatikan tabel kebenaran berikut.

p	q	r	$\sim r$	A	C	D	E
B	B	B	S	B	S	B	B
B	B	S	B	B	B	S	B
B	S	B	S	S	S	S	S
B	S	S	B	S	S	S	S
S	B	B	S	S	S	S	S
S	B	S	B	S	S	S	S
S	S	B	S	S	S	S	S

p	q	r	$\sim r$	A	C	D	E
S	S	S	B	S	S	S	S

e. Perhatikan kolom E memiliki nilai kebenaran Benar dan salah maka termasuk kontingen.

4. a. Bernilai benar. Negasi $\forall_x(|x-2|>3)$.
   b. $\forall_x\big(P(x) \rightarrow\sim Q(x)\big)$.

BAB 2

Himpunan

Dalam bab ini, akan membahas mengenai himpunan yang mencakup materi – materi bahasan sebagai berikut:

1. Konsep dasar Himpunan.
2. Hubungan Dua Himpunan.
3. Operasi Pada Himpunan.
4. Sifat dan Implementasi Himpunan.

Penulis berharap bagi pembaca yang telah mempelajari bab ini, secara umum diharapkan dapat menjelaskan konsep – konsep dan prinsip – prinsip dari himpunan serta dapat mengaplikasikannya dalam kehidupan sehari – hari. Adapun capaian pembelajaran mata kuliah (CPMK) pada bab ini sebagai berikut.

1. Menyatakan suatu himpunan ke bentuk deskriptif dan terdaftar, mengidentifikasi bentuk dan jenis-jenis himpunan, menentukan kesamaan dan hubungan antar himpunan, serta menggambarkan himpunan dalam suatu diagram.
2. Memahami operasi dan sifat-sifat himpunan.
3. Membuktikan kalimat himpunan serta mengimplementasikan permasalahan himpunan pada dunia nyata.

Berdasarkan CPMK yang telah dirancang, selanjutnya berikut merupakan sub – CPMK yang telah dirancang.

1. Mengidentifikasi bentuk dan jenis himpunan.
2. Menentukan kesamaan dan hubungan antar himpunan.

3. Menggambarkan himpunan dalam bentuk diagram.
4. Menentukan himpunan kuasa antar himpunan.
5. Membentuk rumusan dan hubungan antar himpunan dari bentuk-bentuk operasi himpunan.
6. Mengidentifikasi sifat himpunan.
7. Membuktikan sifat dan pernyataan pada himpunan.
8. Menerapkan ilmu himpunan dalam kasus realitas.

Adapun hubungan materi himpunan dengan surat di Al Qur'an, yaitu pada surat An Nuur ayat 45 yang berbunyi,

وَٱللَّهُ خَلَقَ كُلَّ دَآبَّةٍ مِّن مَّآءٍ ۖ فَمِنْهُم مَّن يَمْشِى عَلَىٰ بَطْنِهِۦ وَمِنْهُم مَّن يَمْشِى عَلَىٰ رِجْلَيْنِ وَمِنْهُم مَّن يَمْشِى عَلَىٰٓ أَرْبَعٍ ۚ يَخْلُقُ ٱللَّهُ مَا يَشَآءُ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَىْءٍ قَدِيرٌ ﴿٤٥﴾

Artinya: Dan Allah Telah menciptakan semua jenis hewan dari air, Maka sebagian dari hewan itu ada yang berjalan di atas perutnya dan sebagian berjalan dengan dua kaki sedang sebagian (yang lain) berjalan dengan empat kaki. Allah menciptakan apa yang dikehendaki-Nya, Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu. (QS. An Nuur, 24:45).

Teori himpunan yang baru diciptakan pada akhir abad ke-19 oleh *Georg Cantor*, sekarang merupakan bagian yang tersebar dalam pendidikan Matematika yang mulai diperkenalkan bahkan sejak tingkat sekolah dasar. Teori himpunan dapat dianggap sebagai dasar yang membangun hampir semua aspek dari matematika dan merupakan sumber dari mana semua matematika diturunkan. Himpunan merupakan salah satu konsep penting dan mendasar dalam Matematika modern dan karenanya studi struktur kemungkinan himpunan dan teori himpunan sangatlah berguna.

A. Konsep Dasar Himpunan

Himpunan adalah sekumpulan objek-objek yang didefinisikan dengan jelas, yaitu yang berdasarkan sifat atau keadaan yang sama atau berdasarkan suatu aturan tertentu. Objek – objek dari himpunan yang dimaksud adalah suatu objek yang dapat ditentukan dengan pasti termasuk dalam himpunan tersebut atau tidak termasuk dalam himpunan tersebut. Objek-objek yang termasuk dalam himpunan itu disebut elemen atau anggota.

Math Info

Geogr Cantor (1845 – 1918) *merupakan matematikawan asal jerman keturunan Yahudi. Ia adalah orang pertama yang menemukan teori himpunan.*

<u>Contoh 2.1</u>

1. Himpunan Negara ASEAN.
2. Himpunan tas bagus .
3. Himpunan mahasiswa Matematika.
4. Himpunan kelas besar.
5. Himpunan pensil mahal.
6. Himpunan dosen Matematika.
7. Himpunan makanan manis.

Berdasarkan contoh 2.1 yang merupakan himpunan adalah poin nomor (1), (3), dan (6). Karena himpunan ini objeknya terdefinisi dengan jelas, sedangkan untuk poin (2), (4), (5), dan (7) himpunan ini objeknya tidak terdefinisi dengan jelas. Pada poin (2), (4), (5), dan (7) dapat dikatakan himpunan apabila keterangan tersebut didefinisikan, seperti tas bagus. Apabila istilah bagus didefinisikan maka himpunan tas bagus dapat dijadikan suatu himpunan.

Pada umumnya, notasi himpunan dilambangkan dengan huruf kapital, seperti $A, B, C, \ldots, X, Y, \ldots$. Namun untuk notasi anggota dilambangkan dengan huruf kecil, seperti $a, b, \ldots$, $x, y, \ldots$. Notasi "$a \in A$" dibaca "a adalah anggota dari A" dan "$c \notin B$" dibaca "c bukan anggota dari B".

Contoh 2.2

1. Misalkan himpunan $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Perhatikan pada himpunan A tersebut, diperoleh bahwa $a \in \mathbb{R}$, yang artinya a anggota dari himpunan A, sedangkan $g \notin A$ yang artinya g bukan anggota dari A.
2. Misalkan B merupakan himpunan bilangan prima, maka $2 \in B$ tetapi $9 \notin B$.
3. Misalkan C adalah nama bulan yang diawali dengan huruf J, yang artinya Juli merupakan anggota dari himpunan C, tetapi April bukan anggota dari himpunan C.

Himpunan dapat juga beranggotakan himpunan – himpunan. Himpunan seperti itu biasanya disebut keluarga/koleksi dari himpunan – himpunan. Misalnya himpunan dari himpunan mahasiswa matematika Se-Jakarta. Himpunan ini merupakan himpunan yang anggota – anggotanya adalah himpunan mahasiswa matematika yang mewakili masing – masing kampus di daerah Jakarta.

Dalam menyatakan suatu himpunan dapat dinyatakan dengan 3 cara, yaitu:

1. Cara Daftar

Cara daftar adalah menyatakan himpunan dengan cara mendaftar atau menuliskan anggota – anggota himpunan tersebut di antara kurung kurawal buka ({) dan kurung kurawal tutup (}) dan setiap dua anggota dipisahkan dengan tanda koma.

Contoh 2.3

a. $A = \{2, 4, 6, 8\}$.
b. $B = \{1, 3, 5, 7\}$.
c. $C = \{2, 5, 7, 11\}$.

2. Notasi Pembentuk Himpunan

Notasi pembentuk himpunan adalah menyatakan himpunan dengan cara menuliskan suatu variabel (peubah) dan syarat mengenai anggota himpunan serta tanda garis tegak di antara peubah dan syarat keanggotaannya, anggota – anggota himpunan tersebut ditulis di antara kurung kurawal buka ({) dan kurung kurawal tutup (}).

Contoh 2.4

a. $A = \{x | x < 10,\ x \in$ bilangan genap $\}$.
b. $B = \{x | x \leq 7,\ x \in$ bilangan ganjil $\}$.
c. $C = \{x | x \leq 12,\ x \in$ bilangan prima $\}$.

3. Menyatakan Sifat yang dimiliki Anggotanya

Menyatakan sifat yang dimiliki adalah menyatakan himpunan dengan cara mendefinisikan sifat – sifat yang dimiliki oleh anggota –anggota tersebut.

Contoh 2.5

a. $A =$ himpunan bilangan genap kurang dari 10.

b. $B =$ himpunan bilangan ganjil kurang dari sama dengan 7.

c. $C =$ himpunan bilangan prima kurang dari sama dengan 12.

Setelah mempelajari pembahasan mengenai penulisan suatu himpunan, selanjutnya kita pelajari jenis – jenis suatu himpunan sebagai berikut.

1. Himpunan Berhingga

Himpunan berhingga adalah suatu himpunan yang banyak anggotanya terbatas (berhingga).

<u>Contoh 2.6</u>

a. $P =$ {Jakarta, Bandung, Semarang, Serang, Surabaya, Yogyakarta}.

b. Himpunan manusia yang hidup di bumi.

c. $F = \{x|3x < 9, x$ bilangan asli $\}$.

2. Himpunan Tak Berhingga

Himpunan tak berhingga adalah suatu himpunan yang banyak anggotanya tak terbatas (tak berhingga).

<u>Contoh 2.7</u>

a. $Q = \{2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$.

b. $H = \{x|3x < 9, x$ bilangan riil $\}$.

c. Himpunan bilangan bulat genap.

3. Himpunan Kosong

Himpunan kosong merupakan himpunan yang tidak mempunyai anggota. Himpunan kosong dilambangkan dengan $\emptyset$ atau $\{\ \}$.

<u>Contoh 2.8</u>

a. Himpunan bilangan asli kurang dari 0.

b. Himpunan nama – nama bulan yang diawali dengan huruf Z.

c. $F = \{x|3x < -9, x$ bilangan asli$\}$.

4. **Himpunan Semesta (Universal)**

Himpunan semesta adalah himpunan dari semua anggota yang sedang dibicarakan. Himpunan semesta atau semesta pembicaraan biasanya diberi lambang S atau U mengandung semua anggota himpunan yang dibicarakan atau diperhatikan. Misalkan himpunan S disebut himpunan semesta dari himpunan A jika setiap anggota yang ada di A terdapat dalam S.

__**Contoh 2.9**__ Misalkan himpunan $A = \{$ mangga, anggur, apel$\}$. Himpunan semesta yang dapat diambil yaitu nama buah yang ada di negara Indonesia. Perlu diketahui bahwa ***himpunan semesta ini jelas tidak hanya satu***. Contoh himpunan semesta untuk A yang lainnya adalah himpunan makanan manusia.

5. **Himpunan Komplemen**

Misalkan himpunan S adalah himpunan semesta. Himpunan yang merupakan anggota S tetapi bukan anggota A disebut komplemen A terhadap S. Himpunan komplemen dari A ditulis A' atau A^c.

__**Contoh 2.10**__ Misalkan himpunan $S = \{x|0 \leq x \leq 12, x$ bilangan asli$\}$. Jika himpunan $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ maka himpunan $A' = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

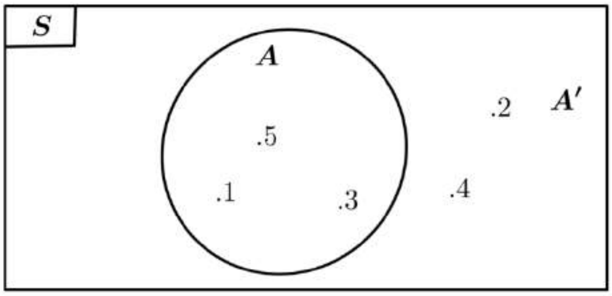
B. Hubungan Dua Himpunan

Tiap dua himpunan mempunyai hubungan. Dalam menggambarkan hubungan antara himpunan – himpunan dapat digunakan diagram Venn. Diagram Venn adalah menyatakan himpunan dinyatakan dengan daerah kurva tertutup sedangkan semesta (semua anggota himpunan) sebagai daerah empat persegi panjang dan anggota himpunan dinyatakan dengan noktah – noktah di dalamnya.

Math Info

John Venn (1834 – 1923) merupakan matematikawan asal Inggris. Ia menemukan diagram Venn. Dengan menggunakan diagram Venn ini, relasi antar himpunan menjadi lebih mudah dipahami.

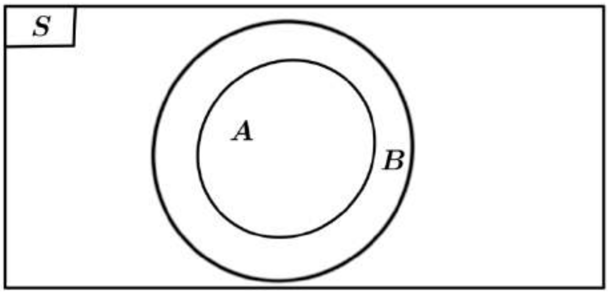
<u>Contoh 2.11</u> Diketahui himpunan semesta $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $A = \{1, 3, 5\}$. Kita dapat tentukan komplemen himpunan A terhadap S, yaitu $A' = \{2, 4\}$. Kemudian gambarkan diagram Venn nya sebagai berikut.



1. Himpunan Bagian

Himpunan bagian ada dua jenis, yaitu himpunan bagian dan himpunan bagian sejati. Himpunan A adalah himpunan bagian dari himpunan B jika dan hanya jika setiap anggota himpunan A merupakan anggota himpunan dari B. Atau dapat ditulis sebagai $A \subseteq B$ jika dan hanya jika $\forall_x x \in A \rightarrow x \in B$.

Sedangkan himpunan A adalah himpunan bagian sejati dari himpunan B jika dan hanya jika setiap anggota himpunan A merupakan anggota himpunan dari B dan ada anggota himpunan B yang bukan merupakan anggota himpunan A. Atau dapat ditulis sebagai $A \subset B$ jika dan hanya jika $\forall_x (x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists_y \ (y \in B \wedge y \notin A)$.



Gambar 2.1 Himpunan A Bagian Sejati dari Himpunan B

Contoh 2.12

a. $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$.

b. $B = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$.

c. $C = \{3, 5\}$.

d. $D =$ Himpunan bilangan prima kurang dari 12.

e. $E =$ Himpunan bilangan ganjil di antara 1 dan 16.

f. $\{\,\}$.

Berdasarkan contoh 2.12 diperoleh $C \subset A$ dan $C \subset B$, karena setiap anggota himpunan C merupakan anggota A dan ada anggota di A yang bukan merupakan anggota di C serta setiap anggota himpunan C merupakan anggota B dan ada anggota di B yang bukan merupakan anggota di C. Selain itu, diperoleh pula $A \subseteq D$ dan $B \subseteq E$, karena setiap anggota himpunan A merupakan anggota himpunan D dan setiap anggota B merupakan anggota himpunan E. Perhatikan untuk himpunan kosong $\{\,\}$ merupakan himpunan bagian dari setiap himpunan.

Diagram garis dapat digunakan dalam menyatakan hubungan antar himpunan dengan sebuah garis. Adapun aturan menggambar diagram garis yang dapat dilihat sebagai berikut.

a. Jika A merupakan himpunan bagian B maka digambar garis langsung dari A ke B.

b. Jika A merupakan himpunan bagian B, dan B himpunan C maka A dan C tidak perlu digambar garis langsung.

c. Walaupun A himpunan bagian A kita tidak perlu menggambar garis langsung dari A ke A.

Contoh 2.13

Misalkan

$S = \{x|x$ bilangan bulat$\}$,

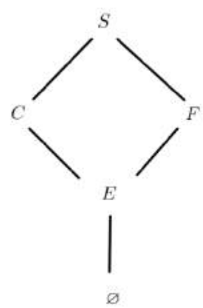
$C = \{x|2x, x$ bilangan asli$\}$,

$D = \{x|x$ bilangan asli genap$\}$,

$E = \{2, 4, 6, 8, 10\}$,

$F = \{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$.

Maka $C \subseteq D$, $D \subseteq C, E \subset C, E \subset D, E \subset F, F \not\subset C, F \not\subset D$. Diagram garisnya adalah :



Berdasarkan contoh 2.12 poin (c) kita dapat menentukan himpunan bagian dari himpunan $C = \{3, 5\}$. Himpunan dari semua himpunan bagian dari C adalah himpunan kuasa C (*power set of* C) dan dilambangkan dengan 2^C. Sehingga $2^C = \{X|X \subset C\}$.

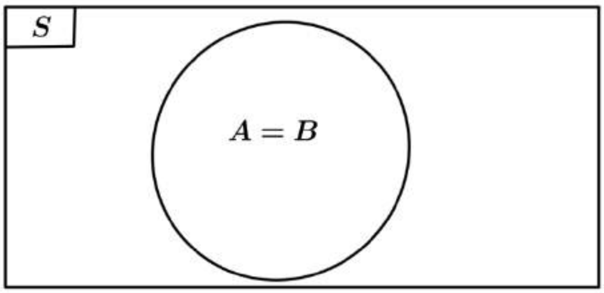
Banyaknya anggota suatu himpunan yang berbeda disebut kardinalitas himpunan. Himpunan C memuat 2 anggota yang berbeda maka disebut banyak anggota himpunan C adalah 2 atau kardinalitas himpunan C adalah 2, dan dilambangkan $n(C) = 2$. Karena himpunan C merupakan himpunan berhingga maka kita dapat menggunakan cara mudah untuk menentukan banyaknya himpunan bagian dari himpunan C adalah 2^n dimana n adalah banyaknya anggota himpunan C.

Contoh 2.14 Misalkan $C = \{3, 5\}$ maka 2^C adalah $2^C = \{\emptyset, \{3\}, \{5\}, \{3,5\}\}$.

Berdasarkan contoh 2.14 Banyaknya anggota himpunan C diberi lambang $n(C)$, banyaknya anggota himpunan 2^C diberi lambang $n(2^C)$. Sehingga jika $n(C) = 2$ maka $n(2^C) = 4$.

2. Kesamaan Dua Himpunan

Himpunan A dikatakan sama dengan himpunan B, jika dan hanya jika setiap anggota himpunan A merupakan anggota himpunan B dan setiap anggota himpunan B merupakan anggota himpunan B. Atau dapat ditulis sebagai $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$ atau $A = B$.



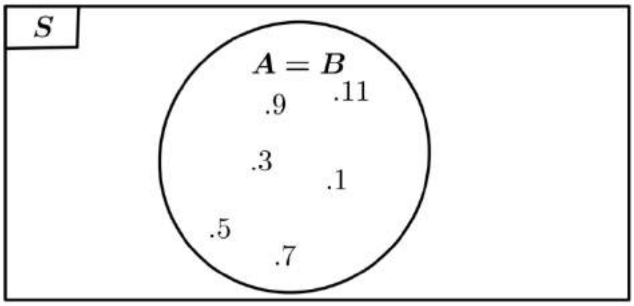
Gambar 2.2 Kesamaan Dua Himpunan

Contoh 2.15

Himpunan $= \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$.

Himpunan $B = \{x|0 < x < 12, x$ bilangan ganjil}.

Jika himpunan B ditulis dengan cara daftar maka B dapat ditulis sebagai $\mathrm{B} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$. Perhatikan bahwa setiap anggota himpunan A merupakan anggota himpunan B. Hal ini dapat ditulis sebagai $A = B$.



3. Himpunan Ekuivalen

Dua himpunan berhingga A dan B dengan $n(A) = n(B)$, yaitu banyaknya anggota himpunan A sama dengan banyaknya anggota himpunan B, maka dikatakan bahwa himpunan A ekuivalen dengan himpunan B . Atau dapat ditulis sebagai $A \cong B$. Sedangkan jika himpunan A tidak ekuivalen dengan himpunan B maka dapat ditulis sebagai $A \ncong B$.

Contoh 2.16

Misalkan:

Himpunan $A = \{1, 3, 11\}$

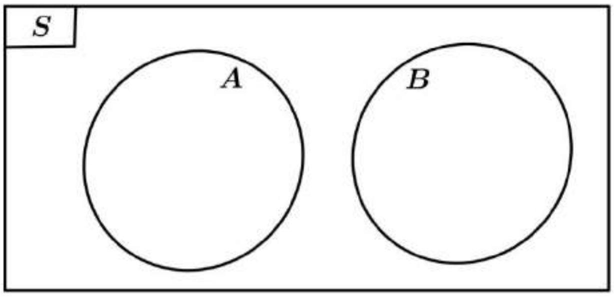
Himpunan $B = \{4, 5, 6\}$

Himpunan $C = \{0, 2, 3, 4\}$

Maka $A \cong B, A \ncong C$ dan $B \ncong C$

4. Himpunan Lepas

Dua himpunan yang tidak kosong A dan B dikatakan saling lepas/asing jika dua himpunan itu tidak mempunyai anggota persekutuan, atau setiap anggota himpunan A bukan anggota himpunan B dan setiap anggota himpunan B bukan anggota himpunan A. Atau dapat ditulis sebagai $A//B$ (dibaca A lepas B).



Gambar 2.3 Himpunan Lepas

Contoh 2.17

Misalkan

Himpunan $A = \{\, x|2x, x$ bilangan asli $\}$.

Himpunan $B = \{x|x$ bilangan ganjil$\}$.

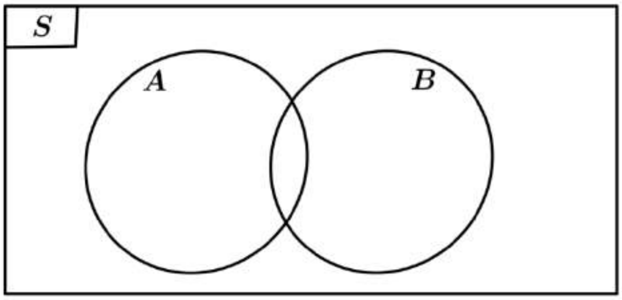
Himpunan $C = \{-3, -4, -5, -6\}$.

Himpunan $D = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}\right\}$.

Maka $A//B,\ A//C,\ A//D$, $B//C$, $B//D$, dan $C//D$.

5. Himpunan Tak Lepas

Dua himpunan yang tidak kosong A dan B dikatakan saling tak lepas jika dua himpunan itu mempunyai anggota persekutuan. Atau dapat ditulis sebagai $A \asymp B$ (dibaca A tak lepas B).



Gambar 2.4 Himpunan Tak Lepas

<u>Contoh 2.18</u>

Misalkan

Himpunan $\mathrm{A} = \{\, 1, 3, 5, 7, 9, 11\}$.

Himpunan $\mathrm{B} = \{2, 4, 5, 6, 8\}$.

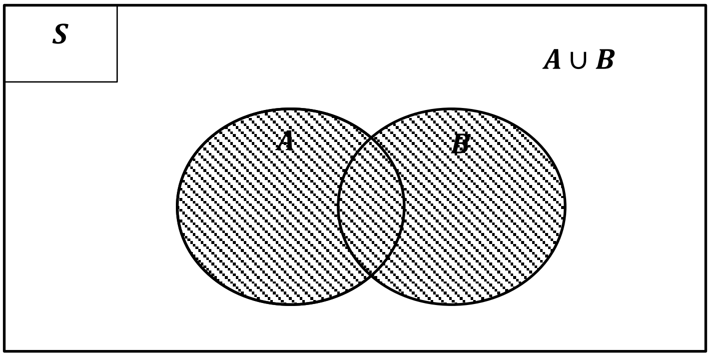
Karena ada anggota persekutuan antara himpunan A dan himpunan B, yaitu angka 5 maka $A \eqcirc B$.

C. Operasi Pada Himpunan

Jika diketahui dua himpunan atau lebih, kita dapat membentuk himpunan baru dengan mengoperasikan himpunan – himpunan yang diketahui tersebut. Operasi – operasi pada himpunan adalah gabungan, irisan, selisih, beda setangkup, produk kartesius.

1. Operasi Gabungan (∪)

Misalkan A dan B adalah suatu himpunan. Gabungan dua himpunan A dan B adalah himpunan dari setiap anggota himpunan A atau himpunan B. Gabungan dua himpunan A dan B dapat ditulis sebagai $A \cup B = \{x | x \in A$ atau $x \in B\}$. Diagram Venn $A \cup B$ dapat dilihat sebagai berikut.

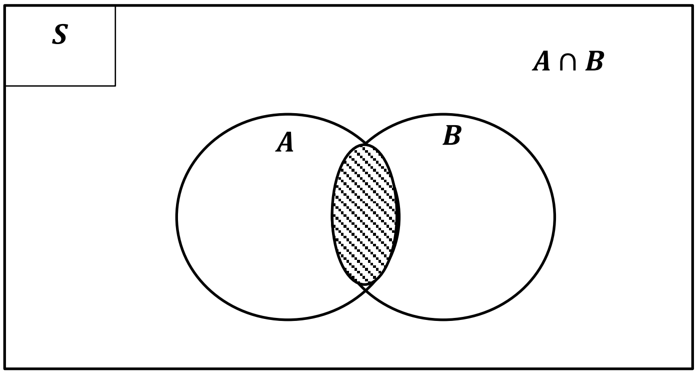


Gambar 2.5 Operasi Gabungan

Contoh 2.19 Misalkan $A = \{a, b\}$ dan $B = \{b, d, e, f\}$ maka $A \cup B = \{a, b, d, e, f\}$.

2. Operasi Irisan ($\cap$)

Misalkan A dan B adalah suatu himpunan. Irisan dua himpunan A dan B adalah himpunan yang terdiri dari semua unsur yang merupakan anggota dari himpunan A dan sekaligus juga merupakan anggota dari B. Irisan dua himpunan A dan B dapat ditulis sebagai $A \cap B = \{x | x \in A \text{ dan } x \in B\}$. Diagram Venn $A \cap B$ dapat dilihat sebagai berikut.

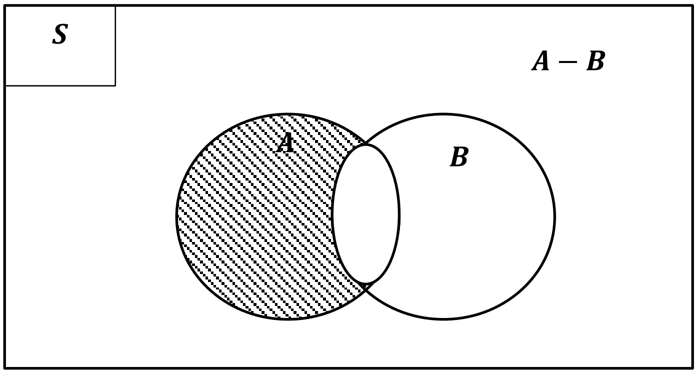


Gambar 2.6 Operasi Irisan

<u>Contoh 2.20</u> Misalkan $A = \{a, b\}$ dan $B = \{b, d, e, f\}$ maka $A \cap B = \{b\}$.

3. Operasi Selisih $(-)$

Misalkan A dan B adalah suatu himpunan. Selisih dua himpunan A dan B adalah himpunan yang terdiri dari semua anggota himpunan A tetapi tidak ada anggota di himpunan B. Atau dapat ditulis sebagai $A - B = \{x | x \in A \text{ dan } x \notin B\}$. Diagram Venn $A - B$ dapat dilihat sebagai berikut.

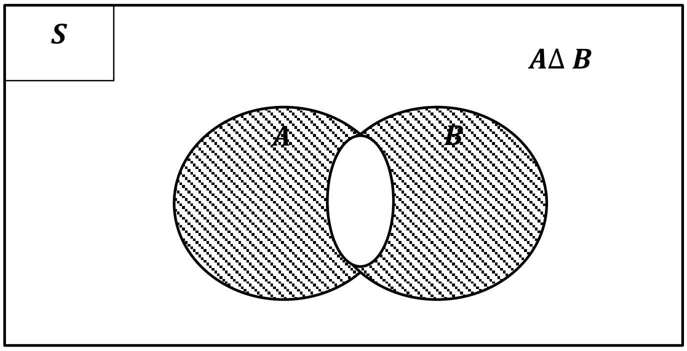


Gambar 2.7 Operasi Selisih

<u>Contoh 2.21</u> Misalkan $A = \{a, b\}$ dan $B = \{b, d, e, f\}$ maka $A - B = \{a\}$.

4. Operasi Beda Setangkup (Δ)

Misalkan A dan B adalah suatu himpunan. Beda setangkup dua himpunan A dan B adalah himpunan yang anggotanya merupakan anggota dari himpunan A atau himpunan B, tetapi bukan merupakan anggota dari irisan himpunan A dan B. Atau dapat ditulis sebagai $A\Delta B = \left\{x \middle| (x \in A \vee x \in B) \wedge \left(x \notin (A \cap B)\right)\right\}$. Diagram Venn $A\Delta B$ dapat dilihat sebagai berikut.



Gambar 2.8 Operasi Beda Setangkup

Contoh 2.22 Misalkan $A = \{a, b\}$ dan $B = \{b, d, e, f\}$ maka $A\Delta\, B = \{a, d, e, f\}$.

5. Produk Kartesius

Misalkan A dan B adalah dua himpunan yang tidak kosong, maka Produk Kartesius himpunan A dan himpunan B adalah himpunan semua pasangan terurut (x, y) dengan $x \in A$ dan $x \in B$. Produk Kartesius dari A dan B dapat ditulis sebagai $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ dan } y \in B\}$.

Contoh 2.23

Misalkan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{1, 2\}$ maka:

a. $A \times B = \{(a, 1), (1,2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$.
b. $B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$.

Perhatikan untuk $A \times B \neq B \times A$.

D. Sifat dan Implementasi Himpunan

Sifat – sifat himpunan serta bentuk - bentuknya dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 2.1
Sifat – Sifat Himpunan

NO	SIFAT	BENTUK
1	Idempoten	a. $A \cap A = A$ b. $A \cup A = A$
2	Identitas	a. $A \cap S = A$ b. $A \cup \emptyset = A$ c. $A\Delta\, \emptyset = A$
3	Dominasi	a. $A \cup S = S$ b. $A \cap \emptyset = \emptyset$ c. $A\Delta\, A = \emptyset$
4	Komplemen	a. $A \cup A' = S$ b. $A \cap A' = \emptyset$
5	Involusi	$(A')' = A$
6	Komutatif	a. $A \cup B = B \cup A$ b. $A \cap B = B \cap A$ c. $A\Delta\, B = B\Delta\, A$
7	Assosiatif	a. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ b. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ c. $A\Delta\, (B\Delta\, C) = (A\Delta\, B)\Delta C$
8	Distributif	a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
9	Dalil De Morgan	a. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ b. $(A \cap B)' = A' \cup B'$
10	Absorpsi	a. $(A \cap B) \cup A = A$ b. $(A \cup B) \cap A = A$

Pembuktian berlakunya sifat – sifat tersebut pada himpunan, kita dapat menggunakan cara, membuktikan bahwa himpunan hasil operasi pada ruas kiri merupakan himpunan bagian dari himpunan hasil pada ruas kanan dan sebaliknya.

Contoh 2.24 Pembuktian $\big(A' \cap (A \cup B)\big) \cup (A \cap B) = B$ dapat dilihat sebagai berikut.

$\left(A' \cap (A \cup B)\right) \cup (A \cap B)$ … ruas kiri

$\left((A' \cap A) \cup (A' \cap B)\right) \cup (A \cap B)$ … sifat distributif

$\left(\emptyset \cup \ (A' \cap B)\right) \cup (A \cap B)$ …sifat komplemen

$(A' \cap B) \cup (A \cap B)$ …sifat identitas

$(A' \cup A) \cap B$ …sifat distributif

$S \cap B$ …sifat komplemen

B … sifat identitas

Perhatikan terbukti bahwa $\left(A' \cap (A \cup B)\right) \cup (A \cap B) = B$.

Dalam menyelesaikan permasalahan himpunan pada kasus realitas maka perlu dipahami bagaimana mengkonversi kalimat sehari – hari ke dalam bentuk notasi himpunan dan menentukan jumlah anggota dari suatu himpunan yang ada.

1. Konversi Kalimat Ke Dalam Notasi Himpunan

Dalam mengkonversi kalimat (bentuk himpunan) ke dalam bentuk notasi himpunan, maka perlu memahami penghubung – penghubung kalimat agar dapat dikonversi dengan operator – operator himpunan yang tepat.

Contoh 2.25 Mahasiswa matematika dasar mendapat nilai A jika kedua nilai UTS dan UAS minimal 80, nilai B hanya jika salah satu nilai minimal 80, dan nilai C jika kedua nilai UTS dan UAS di bawah 80. Notasikan himpunan yang memuat mahasiswa yang mendapatkan nilai A, himpunan mahasiswa yang mendapat nilai B dan himpunan mahasiswa yang mendapatkan nilai C berdasarkan pengelompokan nilai UTS. Permasalahan di atas dapat diselesaikan sebagai berikut.

Misalkan:

$S =$ himpunan mahasiswa matematika dasar.

$H =$ himpunan mahasiswa matematika dasar dengan nilai UTS minimal 80.

$F =$ himpunan mahasiswa matematika dasar dengan nilai UAS minimal 80.

Sehingga diperoleh:

a. mahasiswa yang mendapat nilai A yaitu $H \cap F$,

b. mahasiswa yang mendapat nilai B yaitu $H \Delta F$, dan

c. mahasiswa yang mendapat nilai C yaitu $H' \cap F' = S - (H \cup F)$.

2. Menentukan Jumlah Anggota Himpunan

Terdapat beberapa rumus umum untuk menentukan jumlah anggota pada suatu himpunan.

a. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

b. $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$

c. $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

d. $n(A\Delta\, B) = n(A \cup B) - n(A \cap B)$

e. $n(S) = n(A) + n(A') = n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(A \cup B)'$

Contoh 2.26 Dari 120 mahasiswa semester 1 jurusan pendidikan matematika, 100 mahasiswa mengambil paling sedikit satu kegiatan kemahasiswaan, yaitu olahraga, seni tari, dan angklung. Diketahui bahwa:

42 mahasiswa mengikuti kegiatan angklung.

45 mahasiswa mengikuti kegiatan seni tari.

65 mahasiswa mengikuti kegiatan olahraga.

15 mahasiswa mengikuti kegiatan seni tari dan angklung.

20 mahasiswa sekaligus mengikuti kegiatan seni tari dan olahraga.

25 mahasiswa sekaligus mengikuti kegiatan olahraga dan angklung.

Sehingga mahasiswa yang mengambil sekaligus 3 kegiatan mahasiswa tersebut dapat dilihat penjelasannya sebagai berikut.

Misalkan $A =$ mahasiswa mengikuti angklung, $B =$ mahasiswa mengikuti seni tari, $C =$ mahasiswa mengikuti olahraga, sehingga:

$n(A \cup B \cup C) = 100$

$n(A) = 42$

$n(B) = 45$

$n(C) = 65$

$n(A \cap B) = 15$

$n(B \cap C) = 20$

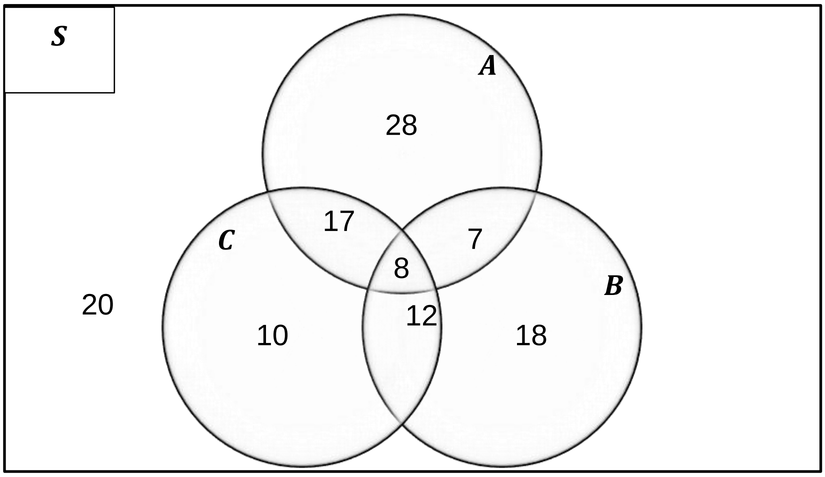
$n(A \cap C) = 25$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$100 = 42 + 45 + 65 - 15 - 25 - 20 + n(A \cap B \cap C)$$

$$n(A \cap B \cap C) = 8$$

Jadi banyaknya mahasiswa yang mengambil sekaligus 3 kegiatan mahasiswa sebanyak 8 mahasiswa. Hasil tersebut dapat disajikan ke dalam bentuk diagram Venn berikut.



E. Latihan Soal Bab 2

1. a. Ubahlah $A = \{x | x < 5, x$ bilangan prima$\}$ dengan cara daftar!

   Penyelesaian: $A = \{2, 3\}$.

b. Ubahlah $B = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$ dengan menuliskan ke notasi pembentuk himpunannya.

Penyelesaian: $B = \{x| -6 < x < 0, x$ bilangan bulat$\}$.

2. Tentukan hubungan dari himpunan – himpunan $A = \{1, 3, 5, 7, 8\}$, $B = \{1, 5\}$, $C = \{7, 8\}$, $D = \{8\}$!

Penyelesaian: $D \subset C, C \subset A, D \subset A, B \subset A, B//C, B//D,\ B \cong C$.

3. Dari himpunan – himpunan berikut, manakah yang termasuk himpunan berhingga dan himpunan tak berhingga?

a. $A = \{x|x \geq 9, x$ bilangan asli $\}$.

Penyelesaian: Himpunan tak berhingga.

b. $B = \{2, 4, 8, 9, 12, ...\}$.

Penyelesaian: Himpunan tak berhingga.

c. C =Himpunan bilangan riil.

Penyelesaian: Himpunan tak berhingga.

d. $D = \{x|0 \leq x \leq 100, x$ bilangan bulat$\}$.

Penyelesaian: Himpunan berhingga.

4. Dari himpunan – himpunan berikut, manakah yang termasuk himpunan kosong?

a. $A = \{x|x \leq 0, x$ bilangan prima$\}$.

Penyelesaian: Himpunan kosong, karena tidak ada bilangan prima yang kurang dari sama dengan 0.

b. $B = \{x|x^2 = 96,\ x$ bilangan bulat$\}$.

Penyelesaian: Himpunan kosong, karena tidak ada bilangan bulat yang memenuhi persamaan $x^2 = 96$.

c. $C = \{x|0 \leq x \leq 10, x$ bilangan bulat yang habis dibagi $3\}$.

Penyelesaian: Bukan himpunan kosong, karena ada bilangan bulat yang habis dibagi 3 pada $0 \leq x < 10$, yaitu $3, 6,$ dan 9. Sehingga $C = \{0,3, 6, 9\}$.

d. D = himpunan bilangan komposit yang habis dibagi 5.

Penyelesaian: Bukan himpunan kosong, karena terdapat bilangan komposit yang habis dibagi 5 yaitu 10, 15, 20, 25, dan seterusnya. Sehingga $D = \{10, 15,20, ...\}$.

5. Buatlah diagram Venn dan diagram garis dari nomor 2!

Penyelesaian:

Diagram Venn

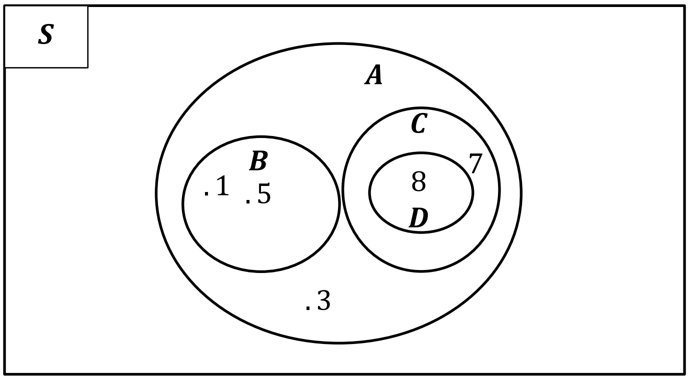
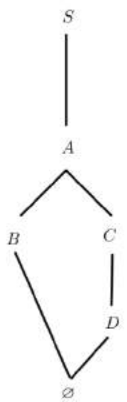


Diagram Garis



6. Tentukan himpunan dari semua himpunan bagian dari $A = \{1, 3, 5\}$ dan tentukan banyaknya anggota himpunan tersebut!

   Penyelesaian: $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{3,5\}, \{1, 3,5\}\}$. Banyaknya anggota himpunan A yang diberi lambang $n(A)$ adalah $n(A) = 3$ sedangkan banyaknya anggota himpunan 2^A adalah $n(2^A) = 8$.

7. Misalkan $S = \{x | 0 \leq x < 10, x \text{ bilangan cacah}\}$ $A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{4, 7\}$ dan $C = \{3, 7, 8, 9\}$. Tentukan anggota dari himpunan berikut!

a. $(A \cap B) - C$

Penyelesaian: $(A \cap B) - C = \{4\}$.

b. $B - C$

Penyelesaian: $B - C = \{4\}$.

c. $(A\Delta\, C) - (B \cap A)'$

Penyelesaian: $(A\Delta\, C) - (B \cap A)' = \emptyset$.

8. Diketahui $n(A) = 3$, $n(B) = 14$, $n(A \cup B) = 15$ maka $n(A \cap B)$ adalah …

Penyelesaian:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$15 = 3 + 14 - n(A \cap B)$

$n(A \cap B) = 2.$

9. Buktikan bahwa

a. $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$

Penyelesaian:

$(A \cap B) \cup (A \cap B')$	… ruas kiri
$A \cap (B \cup B')$	… sifat distributif
$A \cap S$	…sifat komplemen
A	… sifat identitas

Terbukti bahwa $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$.

b. $A \cup (B - A) = A \cup B$

Penyelesaian:

$A \cup (B - A)$	… ruas kiri
$A \cup (B \cap A')$	… persamaan operasi selisih
$(A \cup A') \cap (A \cup B)$	…sifat distributif
$S \cap (A \cup B)$	…sifat komplemen
$A \cup B$	… sifat identitas

Terbukti bahwa $A \cup (B - A) = A \cup B$

10. Mahasiswa matematika semester 7 sebanyak 38 mahasiswa, terdapat 25 mahasiswa mengikuti kegiatan kesenian olahraga dan 16 mahasiswa mengikuti kegiatan paduan suara, namun ternyata terdapat 4 mahasiswa yang tidak mengikuti kegiatan apapun.

    a. Berapa jumlah mahasiswa yang mengikuti kegiatan keduanya?

    Penyelesaian: Misalkan $S =$ himpunan mahasiswa semester 7, $A =$ himpunan mahasiswa mengikuti kegiatan olahraga, $B =$ himpunan mahasiswa mengikuti paduan suara.

    $n(S) = 38$

    $n(A) = 25$

    $n(B) = 16$

    $n(A \cup B)' = 4$

    $n(S) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(A \cup B)'$

    $38 = 25 + 16 - n(A \cap B) + 4$

    $n(A \cap B) = 7$

    Jadi jumlah mahasiswa yang mengikuti kegiatan keduanya adalah sebanyak 7 mahasiswa.

    b. Berapa jumlah mahasiswa yang hanya mengikuti kegiatan olahraga?

    Penyelesaian: Misalkan $S =$ himpunan mahasiswa semester 7, $A =$ himpunan mahasiswa mengikuti kegiatan olahraga, $B =$ himpunan mahasiswa mengikuti paduan suara.

    $n(S) = 38$

    $n(A) = 25$

    $n(B) = 16$

    $n(A \cup B)' = 4$

    $n(A \cap B) = 7$

    $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 25 - 7 = 18$

Jadi jumlah mahasiswa yang mengikuti kegiatan olahraga adalah sebanyak 18 mahasiswa.

c. Berapa jumlah mahasiswa yang hanya mengikuti kegiatan paduan suara?

Penyelesaian: Misalkan $S =$ himpunan mahasiswa semester 7, $A =$ himpunan mahasiswa mengikuti kegiatan olahraga, $B =$ himpunan mahasiswa mengikuti paduan suara.

$n(S) = 38$

$n(A) = 25$

$n(B) = 16$

$n(A \cup B)' = 4$

$n(A \cap B) = 7$

$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 16 - 7 = 9$

Jadi jumlah mahasiswa yang mengikuti kegiatan paduan suara adalah sebanyak 9 mahasiswa.

F. Rangkuman Bab 2

1. Himpunan adalah sekumpulan objek-objek yang didefinisikan dengan jelas, yaitu yang berdasarkan sifat atau keadaan yang sama atau berdasarkan suatu aturan tertentu dan dilambangkan dengan huruf kapital, seperti $, B, C, \ldots, X, Y, \ldots$.
2. Objek-objek yang termasuk dalam himpunan itu disebut elemen atau anggota dan dilambangkan dengan huruf kecil, seperti $a, b, \ldots, x, y,$ ....
3. Dalam menyatakan suatu himpunan dapat dinyatakan dengan 3 cara, yaitu: cara daftar, notasi pembentuk himpunan, dan menyatakan sifat yang dimiliki anggotanya.
4. Terdapat jenis – jenis himpunan yaitu : himpunan berhingga, himpunan tak berhingga, himpunan kosong, himpunan semesta, himpunan komplemen.

5. Tiap dua himpunan mempunyai hubungan, yaitu himpunan bagian, himpunan sama, himpunan ekuivalen, himpunan saling lepas dan himpunan tak saling lepas.
6. Himpunan bagian ada dua jenis, yaitu himpunan bagian dan himpunan bagian sejati.
7. Himpunan A adalah himpunan bagian dari himpunan B jika dan hanya jika setiap anggota himpunan A merupakan anggota himpunan dari B. Atau dapat ditulis sebagai $A \subseteq B$ jika dan hanya jika $\forall_x x \in A \rightarrow x \in B$.
8. Himpunan A adalah himpunan bagian sejati dari himpunan B jika dan hanya jika setiap anggota himpunan A merupakan anggota himpunan dari B dan ada anggota himpunan B yang bukan merupakan anggota himpunan A. Atau dapat ditulis sebagai $A \subset B$ jika dan hanya jika $\forall_x (x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists_y \ (y \in B \wedge y \notin A)$.
9. Terdapat 5 operasi pada himpunan, diantaranya: operasi gabungan ($\cup$), operasi irisan ($\cap$), operasi selisih ($-$), operasi beda setangkup (Δ), dan produk kartesius.
10. Sifat – sifat operasi himpunan
    a. $A \cap A = A$ dan $A \cup A = A$ *(Idempoten).*
    b. $A \cap S = A,\ A \cup \emptyset = A,$ dan $A\Delta\, \emptyset = A$ *(identitas).*
    c. $A \cup S = S,\ A \cap \emptyset = \emptyset,$ dan $A\Delta\, A = \emptyset$ *(dominasi).*
    d. $A \cup A' = S,$ dan $A \cap A' = \emptyset$ *(komplemen).*
    e. $(A')' = A$ *(involusi).*
    f. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A,$ dan $A\Delta\, B = B\Delta\, A$ *(komutatif).*
    g. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,\quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ dan $A\Delta\, (B\Delta\, C) = (A\Delta\, B)\Delta C$ *(assosiatif).*
    h. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ dan $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *(distributif).*
    i. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ dan $(A \cap B)' = A' \cup B'$ *(dalil de morgan).*
    j. $(A \cap B) \cup A = A$ dan $(A \cup B) \cap A = A$ *(absorpsi).*
11. Pembuktian berlakunya sifat – sifat tersebut pada himpunan, kita dapat menggunakan cara, yaitu membuktikan bahwa himpunan hasil operasi

pada ruas kiri merupakan himpunan bagian dari himpunan hasil pada ruas kanan dan sebaliknya.

12. Dalam menyelesaikan permasalahan himpunan pada kasus realitas maka perlu dipahami (1) bagaimana mengkonversi kalimat sehari – hari ke dalam bentuk notasi himpunan dan (2) menentukan jumlah anggota dari suatu himpunan yang ada.

Tes Formatif 2

1. a. Ubahlah $A = \{x|x > 5, x \text{ bilangan prima}\}$ dengan cara daftar!

   b. Ubahlah $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ke notasi pembentuk himpunan!
2. Tentukan hubungan dari himpunan – himpunan $A = \{2, 3, 6, 8, 10, 12\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$, $C = \{6, 8, 10, 12\}$, $D = \{3, 5, 7\}$!
3. Dari himpunan – himpunan berikut, manakah yang termasuk himpunan berhingga dan himpunan tak berhingga?

   a. $A = \{x|x \text{ genap}\}$.

   b. $B = \{x|x \text{ adalah nama hari diawali huruf } S\}$.

   c. $C =$ Himpunan bilangan prima antara 5 dan 100.

   d. $D =$ Himpunan bilangan asli antara 1 dan 13 habis dibagi 12.
4. Dari himpunan – himpunan berikut, manakah yang termasuk himpunan kosong?

   a. $A = \{x|x \geq 0, x \text{ bilangan prima genap}\}$.

   b. $B = \{x|x^2 - 2 = 90, x \text{ bilangan asli}\}$.

   c. $C = \{x|x^4 = 99,\ x \text{ bilangan bulat}\}$.

   d. $D = \{x|x^4 - 2x + 1 = 0, x \text{ bilangan cacah}\}$.
5. Buatlah diagram Venn dan diagram garis dari $S = \{x|0 \leq x \leq 15\}$, $A = \{x|1 < x < 13, x \text{ bilangan bulat genap}\}$, $B = \{2, 4, 8, 10, 12\}$, $C = \{1, 3\}$, dan $D = \{3, 5, 7\}$!
6. Tentukan himpunan dari semua himpunan bagian dari $A = \{2, 3, 4{,}2, 4, 5\}$ dan tentukan banyaknya anggota himpunan tersebut!
7. Misalkan $S = \{x|2 \leq x < 20,\ x \text{ bilangan prima}\}$, $A = \{2, 3{,}11, 17, 19\}$, $B = \{5, 7, 11, 19\}$ dan $C = \{3, 7, 13, 17, 19\}$. Tentukan anggota dari himpunan berikut!

   a. $(A \cap B)' - (C \Delta A)'$.

   b. $(B - C') \cup (C - B')$.

c. $(A\Delta C') - (B' \cap A')'$.

8. Diketahui $n(S) = 26$, $n(B) = 10$, $n(A \cap B) = 7$, $n(A' \cap B') = n(B) - 2$. Tentukan $n(A)$?

9. Buktikan bahwa

   a. $(A - B) - C = (A - C) - B$

   b. $A \cup (A \cup B)' = A \cup B'$

10. Dalam penelitian dengan sampel pada 60 orang mengenai kebiasaan belajar, diperoleh data bahwa 25 orang belajar dengan cara menghapal, 26 orang belajar dengan cara mencatat rangkuman, dan 26 orang belajar dengan cara mendengarkan musik. Terdapat 9 orang belajar dengan cara menghapal dan mendengarkan musik, 11 orang belajar dengan cara menghapal dan mencatat rangkuman, 8 orang belajar dengan cara mencatat rangkuman dan mendengarkan musik, dan 8 orang tidak menggunakan 3 cara tersebut. Tentukan jumlah orang yang hanya belajar dengan menggunakan cara menghapal?

Cocokanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat dibagian akhir bab ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi himpunan.

$$\text{Tingkat penguasaan}(x) = \frac{\text{Jumlah jawaban yang benar}}{\text{Jumlah pertanyaan}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan :

$100\% \leq x < 90\%$ baik sekali

$90\% \leq x < 80\%$ baik

$80\% \leq x \leq 70\%$ cukup

$x < 70\%$ kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan materi bab 3. Jika masih di bawah 80% Anda harus mengulangi materi bab 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif 2

1. a. $A = \{7, 11, 13, 17, ...\}$

   b. $B = \{x | x \leq 5, x$ bilangan asli$\}$

2. $C \subset A, D \subset B,\ A \eqcirc B, A \eqcirc D,\ B//C, C//D,\ B \cong C$

3. a. tak berhingga

   b. berhingga

   c. berhingga

   d. berhingga

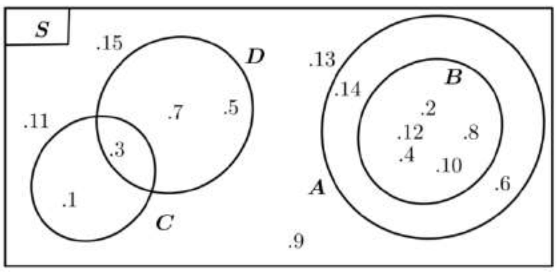
4. a. Himpunan tak kosong

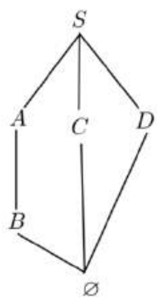
   b. Himpunan kosong

   c. Himpunan kosong

   d. Himpunan tak kosong

5. <u>Diagram Venn</u> <u>Diagram Garis</u>





6. $A = \{2, 3, 4, 5\}$. Karena

   $2^A = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}, \{2,3,4\}, \{2,3,5\},$

   $\{2,4,5\}, \{3,4,5\}, \{2,3,4,5\}\}$.

Banyaknya anggota himpunan A yang diberi lambang $n(A)$ adalah $n(A) = 4$ sedangkan banyaknya anggota himpunan 2^A yang diberi lambang $n(2^A)$ adalah $n(2^A) = 16$

7. a. $(A \cap B)' - (C \Delta A)' = \{2,7,13\}$
   b. $(B - C') \cup (C - B') = \{3,5,11,13,17\}$
   c. $(A\Delta\, C') - (B' \cap A')' = \{\ \}$
8. $n(S) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(A \cup B)'$

   $26 = n(A) + 10 - 7 + 8$

   $n(A) = 15$

9. a. $(A - B) - C$ … ruas kiri

   $(A - B) \cap C'$ … persamaan operasi selisih
   $(A \cap B') \cap C'$ … persamaan operasi selisih
   $(A \cap C') \cap B'$ … sifat asosiatif
   $(A - C) - B$ … persamaan operasi selisih

   Terbukti bahwa $(A - B) - C = (A - C) - B$

   b. $A \cup (A \cup B)'$ … ruas kiri

   $A \cup (A' \cap B')$ … sifat dalil de morgan
   $(A \cup A') \cap (A \cup B')$ … sifat distributif
   $S \cap (A \cup B')$ … sifat komplemen
   $A \cup B'$ … sifat identitas

   Terbukti bahwa $A \cup (A \cup B)' = A \cup B'$

10. Misalkan $S =$ himpunan sampel kebiasaan belajar , $A =$ himpunan cara belajar dengan menghapal, $B =$ himpunan cara belajar dengan merangkum, $C =$ himpunan cara belajar dengan mendengarkan musik.

    $n(S) = 60$
    $n(A) = 25$

$n(B) = 26$
$n(C) = 26$
$n(A \cap C) = 9$
$n(A \cap B) = 11$
$n(B \cap C) = 8$
$n(A \cup B \cup C)' = 8$

Terlebih dahulu mengerjakan $n(A \cap B \cap C)$ diperoleh:

$$n(S) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$$
$$+n(A \cap B \cap C) + n(A \cup B \cup C)'$$

$60 = 25 + 26 + 26 - 11 - 9 - 8 + n(A \cap B \cap C) + 8$
$n(A \cap B \cap C) = 3$

Jadi terdapat 3 orang yang menggunakan 3 cara tersebut untuk belajar. Selanjutnya akan menentukan jumlah orang yang hanya belajar dengan menggunakan cara menghapal

$$n\big(A - (B \cup C)\big) = n(A) - n\big(\ A \cap (B \cup C)\big)$$
$$n\big(A - (B \cup C)\big) = n(A) - \big(n(A) + n(B \cup C) - n(A \cup B \cup C)\big)$$
$$n\big(A - (B \cup C)\big) = n(A) - (n(A) + \big(n(B) + n(C) - n(B \cap C)\big)$$
$$-(n(S) - n(A \cup B \cup C)')$$
$$n\big(A - (B \cup C)\big) = 25 - (25 + (26 + 26 - 8) - (60 - 8) = 8$$

Jadi jumlah orang yang hanya belajar dengan menggunakan cara menghapal adalah sebanyak 8 orang.

BAB 3

Sistem Bilangan Riil

Dalam bab ini, akan membahas mengenai sistem bilangan riil yang mencakup materi – materi bahasan sebagai berikut:

1. Konsep dasar sistem bilangan riil.
2. Sifat Urutan Bilangan.
3. Nilai Mutlak.

Penulis berharap bagi pembaca yang telah mempelajari bab ini, secara umum diharapkan dapat menjelaskan konsep – konsep dan prinsip – prinsip dari sistem bilangan riil Adapun capaian pembelajaran mata kuliah (CPMK) pada bab ini sebagai berikut.

1. Mengidentifikasi sifat aljabar bilangan riil.
2. Mengidentifikasi sifat urutan bilangan riil.
3. Mengidentifikasi nilai mutlak.

Berdasarkan CPMK yang telah dirancang, selanjutnya berikut merupakan sub – CPMK yang telah dirancang.

1. Mengidentifikasi sifat bilangan.
2. Membedakan bilangan rasional dengan irrasional.
3. Mendefinisikan sifat urutan bilangan riil.
4. Mengidentifikasi sifat trikotomi.
5. Membuktikan teorema additif, transitif dan multiplikatif.
6. Menyebutkan definisi nilai mutlak.
7. Menyebutkan sifat-sifat nilai mutlak.
8. Membuktikan ketaksamaan segitiga.

9. Menyelesaikan solusi pertidaksamaan yang melibatkan nilai mutlak.

Adapun hubungan materi sistem bilangan riil dengan surat di Al Qur'an, yaitu pada surat Al Mujaadilah ayat 7 yang berbunyi,

أَلَمْ تَرَ أَنَّ ٱللَّهَ يَعْلَمُ مَا فِى ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَمَا فِى ٱلْأَرْضِ ۖ مَا يَكُونُ مِن نَّجْوَىٰ

ثَلَٰثَةٍ إِلَّا هُوَ رَابِعُهُمْ وَلَا خَمْسَةٍ إِلَّا هُوَ سَادِسُهُمْ وَلَآ أَدْنَىٰ مِن ذَٰلِكَ وَلَآ أَكْثَرَ

إِلَّا هُوَ مَعَهُمْ أَيْنَ مَا كَانُوا۟ ۖ ثُمَّ يُنَبِّئُهُم بِمَا عَمِلُوا۟ يَوْمَ ٱلْقِيَٰمَةِ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ بِكُلِّ شَىْءٍ

عَلِيمٌ ﴿٧﴾

Artinya : Tidakkah kamu perhatikan, bahwa Sesungguhnya Allah mengetahui apa yang ada di langit dan di bumi? tiada pembicaraan rahasia antara tiga orang, melainkan Dia-lah keempatnya. dan tiada (pembicaraan antara) lima orang, melainkan Dia-lah keenamnya. dan tiada (pula) pembicaraan antara jumlah yang kurang dari itu atau lebih banyak, melainkan dia berada bersama mereka di manapun mereka berada. Kemudian dia akan memberitahukan kepada mereka pada hari kiamat apa yang Telah mereka kerjakan. Sesungguhnya Allah Maha mengetahui segala sesuatu. (QS. Al Mujaadilah, 58:7).

Bilangan riil dalam matematika menyatakan bilangan yang bisa dituliskan dalam bentuk desimal, seperti 2,49875358889... atau 3,76558. Bilangan riil merupakan salah satu perkembangan matematika terpenting di abad ke-19. Bilangan riil merupakan gabungan bilangan rasional dan bilangan irrasional, yang dapat digunakan untuk mengukur. Bilangan riil perlu dipelajari karena bilangan riil ini bermanfaat untuk ilmu lainnya, seperti fisika, geologi, sejarah, astronot, dan lain-lain. Tanpa adanya bilangan riil, kita tidak akan dapat menentukan jarak bumi ke bulan, berat badan, tinggi badan, dan sebagainya. Kita sebagai manusia akan haus oleh ilmu. Perkembangan ilmu tidak ada batasnya, kemungkinan besar pada saat kita mempelajari sistem bilangan riil ada hal-hal yang belum ditemukan oleh para ahli. Oleh karena itu, marilah kita pelajari ilmu sistem bilangan riil berikut beserta aturan-aturan di dalamnya, sebagai dasar dalam mengembangkan ilmu lainnya.

A. Konsep Dasar Sistem Bilangan Riil

Math Info

***Julius Wilhelm Richard Dedekind** (1831 - 1916) merupakan seorang matematikawan Jerman yang memberikan kontribusi penting untuk aljabar abstrak, teori bilangan aljabar dan definisi bilangan riil.*

Bilangan adalah suatu ide yang digunakan untuk menggambarkan banyaknya anggota suatu himpunan. Secara geometri, bilangan riil dapat direpresentasikan sebagai salah satu titik dalam garis. Himpunan bilangan riil dapat dipandang sebagai kumpulan titik-titik sepanjang sebuah garis lurus yang disebut garis bilangan riil.

Secara umum himpunan bilangan riil memuat himpunan bilangan rasional dan himpunan bilangan irrasional. Himpunan semua bilangan rasional dinotasikan dengan $\mathbb{Q}$, yang didefinisikan sebagai berikut.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p \in \text{bilangan bulat}, q \in \text{bilangan asli, dan } FPB(p,q) = 1 \right\}$$

Himpunan bilangan bulat memuat himpunan bilangan cacah dan himpunan negatif bilangan asli, yang dinotasikan dengan $\mathbb{Z}$, kita tulis

$$\mathbb{Z} = \{\underbrace{\dots, -3, -2, -1}_{\text{negatif bilangan asli}}, \underbrace{0, 1, 2, 3, \dots}_{\text{bilangan cacah}}\}.$$

Himpunan bilangan asli dinotasikan oleh $\mathbb{N}$ sehingga dapat ditulis $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Bilangan rasional tidak cukup untuk menampung semua kebutuhan dalam permasalahan matematika, karena bilangan rasional tidak mampu untuk mengukur semua ukuran panjang. Perhatikan $\sqrt{2}$ merupakan panjang sisi miring sebuah segitiga siku-siku dengan sisi-sisi 1 satuan. Bilangan ini tidak dapat dinyatakan sebagai hasil bagi dua bilangan bulat atau $\sqrt{2} \neq \frac{p}{q}$, untuk setiap $p \in \mathbb{Z}$ dan $q \in \mathbb{N}$ dengan p dan q relatif prima, sehingga $\sqrt{2}$ bukan bilangan rasional (*Irasional*). Himpunan bilangan rasional dinotasikan sebagai $\mathbb{Q}'$.

Perbedaan antara bilangan rasional dengan bilangan irasional dapat dilihat pada bentuk desimal. Beberapa contoh bilangan riil yang ditulis dalam bentuk desimal, dapat dilihat sebagai berikut.

$$1 = 1{,}00000 \dots$$
$$\frac{1}{2} = 0{,}50000 \dots$$
$$\frac{1}{3} = 0{,}33333 \dots$$
$$\sqrt{2} = 1{,}41421 \dots$$
$$e = 2{,}71828 \dots$$
$$\pi = 3{,}14159 \dots$$

Sebagian bilangan mempunyai bentuk desimal yang tidak berulang seperti $\sqrt{2}, e, \pi$ dan sebagian bilangan mempunyai bentuk desimal yang berulang seperti $\frac{1}{3} = 0{,}33333 \ldots$. Bilangan rasional senantiasa dapat dinyatakan dalam bentuk desimal yang berulang. Bilangan yang mempunyai bentuk desimal tak berulang merupakan bilangan irasional.

<u>Contoh 3.1</u> Bilangan $0{,}1010010001 \ldots$ merupakan bilangan irasional.

Himpunan bilangan riil, dinotasikan $\mathbb{R}$, merupakan gabungan himpunan bilangan rasional dengan himpunan bilangan irrasional atau ditulis $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$. Himpunan bilangan riil dapat ditulis juga menggunakan notasi $(-\infty, \infty)$. Dalam hal hubungan antara himpunan-himpunan bilangan yang ada, kita miliki bahwa $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

<u>Contoh 3.2</u> Dalam contoh ini kita akan melihat bagaimana mengubah bilangan rasional dalam bentuk decimal berulang menjadi bilangan rasional $\frac{p}{q}$ dengan $p \in \mathbb{Z}$ dan $q \in \mathbb{N}$ relatif prima. Misalkan $0{,}371371 \ldots = a$. Kalikan a dengan 1000, sehingga diperoleh

$$1000a = 371{,}371371 \ldots$$

$$\underline{\quad a = \quad 0{,}371371 \ldots} \; -$$

$$999a = 371$$

$$a = \frac{371}{999}$$

Jadi bentuk bilangan rasional $0{,}371371 \ldots$ dapat diubah menjadi $\frac{371}{999}$.

Suatu himpunan A dikatakan *denumerable* jika terdapat fungsi bijektif (Lihat di bab 4 Fungsi) dari $\mathbb{N}$ ke A. Himpunan A dikatakan terhitung (*countable*) jika himpunan tersebut berhingga atau *denumerable*. Jika tidak, maka A dikatakan himpunan tak terhitung (*uncountable* atau *non* *denumerable*). Jika himpunan A terhitung, maka A dapat disajikan sebagai $A = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ dengan $x_i \neq x_j$ untuk $i \neq j$.

Contoh 3.3

1. Himpunan $\emptyset$ terhitung berhingga.
2. Himpunan $\mathbb{N}$ terhitung tak berhingga.
3. Himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ terhitung berhingga.
4. Himpunan $\mathbb{R}$ tak terhitung tak berhingga.

Pada himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$ terdapat dua operasi biner, dinotasikan dengan " $+$ " dan " $.$ " yang disebut dengan penjumlahan dan perkalian. Sistem bilangan riil adalah himpunan $\mathbb{R}$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian. Himpunan bilangan riil yang dilengkapi dengan dua operasi ini akan membentuk suatu struktur matematika. Dalam hal ini, kita akan kenalkan struktur dari suatu bilangan riil berdasarkan sifat-sifat bilangan riil yang dimiliki. Terlebih dahulu kita kenalkan sifat – sifat suatu operasi pada bilangan riil sebagai berikut.

1. Operasi bersifat tertutup

Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$ maka memenuhi:

a. $a + b \in \mathbb{R}$.
b. $ab \in \mathbb{R}$.

2. Operasi bersifat komutatif

Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$ maka memenuhi:

a. $a + b = b + a$.
b. $ab = ba$.

3. Operasi bersifat asosiatif

Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$ maka memenuhi:

a. $a + (b + c) = (a + b) + c$.

b. $a(bc) = (ab)c$.

4. Memiliki unsur identitas

a. Terdapat $0 \in \mathbb{R}$ untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ sehingga $a + 0 = a$.

b. Terdapat $1 \in \mathbb{R}$ untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ sehingga $a.1 = a$.

5. Memiliki unsur invers

a. Setiap $a \in \mathbb{R}$ terdapat $-a \in \mathbb{R}$, sehingga $a + (-a) = 0$.

b. Setiap $a \in \mathbb{R}$ terdapat a^{-1}, sehingga $a.a^{-1} = 1$.

6. Operasi bersifat distributif

Misalkan $a, b, c \in \mathbb{R}$ maka memenuhi $a(b + c) = ab + ac$.

Dari sifat-sifat yang dimilki maka struktur bilangan riil merupakan Lapangan atau *Field* (akan diperdalam pada mata kuliah teori ring). Berdasarkan yang telah dipaparkan di atas, maka kita rangkum sifat –sifat operasi bilangan riil pada tabel di bawah ini.

Tabel 3.1
Sifat – sifat Operasi di Bilangan Riil ($\mathbb{R}$)

	Penjumlahan	**Perkalian**
Tertutup	√	√
Komutatif	√	√
Asosiatif	√	√
Identitas	√	√
Invers	√	√

Karena struktur himpunan bilangan riil merupakan lapangan maka himpunan bilangan rill tidak memiliki memiliki pembagi nol yang artinya, untuk setiap a, b bilangan riil. Jika $ab = 0$ maka $a = 0$ atau $b = 0$. Akibatnya pada sistem bilangan riil berlaku

hukum pencoretan (*kanselasi*) terhadap operasi penjumlahan "$+$" dan operasi perkalian "$.$",yaitu untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}$ maka berlaku:

1. Jika $a + c = b + c$ maka $a = b$.
2. Jika $ac = bc$ dan $c \neq 0$ maka $a = b$.

Contoh 3.4

1. Berdasarkan hukum pencoretan, maka untuk persamaan $5 + 7 = x + 7$ diperoleh bahwa nilai x adalah 5.
2. Persamaan $5 .7 = x.7$ mengakibatkan nilai x adalah 5.
3. Nilai x yang memenuhi persamaan $(x - 3)(x + 2) = 0$ adalah nilai $x = 3$ atau $x = -2$.

Pada sistem bilangan riil terdapat beberapa sifat-sifat yang dapat diperoleh sebagai berikut.

Misalkan a, b merupakan bilangan riil maka:

1. $a.0 = 0$

   Bukti

   $a.0 = a.0 + a.0$

   $0 + a.0 = a.0 + a.0$

   $0 = a.0$ … hukum pencoretan terhadap operasi penjumlahan.

■

Contoh 3.5

a. $5.0 = 0$.
b. $-13.0 = 0$.
c. $\sqrt{2}.0 = 0$.

2. $(-1)a = -a$

Bukti

Ambil $a \in \mathbb{R}$, artinya terdapat $-a \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $a + (-a) = 0$. Akan dibuktikan bahwa $(-1)a + a = 0$. Perhatikan bahwa.

$a + (-1)a = 1.a + (-1)a$ …sifat identitas terhadap operasi perkalian.

$= a\big(1 + (-1)\big)$ …hukum distributif.

$= a.0$ …sifat invers terhadap operasi penjumlahan.

$= 0$ …aksioma 1 $a.0 = 0$.

Jadi terbukti bahwa $(-1)a = -a$.

■

Contoh 3.6

a. $(-1)5 = -5$.

b. $(-1)13{,}33 = -13{,}33$.

c. $(-1)\sqrt{2} = -\sqrt{2}$.

3. $-(-a) = a$

Bukti

Ambil $(-a) \in \mathbb{R}$, artinya terdapat $-(-a) \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $(-a) + \big(-(-a)\big) = 0$. Perhatikan bahwa

$(-a) + \big(-(-a)\big) = (-a) + a$

$a + (-a) + \big(-(-a)\big) = a + (-a) + a$ ….kedua ruas ditambahkan dengan a.

$0 + \left(-(-a)\right) = 0 + a$ …sifat invers terhadap operasi penjumlahan.

$\left(-(-a)\right) = a$

■

Contoh 3.7

a. $\left(-(-5)\right) = 5$.

b. $(-(-13{,}33) = 13{,}33$.

c. $(-\left(-\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$.

4. $(-1)(-1) = 1$

Bukti

$(-1)(-1) = -(-1)$ … sifat 2 $(-1)a = -a$.

$= 1$ … sifat 3 $\left(-(-a)\right) = a$.

■

5. $\left(-a\right)b = -(ab)$

Bukti

$(-a)b = (-a)b + 0$

$= (-a)b + ab + \left(-(ab)\right)$

$= b\left((-a) + a\right) + \left(-(ab)\right)$ …sifat distributif.

$= b.0 + \left(-(ab)\right)$ …sifat invers pada terhadap penjumlahan.

$= 0 + \left(-(ab)\right)$ ...sifat 1 $b.0 = 0$

$(-a)b \;= \left(-(ab)\right)$

■

Contoh 3.8

a. $(-5)3 = \left(-(5.3)\right)$.

b. $(-13{,}33).7 = \left(-(13{,}33.3)\right)$.

c. $\left(-\sqrt{2}\right).8 = \left(-\left(\sqrt{2}.8\right)\right)$.

6. $(-a)(-b) = ab$

Bukti

$(-a)(-b) = -\left(a(-b)\right)$ ...sifat 5 $(-a)b = -(ab)$.

$= -\left((-b)a\right)$ ...sifat komutatif terhadap operasi perkalian.

$= -(-b)a$

$= ba$ ...sifat 3 $-(-a) = a$.

$(-a)(-b) = ab$ ... sifat komutatif terhadap operasi perkalian.

■

Contoh 3.9

a. $(-5)(-3) = 5.3$

b. $(-13{,}33)(-12{,}1) = 13{,}33\,.\,12{,}1$

c. $\left(-\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{3}\right) = \sqrt{2}.\sqrt{3}$

7. $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

Bukti

Karena $(ab)^{-1}(ab) = 1$ maka akan ditunjukkan $(b^{-1}a^{-1})(ab) = 1$. Perhatikan di bawah ini.

$(b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}a^{-1}ab$

$= b^{-1}.1.b$ …sifat invers terhadap operasi perkalian.

$= b^{-1}b$ …sifat identitas terhadap operasi perkalian.

$= 1$ …sifat invers terhadap operasi perkalian.

■

Contoh 3.10 $(5.3)^{-1} = 3^{-1}.5^{-1}$

8. $a + x = b$ mempunyai penyelesaian tunggal, yaitu $x = (-a) + b$

Bukti

$a + x = b$

$(-a) + (a + x) = (-a) + b$ …kedua ruas ditambahkan dengan $(-a)$.

$\big((-a) + a\big) + x = (-a) + b$ …sifat distributif.

$0 + x = (-a) + b$ … sifat invers terhadap operasi penjumlahan.

$x = (-a) + b$ …sifat identitas terhadap operasi penjumlahan.

■

Contoh 3.11 Persamaan $5 + x = 8$ solusinya adalah $x = (-5) + 8 = 3$.

B. Sifat Urutan Bilangan Riil

Sifat urutan pada bilangan asli muncul secara alami berdasarkan arti "bilangan yang lebih besar dari". Konsep urutan pada bilangan riil juga dibuat dengan mendefinisikan arti bilangan a lebih besar dari b. Konsep urutan bilangan riil dikonstruksi menggunakan pendekatan aksiomatis. Pembahasan urutan bilangan riil secara aksiomatis diberikan dalam Analisis Riil. Dalam pembahasan ini akan diberikan aksioma tentang himpunan bagian riil positif. Asumsikan terdapat himpunan bagian, $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat-sifat berikut :

1. Jika $a, b \in \mathbb{R}^+$ maka $a + b \in \mathbb{R}^+$ dan $a \cdot b \in R^+$
2. Jika $a \neq 0$ maka $a \in \mathbb{R}^+$ atau $-a \in \mathbb{R}^+$ tapi tidak keduanya.
3. $0 \notin \mathbb{R}^+$.

Aksioma no.1 menyatakan bahwa himpunan $\mathbb{R}^+$ tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian. Aksioma kedua menyatakan bahwa himpunan menyatakan bahwa himpunan bilangan riil tak nol dapat dikelompokkan menjadi dua himpunan bagian dari $\mathbb{R}$ yang saling lepas (positif dan negatif).

Kita definisikan bilangan riil x adalah bilangan positif jika $x \in \mathbb{R}^+$ dan x adalah bilangan negatif jika $-x \in \mathbb{R}^+$. Misalkan a, b adalah dua bilangan riil. Jika $b - a$ adalah bilangan positif maka kita tulis $a < b$ atau $b > a$. Dalam hal ini, notasi tersebut dibaca "a kurang dari b" atau "b lebih besar dari a". Berdasarkan notasi ini kita definisikan dua notasi berikut.

1. Notasi $a < b < c$ berarti $a < b$ dan $b < c$.

   Contoh 3.12 kita miliki bahwa $0 < \frac{1}{2} < 1$.

2. Notasi $a \leq b$ berarti $a < b$ atau $a = b$, sementara $a \geq b$ berarti $a > b$ atau $a = b$.

Contoh 3.13 $1 \geq 0$ dan $-1 \leq 1$ merupakan dua pernyataan yang benar.

Akibat dari aksioma, definisi dan notasi urutan ini, kita peroleh beberapa fakta berikut:

1. $x \in \mathbb{R}$ adalah bilangan positif jika dan hanya jika $x > 0$.
2. 1 adalah bilangan positif.
3. Hukum trikotomi, yaitu misalkan a dan b bilangan riil, terdapat tiga kemungkinan dan hanya satu di antara tiga kemungkinan tersebut benar, yaitu $a < b$, $a > b$, atau $a = b$.
4. Misalkan $a, b, c \in \mathbb{R}$. Jika $a > b$ dan $b > c$ maka $a > c$.

Contoh 3.14 Fakta no. 2 di atas atau $1 > 0$ dapat diselidiki sebagai berikut.

Ingat bahwa $1 \neq 0$, karena itu ada dua kemungkinan, yaitu $1 < 0$ atau $1 > 0$. Andaikan $1 < 0$ maka kita peroleh $0 < -1$ atau $-1 > 0$. Karena himpunan bilangan positif tertutup terhadap perkalian, kita peroleh $1 = (-1)(-1) > 0$ bertentangan dengan pengandaian semula. Dengan demikian tidak mungkin $1 < 0$ dan karena itu mestilah $1 > 0$. Fakta no.3 diperoleh dari aksioma himpunan $\mathbb{R}^+$ no.2. Untuk fakta no.4, jika $a - b > 0$ dan $b - c > 0$ maka $a - c = (a - b) + (b - c) > 0$ karena $\mathbb{R}^+$ tertutup terhadap operasi penjumlahan.

■

Berikutnya kita lihat sifat-sifat urutan bilangan terhadap operasi penambahan dan perkalian bilangan riil.

1. Penambahan

Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$. Jika $a > b$ dan $c \in \mathbb{R}$, maka $a + c > b + c$. Atau hal ini sama dengan jika $a < b$ dan $c \in \mathbb{R}$, maka $a + c < b + c$.

Bukti

Karena $a > b$ maka $a - b > 0$ sehingga $(a + c) - (b - c) = a - b > 0$. Sehingga diperoleh bahwa $a + c > b + c$.

■

2. Perkalian

Perkalian antara dua bilangan positif hasilnya adalah positif berdasarkan aksioma ketertutupan. Akan tetapi, hasil perkalian yang positif belum tentu setiap faktornya positif. Lebih jelasnya, dapat dilihat sebagai berikut.

Jika $ab > 0$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$ maka berlaku:

a. $a > 0$ dan $b > 0$ atau
b. $a < 0$ dan $b < 0$.

Berdasarkan pernyataan di atas, akibat dari hasil perkalian yang negatif dapat dilihat sebagai berikut.

Jika berlaku $ab < 0$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$ maka berlaku:

a. $a < 0$ dan $b > 0$ atau
b. $a > 0$ dan $b < 0$.

Misalkan $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a. Jika $a > b$ dan $c > 0$ maka $ac > bc$. Atau hal ini sama dengan jika $a < b$ dan $c > 0$ maka $ac < bc$.

   Bukti

Karena $a > b$ maka $a - b > 0$ dan karena $c > 0$ maka $ac - bc = c(a - b) > 0$. Akibatnya $ac > bc$ untuk $c > 0$.

■

b. Jika $a > b$ dan $c < 0$ maka $ac < bc$. Atau hal ini sama dengan jika $a < b$ dan $c < 0$ maka $ac > bc$.

Bukti

Karena $a > b$ maka $x - y > 0$ dan karena $c < 0$ maka $ac - bc = c(a - b) < 0$. Akibatnya $ac < bc$ untuk $c < 0$.

■

Selanjutnya akan ditunjukkan cara sifat urutan dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan suatu pertidaksamaan/pertaksamaan. Permasalahan suatu pertaksamaan adalah mencari semua x yang memenuhi $f(x) < 0$, dimana $f(x)$ adalah suatu fungsi riil (tanda < dapat pula diganti >, ≤, atau ≥. Himpunan semua bilangan riil x yang memenuhi suatu pertidaksamaan disebut himpunan solusi pertaksamaan atau himpunan penyelesaian pertaksamaan. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 3.15

1. Tentukan himpunan A yaitu himpunan bilangan riil x sedemikian hingga $4x + 3 \leq 6$.

   Diketahui $x \in A$ dan $4x + 3 \leq 6$ maka:

   $4x + 3 \leq 6$

   $4x \leq 3$

$x \leq -\frac{3}{4}$

Jadi $A = \left\{x \middle| x \leq -\frac{4}{3}, x \in \mathbb{R}\right\}$.

2. Tentukan semua bilangan riil x yang memenuhi dari $x^2 + x > 2$.

   Perhatikan bahwa:

   $x^2 + x > 2$

   $x^2 + x - 2 > 0$

   $(x - 1)(x + 2) > 0$.

   Sehingga terdapat dua kemungkinan yang dapat dilihat sebagai berikut.

   a. $(x - 1) > 0$ dan $(x + 2) > 0$ diperoleh $x > 1$ dan $x > -2$ yang artinya $x > 1$, atau
   b. $(x - 1) < 0$ dan $(x + 2) < 0$ diperoleh $x < 1$ dan $x < -2$ yang artinya $x < -2$.

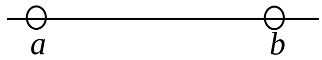
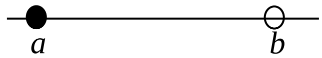
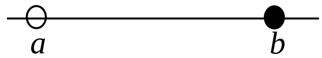
   Jadi, misalkan B adalah himpunan bilangan riil x yang memenuhi pertidaksamaan di atas maka $B = \{x|x > 1, x \in \mathbb{R}\} \cup \{x|x < -2, x \in \mathbb{R}\}$.

Berdasarkan contoh di atas untuk poin nomor 2 dalam menentukan solusi dari $x^2 + x > 2$, diperoleh bahwa himpunan bilangan riil yang membuat pertidaksamaan di atas berlaku adalah gabungan dari selang – selang. Berikut penjelasan mengenai selang bilangan.

1. Selang Hingga

Selang hingga merupakan himpunan bagian dari bilangan riil $\mathbb{R}$ yang terbatas di atas dan di bawah. Terdapat 4 jenis selang hingga yang dibagi berdasarkan titik ujung/batasnya.

Tabel 3.2
Selang Hingga

Penulisan Himpunan	Selang	Gambar Selang Pada Garis Bilangan Riil
$\{x \mid a < x < b, x \in \mathbb{R}\}$	(a, b)	
$\{x \mid a \leq x < b, x \in \mathbb{R}$	$[a, b)$	
$\{x \mid a < x \leq b, x \in \mathbb{R}$	$(a, b]$	
$\{x \mid a \leq x \leq b, x \in \mathbb{R}$	$[a, b]$	

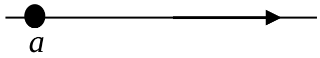
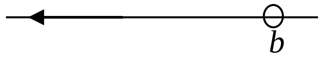
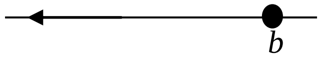
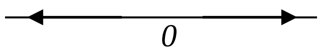
Selang (a, b) yang tidak memuat semua titik ujungnya dinamakan selang terbuka. Selang $[a, b]$ yang memuat semua titik ujungnya dinamakan selang tertutup. Sedangkan $[a, b), (a, b]$ disebut sebagai selang setengah terbuka atau setengah tertutup.

2. Selang Tak Hingga

Selang tak hingga merupakan himpunan bagian dari bilangan riil yang tidak terbatas di atas dan di bawah. Pada selang tak hingga digunakan notasi ∞ dan $-\infty$. Lambang ∞ digunakan untuk sesuatu yang lebih besar dari setiap bilangan riil (membesar tanpa batas) dan lambang $-\infty$ digunakan untuk sesuatu yang lebih kecil dari setiap bilangan riil (mengecil tanpa batas). Kedua lambang ini bukan bilangan riil dan operasi aljabar padanya harus dirancang khusus. Berikut ini adalah jenis-jenis selang tak hingga beserta gambarnya pada garis bilangan.

Tabel 3.3
Selang Tak Hingga

Penulisan Himpunan	Selang	Gambar Selang Pada Garis Bilangan Riil
$\{x \mid x > a, x \in \mathbb{R}\}$	(a, ∞)	

Penulisan Himpunan	Selang	Gambar Selang Pada Garis Bilangan Riil
$\{x \mid x \geq a, x \in \mathbb{R}\}$	$[a, \infty)$	
$\{x \mid x < b, x \in \mathbb{R}\}$	$(-\infty, b)$	
$\{x \mid x \leq b, x \in \mathbb{R}\}$	$(-\infty, b]$	
$\mathbb{R}$	$(-\infty, \infty)$	

Selang $(a, \infty), (-\infty, b)$ disebut selang terbuka, sedangkan selang $[a, \infty), (-\infty, b]$ adalah selang tertutup.

Aturan yang sering digunakan dalam menyelesaikan pertidaksamaan yang memuat pembagian, dapat dilihat sebagai berikut.

Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$.

1. $\frac{a}{b} > 0$ jika dan hanya jika $ab > 0$.
2. $\frac{a}{b} < 0$ jika dan hanya jika $ab < 0$.

Selanjutnya, akan dibahas langkah-langkah menyelesaikan pertaksamaan aljabar yang berbentuk

$\frac{A(x)}{B(x)} < \frac{C(x)}{D(x)}$, dengan $A(x), B(x), C(x)$, dan $D(x)$adalah suku banyak.

Tanda $<$ dapat diganti oleh $\leq$, $\geq$, atau $>$.

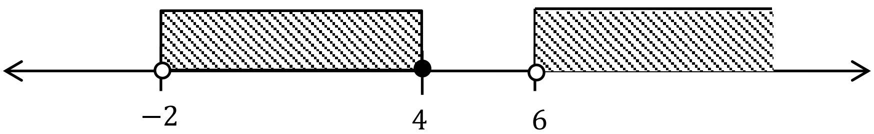
Cara menentukan solusi pertidaksamaan aljabar dapat dilihat sebagai berikut.

1. Nyatakan pertidaksamaan tersebut sehingga didapatkan salah satu ruasnya menjadi nol, $\frac{A(x)}{B(x)} - \frac{C(x)}{D(x)} < 0$. Kemudian sederhanakan bentuk ruas kiri, misal $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$.
2. Tentukan dan gambarkan pada garis bilangan semua pembuat nol dari $P(x)$ dan $Q(x)$.

   Tentukan setiap tanda $(+$ atau $-)$ pada setiap interval yang terbagi oleh pembuat nol pada garis bilangan dengan menguji satu unsur perwakilan pada setiap interval ke dalam pertaksamaan. Interval dengan tanda $(-)$ merupakan solusi pertidaksamaan.

Contoh 3.16

1. Gambar daerah bilangan x yang memenuhi $-2 < x \leq 4$ atau $x > 6$ adalah sebagai berikut.



2. Tentukan solusi pertaksamaan $x^2 + x < 2$.

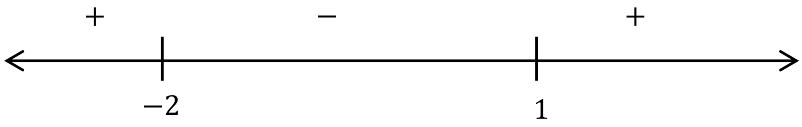
   Misalkan $C = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + x < 2\}$ perhatikan bahwa

   $x^2 + x < 2$

   $x^2 + x - 2 < 0$

   $(x - 1)(x + 2) < 0$

   Sehingga terdapat dua kemungkinan yang dapat dilihat sebagai berikut.



Jadi himpunanya adalah $C = \{x|-2 < x < 1, x \in \mathbb{R}\}$ atau $C = (-2,1)$.

3. Tentukan himpunan solusi dari pertidaksamaan $x + 1 \geq \frac{-1}{x-1}$ dengan $x \in \mathbb{R}$. Perhatikan di bawah ini.

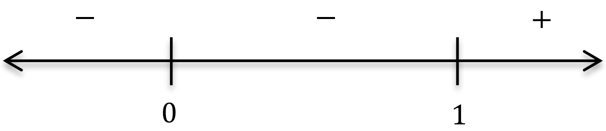
$$x + 1 \geq \frac{-1}{x-1}$$

$$x + 1 + \frac{1}{x-1} \geq 0$$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x-1} + \frac{1}{x-1} \geq 0$$

$$\frac{x^2}{x-1} \geq 0$$

Pembuat nol dari pembilang dan penyebut adalah 0 dan 1. Pada garis bilangan didapatkan nilai dari tiap selang, yaitu:



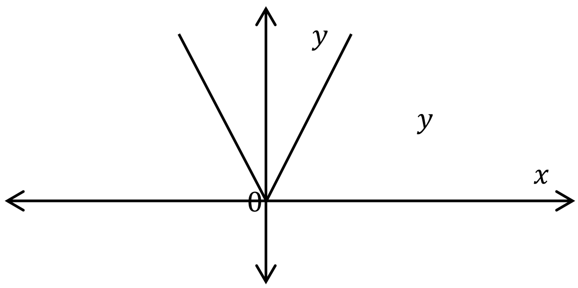
Himpunan solusi pertidaksamaan $\{0\} \cup \{1, \infty)$.

C. Nilai Mutlak

Dalam kehidupan sehari-hari, seringkali kita dihadapkan pada permasalahan yang berhubungan dengan jarak. Misalnya kita ingin menghitung jarak antara kota yang satu dengan kota yang lainnya atau jarak antara dua patok tertentu. Dalam kaitannya dengan pengukuran jarak antara dua tempat ini, timbullah sesuatu keistimewaan, bahwa jarak ini harganya selalu positif. Dengan kata lain pengukuran jarak antara dua tempat nilainya tidak pernah negatif. Secara khusus, dalam matematika untuk memberikan jaminan bahwa sesuatu itu nilainya selalu positif diberikan suatu pengertian yang sering kita namakan sebagai harga mutlak atau nilai mutlak.

Jika x adalah bilangan riil, maka nilai mutlak x dapat ditulis $|x|$, didefinisikan sebagai berikut.

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$



Secara geometris, nilai mutlak atau nilai absolut dari bilangan riil x dapat dipandang sebagai jarak dari x terhadap 0. Jika diberikan suatu bilangan rill x dan y, nilai mutlak dari $(x - y)$ dapat diinterpretasikan sebagai jarak dari titik x ke titik y.

Sebagai contoh , $|7| = 7, |0| = 0$, dan $|-3| = -(-3) = 3$. Selanjutnya akan diberikan sifat –sifat nilai mutlak yang dapat dilihat sebagai berikut.

1. Untuk setiap bilangan riil x berlaku:
   a. $|x| \geq 0$
   b. $|-x| = |x|$
   c. $|x| = \sqrt{x^2}$

d. $-|x| \leq x \leq |x|$

2. Untuk setiap bilangan riil x dan y berlaku:

   a. $|x| = |y|$ jika dan hanya jika $x = \pm y$ dan $x^2 = y^2$

   b. $|x - y| = |y - x|$

3. Misalkan $x \in \mathbb{R}$, jika $a \geq 0$ maka:

   a. $|x| \leq a$ jika dan hanya jika $-a \leq x \leq a$ dan $x^2 \leq a^2$

   b. $|x| \geq a$ jika dan hanya jika $x \geq a$ atau $x \leq -a$ dan $x^2 \geq a^2$

4. Untuk setiap bilangan riil x dan y berlaku:

   a. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (ketaksamaan segitiga)

   b. $|x - y| \leq |x| + |y|$

   c. $|x| - |y| \leq |x - y|$

   d. $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$

   e. $|x| < |y|$ jika dan hanya jika $x^2 < y^2$

5. Untuk setiap bilangan rill x dan y berlaku:

   a. $|xy| = |x||y|$

   b. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0$

<u>Contoh 3.17</u>

1. Menyelidiki bahwa $|x + y| < |x| + |y|$ benar. Perhatikan berikut ini.

   $$|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

   $$= |x|^2 + 2xy + |y|^2$$

   $$\leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$$

   $$= (|x| + |y|)^2$$

   Sehingga $|x + y| \leq |x| + |y|$

■

2. $2 = |-1 + 3|$

$\leq |-1| + |3| = 1 + 3 = 4$

3. $7 = |6 - (-1)| \geq |6| - |-1| = 6 - 1 = 5$
4. Misalkan himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$ adalah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $|2x + 3| < 6$. Perhatikan di bawah ini.

   $|2x + 3| < 6 \Leftrightarrow -6 < 2x + 3 < 6$

   $\Leftrightarrow -9 < 2x < 3$

   $\Leftrightarrow -4\frac{1}{2} < x < 1\frac{1}{2}$

   Jadi $A = \left\{x \middle| -4\frac{1}{2} < x < 1\frac{1}{2}, x \in \mathbb{R}\right\}$ atau $A = \left(-4\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$.

D. Latihan Soal Bab 3

1. Tentukan himpunan solusi dari $2x - 3 > 0$!

   Penyelesaian:

   $2x - 3 > 0$

   $2x > 3$

   $x > \frac{3}{2}$

   Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$.

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari $6 < 3x + 10 < 17$!

   Penyelesaian:

$6 < 3x + 10 < 17$

$-4 < 3x < 7$

$-\frac{4}{3} < x < \frac{7}{3}$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\left(-\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

3. Tentukan himpunan penyelesaian dari $-2x + 3 < 11$!

   Penyelesaian:

   $-2x + 3 < 11$

   $-2x < 8$

   $-x < 4$

   $0 < x + 4$

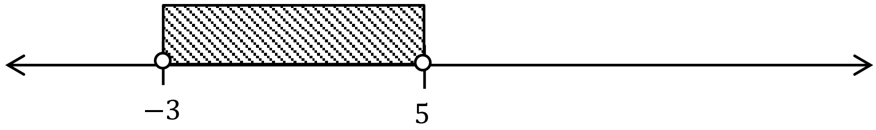
   $-4 < x$

   $x > -4$

   Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $(-4, \infty)$.

4. Gambarkan selang pada garis bilangan riil dari pertidaksamaan $-3 < x < 5$!

   Penyelesaian:



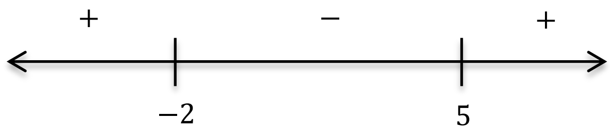
5. Tentukan himpunan penyelesaian dari $x^2 < 3x + 10$!

Penyelesaian:

$x^2 < 3x + 10$

$x^2 - 3x - 10 < 0$

$(x + 2)(x - 5) < 0$



Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $(-2, 5)$ atau dapat ditulis $-2 < x < 5$.

6. Tentukan solusi himpunan penyelesaian dari $\frac{2x+1}{x+3} > 3$!

Penyelesaian:

$$\frac{2x+1}{x+3} - 3 > 0$$

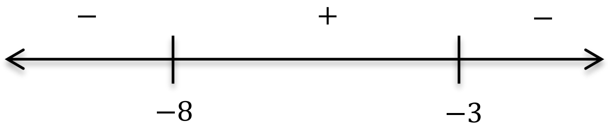
$$\frac{2x+1}{x+3} - \frac{3(x+3)}{x+3} > 0$$

$$\frac{2x+1-3x-9}{x+3} > 0$$

$$\frac{-x-8}{x+3} > 0$$

$$\frac{-(x+8)}{x+3} > 0$$

Pembuat nol dari pembilang dan penyebut adalah -8 dan -3. Pada garis bilangan didapatkan nilai dari tiap selang, yaitu:



Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $(-8,-3)$ atau dapat ditulis $-8 < x < -3$.

7. Tentukan solusi himpunan penyelesaian dari $|3x-7| = 8$!

Penyelesaian:

$|3x-7| = 8$

$\sqrt{(3x-7)^2} = 8$ ... (sifat mutlak 1. c)

$(3x-7)^2 = 64$

$9x^2 - 42x + 49 = 64$

$9x^2 - 42x - 15 = 0$

$3x^2 - 14x - 5 = 0$

$\frac{1}{3}(3x-15)(3x+1) = 0$

$(x-5)(3x+1) = 0$

$x = 5$ atau $x = -\frac{1}{3}$.

8. Tentukan solusi himpunan penyelesaian dari $|x+1| < 3$!

Penyelesaian:

$|x + 1| < 3$

$-3 < x + 1 < 3$ ... sifat mutlak 3.a

$-4 < x < 2$

9. Tentukan solusi himpunan penyelesaian dari $|x + 1| \geq 3$!

Penyelesaian:

$|x + 1| \geq 3$

Berdasarkan sifat mutlak (3.b) diperoleh

a. Untuk $x + 1 \geq 3$

$x + 1 \geq 3$

$x \geq 2$

b. Untuk $x + 1 \leq -3$

$x + 1 \leq -3$

$x \leq -4$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $[2, \infty)$ atau $(-\infty, -4]$.

10. Tentukan solusi himpunan penyelesaian dari $|x + 3| < 2 - x$!

Penyelesaian:

<u>**Cara 1**</u>

$|x+3| < 2-x$

$-(2-x) < x+3 < 2-x$

$x-2 < x+3 < 2-x$

$-2 < 3$ dan $2x < -1$

Sehingga diperoleh $x < -\frac{1}{2}$

<u>Cara 2</u>

$|x+3| < 2-x$

$\sqrt{(x+3)^2} < 2-x$

$(x+3)^2 < (2-x)^2$

$x^2+6x+9 < 4-4x+x^2$

$10x < -5$

$$x < -\frac{1}{2}$$

E. Rangkuman Bab 3

1. Bilangan pada awalnya adalah suatu ide yang digunakan untuk menggambarkan banyaknya anggota suatu himpunan.
2. Himpunan bilangan riil dinotasikan dengan $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.
3. Secara umum himpunan bilangan riil memuat himpunan bilangan rasional dan himpunan bilangan irrasional.
4. Perbedaan antara bilangan rasional dengan bilangan irasional dapat dilihat pada bentuk desimal.

5. Bilangan rasional senantiasa dapat dinyatakan dalam bentuk desimal yang berulang.
6. Bilangan yang mempunyai bentuk desimal tak berulang merupakan bilangan irasional.
7. Suatu himpunan A dikatakan *denumerable* jika terdapat fungsi bijektif dari $\mathbb{N}$ ke A
8. Suatu himpunan dikatakan terhitung (*countable*) jika himpunan tersebut berhingga atau *denumerable.*
9. Pada himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$ terdapat dua operasi biner, dinotasikan dengan $"+"$ dan $"."$ yang disebut dengan penjumlahan dan perkalian membentuk sistem bilangan riil.
10. Sifat – sifat suatu operasi penjumlahan dan perkalian pada bilangan riil adalah operasi bersifat tertutup, operasi bersifat komutatif, operasi bersifat asosiatif, memiliki unsur identitas, memilki unsur invers, operasi bersifat distributif
11. Himpunan bilangan riil memenuhi sifat urutan yaitu: trikotomi, ketransitifan.
12. Selang hingga merupakan himpunan bagian dari bilangan riil $\mathbb{R}$ yang terbatas di atas dan di bawah.
13. Selang tak hingga merupakan himpunan bagian dari bilangan riil yang tidak terbatas di atas dan di bawah.
14. Jika x adalah bilangan riil, maka nilai mutlak x, ditulis $|x|$, didefinisikan sebagai berikut.

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

Tes Formatif 3

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari $\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} > 0$!
2. Tentukan himpunan penyelesaian dari $-\frac{6}{4} < -3x - 1 < 10$!
3. Tentukan himpunan penyelesaian dari $-2x^2 + 11x < 12$!
4. Gambarkan selang pada garis bilangan riil dari pertidaksamaan $|5 - x| \leq 3$!
5. Tentukan himpunan penyelesaian dari $x^2 < 3x + 10$!
6. Tentukan himpunan penyelesaian dari $\frac{2x-1}{x-1} \leq -3$!
7. Tentukan himpunan penyelesaian dari $|x| + |x - 5| = 5$!
8. Tentukan himpunan penyelesaian dari $|x + 1| = 2x - 3$!
9. Tentukan himpunan penyelesaian dari $|x + 1| \geq 3x - 3$!
10. Tentukan himpunan penyelesaian dari $|3x + 7| < |4x - 8|$!

Cocokanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 3 yang terdapat dibagian akhir bab ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi sistem bilangan riil.

$$\text{Tingkat penguasaan}(x) = \frac{\text{Jumlah jawaban yang benar}}{\text{Jumlah pertanyaan}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan :

$100\% \leq x < 90\%$ baik sekali

$90\% \leq x < 80\%$ baik

$80\% \leq x \leq 70\%$ cukup

$x < 70\%$ kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan materi bab 4. Jika masih di bawah 80% Anda harus mengulangi materi bab 3, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif 3

1. $\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} > 0$

   $x^2 - 2x - 8 > 0$

   $(x-4)(x+2) > 0$

   Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $(-\infty, -2)$ atau $(4, \infty)$.

2. $-\frac{6}{4} < -3x - 1 < 10$

   $$-\frac{2}{4} < -3x < 11$$

   $$-11 < 3x < \frac{2}{4}$$

   $$-\frac{11}{3} < x < \frac{1}{6}$$

3. $-2x^2 + 11x < 12$

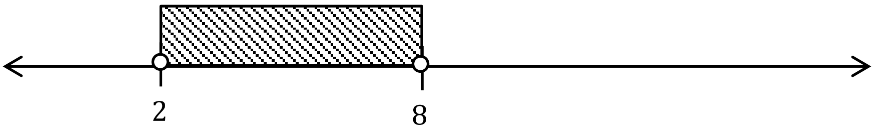
   $2x^2 - 11x + 12 > 0$

   $$\frac{1}{2}(2x-8)(2x-3) > 0$$

   $(x-4)(2x-3) > 0$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $x < \frac{3}{2}$ atau $x > 4$.

4.



5. $4x^2 < 12x + 7$

$4x^2 - 12x - 7 < 0$

$\frac{1}{2}\frac{1}{2}(4x - 14)(4x + 2) < 0$

$(2x - 7)(2x + 1) < 0$

Jadi himpunan penyelesaian adalah $-\frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}$.

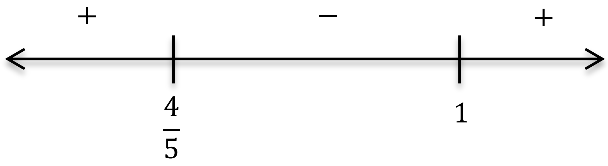
6. $\frac{2x-1}{x-1} + 3 \leq 0$

$$\frac{2x - 1}{x - 1} + \frac{3(x - 1)}{x - 1} \leq 0$$

$$\frac{2x - 1 + 3x - 3}{x - 1} \leq 0$$

$$\frac{5x - 4}{x - 1} \leq 0$$

Pembuat nol dari pembilang dan penyebut adalah $\frac{4}{5}$ dan 1. Pada garis bilangan didapatkan nilai dari tiap selang, yaitu:



Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $[-\frac{4}{5}, 1)$ atau dapat ditulis $\frac{4}{5} \leq x < 1$

7. $|x| + |x - 5| = 5$!
   a. Jika $x \geq 0$ dan $x - 5 \geq 0$ atau $x \geq 5$ maka $x + x - 5 = 5$. Jadi $x = 5$ $(*)$
   b. Jika $x \geq 0$ dan $x - 5 < 0$ atau $x < 5$ maka $x - (x - 5) = 5$. Artinya $0 = 0$. Jadi $0 \leq x \leq 5$ $(**)$
   c. Jika $x < 0$ dan $x - 5 \geq 0$ atau $x \geq 5$ maka $-x + (x - 5) = 5$. Artinya $-5 = 5$ (tidak ada jawaban)
   d. Jika $x < 0$ dan $x - 5 \leq 0$ atau $x \leq 5$ maka $-x - (x - 5) = 5$. Artinya $x = 0$ $(***)$

   Jadi himpunan penyelesaian $\{x | 0 \leq x \leq 5, x \in \mathbb{R}\}$.

8. $|x + 1| = 2x - 3$

   $(x + 1)^2 = (2x - 3)^2$

   $x^2 + 2x + 1 = 4^2 - 12x + 9$

   $3x^2 - 14x + 8 = 0$

   $\frac{1}{3}(3x - 12)(3x - 2) = 0$

   Diperoleh $x_1 = 4$ atau $x_2 = \frac{2}{3}$.

9. $|x + 1| \geq 3x - 3$

   Untuk $x \geq -1$, kita peroleh

$$|x + 1| \geq 3x - 3$$
$$x + 1 \geq 3x - 3$$
$$2x \leq 4$$
$$x \leq 2$$

Karena $x \geq -1$ dan $x \leq 2$ maka $-1 \leq x \leq 2$

Untuk $x < -1$, kita peroleh

$$|x + 1| \geq 3x - 3$$
$$-(x + 1) \geq 3x - 3$$
$$-x - 1 \geq 3x - 3$$
$$4x \leq 2$$
$$x \leq \frac{1}{2}$$

Karena $x < -1$ dan $x \leq \frac{1}{2}$ maka $x < -1$.

Jadi nilai x yang memenuhi pertaksamaan adalah $x \leq 2$.

10. $|3x + 7| < |4x - 8|$!

$(3x + 7)^2 < (4x - 8)^2$

$9x^2 + 42x + 49 < 16x^2 - 64x + 64$

$7x^2 - 106x + 15 > 0$

$\frac{1}{7}(7x - 105)(7x - 1) > 0$

$(x - 15)(7x - 1) > 0$

$x < \frac{1}{7}$ atau $x > 15$

BAB 4

Fungsi

Dalam bab ini, akan membahas relasi dan fungsi yang mencakup materi – materi bahasan sebagai berikut:

1. Konsep dasar relasi.
2. Sifat –sifat relasi.
3. Konsep dasar fungsi.
4. Sifat – sifat fungsi.
5. Kombinasi fungsi.
6. Komposisi fungsi.
7. Fungsi invers.
8. Invers dari fungsi komposisi.

Penulis berharap bagi pembaca yang telah mempelajari bab ini, secara umum diharapkan dapat menjelaskan konsep – konsep dan prinsip – prinsip dari relasi dan fungsi. Adapun capaian pembelajaran mata kuliah (CPMK) pada bab ini sebagai berikut.

1. Menyatakan suatu relasi, mengidentifikasi relasi dan relasi invers, sifat-sifat relasi, serta penutup relasi.
2. Membedakan antara relasi dan fungsi, mengidentifikasi macam-macam dan sifat fungsi, serta menentukan fungsi komposisi dan komposisi invers.

Berdasarkan CPMK yang telah dirancang, selanjutnya berikut merupakan sub – CPMK yang telah dirancang.

1. Mengidentifikasikan suatu relasi dan relasi invers dari suatu himpunan.
2. Mengidentifikasi sifat-sifat relasi.

3. Membentuk relasi tertentu dengan suatu relasi.
4. Membedakan antara relasi dan fungsi.
5. Mengidentifikasi macam-macam dan sifat fungsi.
6. Mengidentifikasi operasi pada fungsi.
7. fungsi komposisi dan fungsi komposisi invers.

Adapun hubungan materi fungsi dengan surat di Al Qur'an, yaitu pada surat Al Anfaal ayat 65 yang berbunyi,

يَـٰٓأَيُّهَا ٱلنَّبِىُّ حَرِّضِ ٱلْمُؤْمِنِينَ عَلَى ٱلْقِتَالِ ۚ إِن يَكُن مِّنكُمْ عِشْرُونَ صَـٰبِرُونَ

يَغْلِبُوا۟ مِا۟ئَتَيْنِ ۚ وَإِن يَكُن مِّنكُم مِّا۟ئَةٌ يَغْلِبُوٓا۟ أَلْفًا مِّنَ ٱلَّذِينَ كَفَرُوا۟ بِأَنَّهُمْ قَوْمٌ

لَّا يَفْقَهُونَ ﴿٦٥﴾

Artinya :Hai nabi, Kobarkanlah semangat para mukmin untuk berperang. jika ada dua puluh orang yang sabar diantaramu, niscaya mereka akan dapat mengalahkan dua ratus orang musuh. dan jika ada seratus orang yang sabar diantaramu, niscaya mereka akan dapat mengalahkan seribu dari pada orang kafir, disebabkan orang-orang kafir itu kaum yang tidak mengerti. (QS. Al Anfaal, 8:65).

Dalam kehidupan sehari – hari, fungsi dan relasi berkaitan dengan istilah hubungan atau koneksi. Pada bidang matematika, relasi digunakan untuk menyatakan suatu hubungan antar himpunan, misalkan hubungan antar himpunan bilangan riil dengan himpunan bilangan rasional, himpunan bilangan bulat dengan himpunan bilangan asli, dan hubungan himpunan – himpunan lainnya. Selain pada bidang matematika, konsep relasi juga dimanfaatkan pada bidang sosiologi, seperti hubungan antar manusia dengan manusia. Ketika manusia ingin memiliki hubungan dengan manusia lain, pastinya akan memiliki syarat – syarat tertentu yang ditetapkan. Seperti relasi untuk pada dunia pendidikan, dimana setiap mahasiswa memiliki syarat tertentu untuk memilih dosen favorit. Ini merupakan beberapa manfaat dalam mempelajari ilmu fungsi dan relasi. Oleh karena itu marilah kita pelajari ilmu fungsi dan relasi agar dapat menemukan manfaat lainnya.

A. Konsep Dasar Relasi

Dalam sistem koordinat kartesius dengan sumbu x dan sumbu y, kita mengetahui bahwa titik dengan koordinat $(7{,}6)$ tidaklah sama dengan titik koordinat $(6{,}7)$. Dalam hal koordinat titik tersebut ternyata bahwa urutan pasangan bilangan itu harus diperhatikan, karena urutan yang berlainan akan menentukan letak titik dalam bidang XOY yang berbeda pula.

Pasangan terurut adalah sepasang bilangan x dan y dengan x dalam urutan pertama dan y dalam urutan kedua, dapat ditulis sebagai (x, y). Berbeda dengan pasangan terurut, bahwa himpunan $\{x, y\}$ sama dengan himpunan $\{y, x\}$, dimana urutan tidak dipentingkan.

Misalkan $A \times B$ adalah produk Kartesius himpunan A dan B, maka relasi atau hubungan $\mathcal{R}$ dari A ke B adalah sembarang himpunan bagian dari produk Kartesius $A \times B$. Dalam hal ini, jika $A = B$ maka $\mathcal{R}$ kita katakan relasi pada A. Pada relasi $\mathcal{R}$ dari A ke B kita definisikan :

1. Himpunan ordinat pertama dari pasangan terurut (x, y) disebut daerah asal (*domain*).
2. Himpunan B, disebut daerah kawan (*kodomain*).
3. Himpunan bagian dari B yang bersifat, setiap $y \in B$ dengan $(x, y) \in \mathcal{R}$ disebut daerah hasil (*range*) relasi $\mathcal{R}$.

Suatu relasi $\mathcal{R} = \{(x, y) | \ x \in A$ dan $x \in B\}$ dapat dinyatakan dalam berbagai bentuk. Hal ini dapat dilihat sebagai berikut.

1. Himpunan Pasangan Berurutan

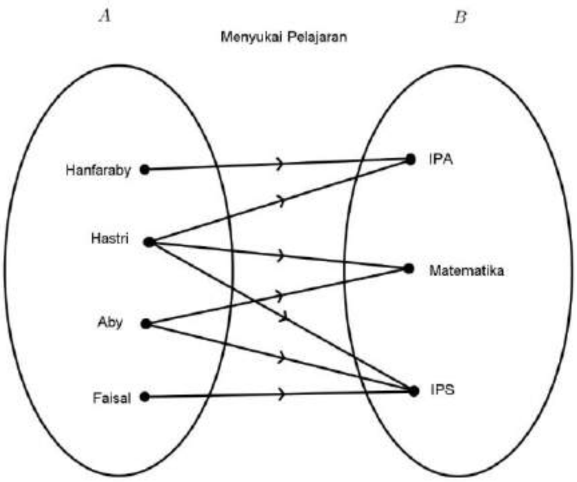
Relasi antara anggota dua himpunan A dan B dapat dinyatakan sebagai pasangan berurutan (x, y) dengan $x \in A$ dan $y \in B$ yang berpasangan.

Contoh 4.1 Misalkan $A =$ {Aby, Faisal, Hanfaraby, Hastri} dan $B =$ {IPA, IPS, Matematika}. Berikut suatu relasi dari A ke B yang dinyatakan sebagai himpunan pasangan berurutan, yaitu $\mathcal{R} =$ {(Hanfaraby, IPA), (Hastri, IPA), (Hastri, Matematika), (Hastri, IPS), (Aby, Matematika), (Aby, IPS), (Faisal, IPS)}.

2. Diagram panah

Relasi dari A ke B yang dinyatakan menggunakan diagram panah menggunakan tanda panah antara anggota A dan B. Tanda panah menyatakan pasangan anggota – anggota yang berelasi, dan arah panah menunjukkan arah relasi tersebut, yaitu dari A ke B. Arah itu tidak boleh terbalik, sebab relasi dari A ke B berbeda dengan relasi dari B ke A.

Contoh 4.2 Berdasarkan contoh dari 4.1 dapat dinyatakan dalam bentuk diagram panah yang dapat dilihat sebagai berikut.



Gambar 4.1 Contoh Diagram Panah

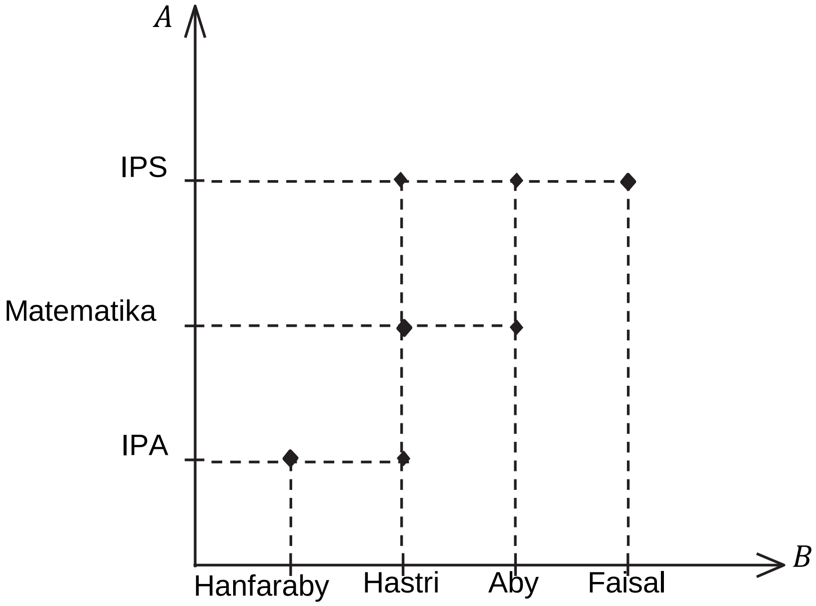
3. Koordinat Kartesuis

Himpunan A dan B dapat dinyatakan dengan koordinat kartesius. Diagram kartesius adalah bidang yang digambarkan oleh dua buah garis yang saling tegak lurus, yaitu garis lurus mendatar (*horisontal*) dan garis lurus tegak (*vertikal*) yang berpotongan pada suatu titik.

> *Math Info*
>
> ***Rene Descartes*** *(1596 – 1650) merupakan filsuf dan matematikawan perancis. Dalam karya Descrates, ia mengembangkan ide dasar sistem koordinat kartesius.*
>
> 

Sehingga anggota himpunan A sebagai himpunan pertama berada pada sumbu mendatar (*horisontal*) dan anggota himpunan B sebagai himpunan kedua berada pada sumbu tegak (*vertikal*). Setiap pasangan anggota himpunan pertama yang berelasi dengan anggota himpunan kedua dinyatakan dengan sebuah noktah.

Contoh 4.3 Berdasarkan contoh dari 4.1 relasi $\mathcal{R}$ dapat dinyatakan dalam bentuk koordinat kartesius yang dapat dilihat sebagai berikut.



Gambar 4.2 Contoh Koordinat Kartesius

4. Tabel

Dalam mempresentasikan relasi ke dalam bentuk tabel, kita dapat mendefinisikan pada kolom pertama sebagai daerah asal (*domain*) dan pada kolom kedua sebagai daerah hasil (*range*).

Contoh 4.4 Berdasarkan contoh dari 4.1 relasi $\mathcal{R}$ dinyatakan dalam bentuk tabel yang dapat dilihat sebagai berikut.

Tabel 4.1
Relasi Menyukai Pelajaran

A	*B*
Hanfaraby	IPA
Hastri	IPA
Hastri	Matematika
Hastri	IPS
Aby	Matematika
Abu	IPS
Faisal	IPS

5. Matriks

Misalkan terdapat suatu himpunan $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ dan himpunan $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_m\}$ maka representasi suatu relasi yang menyatakan hubungan antara himpunan A dan himpunan B adalah $H = [h_{ij}]$, dimana jika terdapat hubungan Antara a_i dan b_j maka h_{ij} diberi nilai 1 dan jika tidak h_{ij} diberi nilai 0. Perhatikan matriks berikut.

$$H = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1m} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nm} \end{bmatrix} \end{array}$$

<u>Contoh 4.5</u> Berdasarkan contoh dari 4.2 relasi $\mathcal{R}$ yang dinyatakan dalam bentuk matriks dapat dilihat sebagai berikut.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Setiap relasi $\mathcal{R}$ dari himpunan A ke himpunan B yang didefinisikan $\mathcal{R} = \{(x, y) |\ x \in A \text{ dan } x \in B\}$ selalu mempunyai relasi invers $\mathcal{R}^{-1}$ dari himpunan B ke himpunan A yang didefinisikan $\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in \mathcal{R}\}$. Sehingga kita dapat katakan bahwa $\mathcal{R}^{-1}$ adalah himpunan semua pasangan terurut yang bersifat bahwa jika urutan anggota dalam pasangan itu ditukar maka pasangan terurut yang baru ini adalah anggota $\mathcal{R}$. Jadi jika $\mathcal{R}$ sebuah relasi dari A ke B maka $\mathcal{R}^{-1}$ adalah sebuah relasi dari B ke A.

<u>Contoh 4.6</u>

1. Misalkan $A = \{a, b, c\}$ dengan relasi $\mathcal{R} = \{(a, b), (a, c), (c, b)\}$ adalah sebuah relasi dari pada A sehingga inversnya adalah $\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a), (c, a), (c, b)\}$.

2. Misalkan $B = \{1,2,3\}$ dan $C = \{d, e\}$ dengan relasi $\mathcal{R} = \{(1, d), (1, e), (2, e), (3, d)\}$ adalah sebuah relasi dari B ke C. Kita miliki bahwa inversnya adalah $\mathcal{R}^{-1} = \{(d, 1), (e, 1), (e, 2), (d, 3)\}$.

B. Sifat – Sifat Relasi

Misalkan $\mathcal{R}$ merupakan suatu relasi pada himpunan A. Berikut adalah beberapa jenis-jenis relasi $\mathcal{R}$ berdasarkan sifat keanggotaannya.

1. Relasi Refleksi

Relasi $\mathcal{R}$ adalah relasi refleksif jika $(a, a) \in \mathcal{R}$ untuk setiap $a \in A$.

2. Relasi Irrefleksi

Relasi $\mathcal{R}$ adalah relasi irefleksif jika untuk setiap $a \in A$ maka $(a, a) \notin \mathcal{R}$.

3. Relasi Simetri

Relasi $\mathcal{R}$ adalah relasi simetri apabila untuk setiap $a, b \in A$ berlaku bahwa jika $(a, b) \in \mathcal{R}$ maka $(b, a) \in \mathcal{R}$.

4. Relasi Antisimetri

Relasi $\mathcal{R}$ adalah relasi antismetri apabila untuk setiap $a, b \in A$ berlaku bahwa jika $(a, b) \in \mathcal{R}$ dan $(b, a) \in \mathcal{R}$ maka $a = b$.

5. Relasi Asimetri

Relasi $\mathcal{R}$ adalah relasi asimetri apabila untuk setiap $a, b \in A$ berlaku bahwa jika $(a, b) \in \mathcal{R}$ maka $(b, a) \notin \mathcal{R}$.

6. Relasi Transitif

Relasi $\mathcal{R}$ adalah relasi transitif apabila untuk setiap $a, b, c \in A$ berlaku bahwa jika $(a, b) \in \mathcal{R}$ dan $(b, c) \in \mathcal{R}$ maka $(a, c) \in \mathcal{R}$.

7. Relasi Ekuivalen

Relasi $\mathcal{R}$ disebut relasi ekuivalen jika $\mathcal{R}$ adalah relasi refleksif, simetri dan transitif.

8. Relasi *Partial Order*

Relasi $\mathcal{R}$ disebut *partial order* jika $\mathcal{R}$ adalah relasi refleksif, antisimetri dan transitif.

Contoh 4.7 Definisikan relasi $\mathcal{R} = \{(b, c)|b^2 = c\}$ pada himpunan bilangan bilangan cacah. Jika kita daftarkan diperoleh $\mathcal{R} = \{(0,0), (1,1), (2,4), (3,9), (4,16), (5,25), (6,36), \dots\}$. Relasi $\mathcal{R}$ memiliki sifat antisimetris karena pasangan (a, b) yang memenuhi $(a, b), (b, a) \in \mathcal{R}$ hanya $(0,0)$ dan $(1,1)$. Selanjutnya, kita peroleh bahwa:

1. Tidak refleksif, karena pilih$b = 3$, maka $(3,3) \notin \mathcal{R}$.
2. Tidak irrefleksif, karena pilih $b = 1$, maka $(1,1) \in \mathcal{R}$.
3. Tidak simetri, karena $(2,4) \in \mathcal{R}$ tetapi $(4,2) \notin \mathcal{R}$.
4. Tidak asimetri, karena pilih $b = 1$ dan $c = 1$ sehingga$(1,1) \in \mathcal{R}$.
5. Tidak transitif, karena terdapat $(2,4) \in \mathcal{R}$ dan $(4,16) \in \mathcal{R}$ tetapi $(2,16) \notin \mathcal{R}$.
6. Tidak ekuivalen, karena tidak bersifat refleksif, simetri dan transitif.
7. Tidak *Partial Order,* karena tidak bersifat refleksif dan transitif, walaupun bersifat antisimetri.

Dari suatu relasi dapat dibentuk relasi baru agar memiliki sifat relasi tertentu. Relasi ini disebut penutup relasi. Terdapat 4 jenis penutup relasi yaitu penutup refleksif, penutup simetri, penutup transitif, penutup transitif – refleksi.

Notasi dan fungsi dari masing – masing penutup relasi tersebut dijelaskan sebagai berikut.

1. $r(\mathcal{R})$: penutup refleksi dari $\mathcal{R}$, yaitu relasi yang didapatkan dengan cara menambahkan anggota ke dalam $\mathcal{R}$ dengan jumlah minimum sehingga bersifat refleksif.
2. $s(\mathcal{R})$: penutup simetri dari $\mathcal{R}$, yaitu relasi yang didapatkan dengan cara menambahkan anggota ke dalam $\mathcal{R}$ dengan jumlah minimum sehingga bersifat simetri.
3. $\mathcal{R}^{+}$: penutup transitif dari $\mathcal{R}$ relasi yang didapatkan dengan cara menambahkan anggota ke dalam $\mathcal{R}$ dengan jumlah minimum sehingga bersifat transitif.
4. $\mathcal{R}^{*}$: penutup transitif – refleksif dari $\mathcal{R}$, relasi yang didapatkan dengan cara menambahkan anggota ke dalam $\mathcal{R}$ dengan jumlah minimum sehingga bersifat transitif – refleksi.

Contoh 4.8 Jika $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ didapat $\mathcal{R} = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)\}$ maka penutup relasinya:

$$r(\mathcal{R}) = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (\underline{1,1}), (\underline{2,2}), (\underline{3,3}), (\underline{4,4}), (\underline{5,5})\}$$

$$s(\mathcal{R}) = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (\underline{2,1}), (\underline{3,2}), (\underline{4,3}), (\underline{5,4})\}$$

$$\mathcal{R}^{+} = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (\underline{1,3}), (\underline{2,4}), (\underline{3,5}), (\underline{1,4}), (\underline{2,5}), (\underline{1,5})\}$$

$$\mathcal{R}^{*} = \mathcal{R}^{+} \cup r(\mathcal{R})$$

$$= \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (\underline{1,3}), (\underline{2,4}), (\underline{3,5}), (\underline{1,4}), (\underline{2,5})(\underline{1,5}), (\underline{1,1}), (\underline{2,2}),$$

$$= (\underline{3,3}), (\underline{4,4}), (5,5)\}$$

C. Konsep Dasar Fungsi

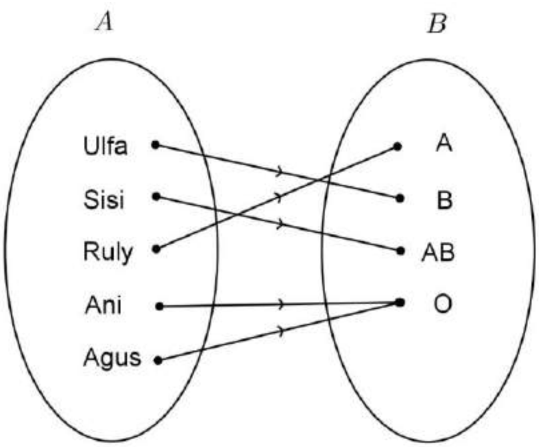
Pada bagian sebelumnya telah dibahas kajian mengenai relasi, selanjutnya kita membahas fungsi yang merupakan kasus khusus dari suatu relasi. Misalkan A dan B suatu himpunan. Secara formal, fungsi dari A ke B, ditulis $f: A \to B$, adalah suatu relasi dari A ke B yang memasangkan setiap anggota dari A dengan tepat satu anggota B.

Math Info

Leonard Euler (1707 – 1783) adalah seorang matematikawan dan fisikawan pioneer dari swiss. Dia mengenalkan banyak notasi dan terminologi matematika modern, terutama untuk analisis matematika, seperti konsep fungsi matematika.

Jika f adalah suatu fungsi dari A ke B dan $a \in A$ maka pasangan dari a di B disebut peta dari a dan kita notasikan $f(a)$, himpunan A disebut domain dari $f\left(D_f\right)$ dan himpunan B disebut kodomain dari $f(K_f)$. Himpunan semua anggota di B yang mempunyai pasangan di A disebut *Range* (R_f).

Suatu fungsi f dari A ke B dapat dinotasikan oleh $f: A \to B$ dengan $D_f = A$, $K_f = B$. Perhatikan diagram panah berikut:

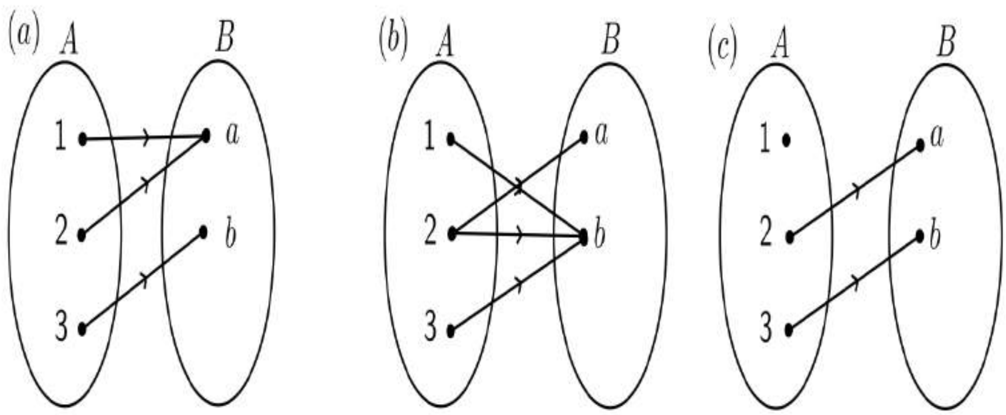


Gambar 4.3 Contoh Konsep Dasar Fungsi

Terdapat dua himpunan, yaitu himpunan P = {Ulfa, Sisi, Ruly, Ani, Agus} dan himpunan Q = {A , B, O, AB}. Setiap anak anggota P dipasangkan dengan tepat satu golongan darah anggota Q. Bentuk ini merupakan contoh relasi yang disebut fungsi atau pemetaan.

Contoh 4.9

1. Dari diagram-diagram panah berikut,manakah yang merupakan fungsi?



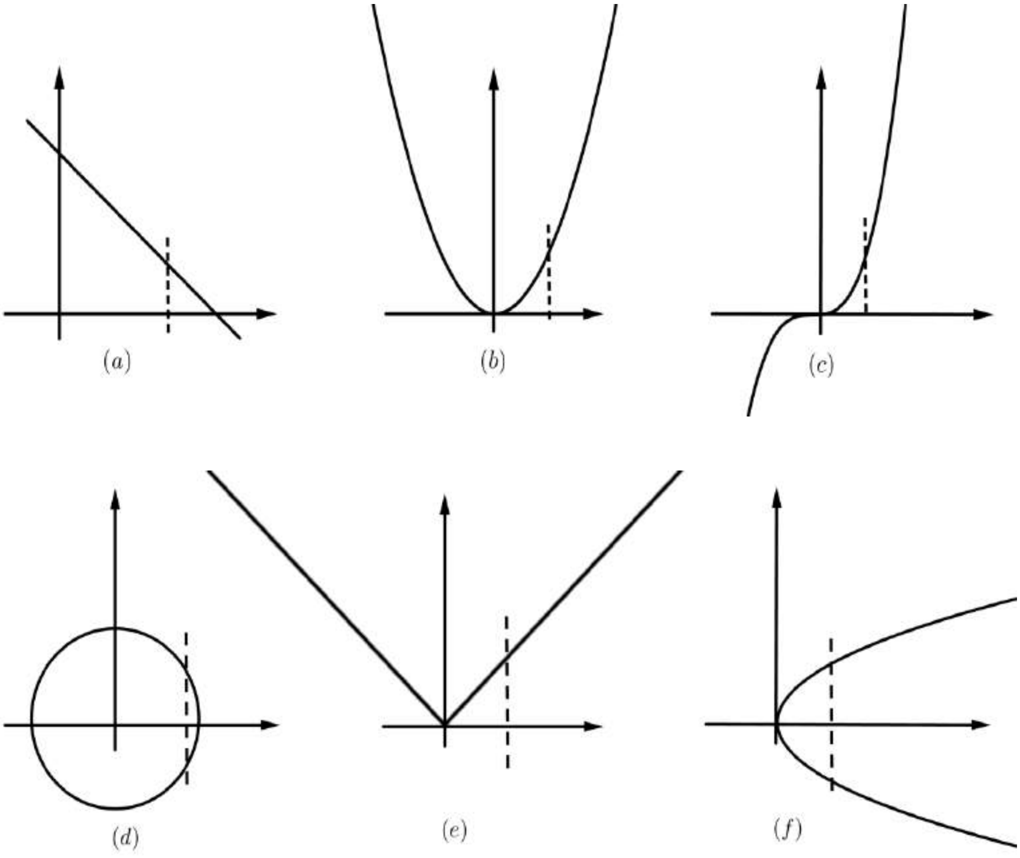
Misalkan himpunan $A = \{1,2,3\}$ adalah domain dan himpunan $B = \{a, b\}$ adalah kodomain.

a. Diagram panah (a) merupakan fungsi karena setiap anggota A dipasangkan dengan tepat satu anggota B.

b. Diagram panah (b) bukan merupakan fungsi karena ada anggota A, yaitu 2, mempunyai dua pasangan anggota di B, yaitu a dan b.

c. Diagram panah (c) bukan merupakan fungsi karena ada anggota A, yaitu 1, tidak mempunyai pasangan anggota di B.

2. Tentukan manakah diagram di bawah ini yang menyatakan fungsi atau bukan !

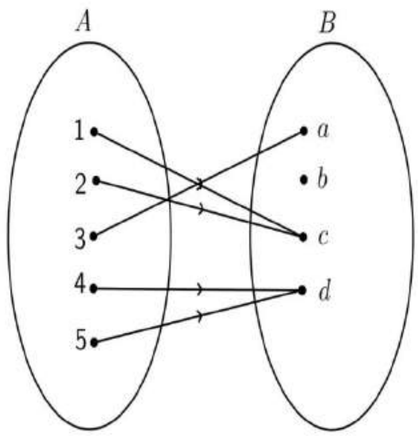


a. Diagram (a) merupakan fungsi karena jika diperhatikan garis lurus yang sejajar sumbu y hanya memotong 1 titik pada grafik.
b. Diagram (b) merupakan fungsi karena jika diperhatikan garis lurus yang sejajar sumbu y hanya memotong 1 titik pada grafik.
c. Diagram (c) merupakan fungsi karena jika diperhatikan garis lurus yang sejajar sumbu y hanya memotong 1 titik pada grafik.
d. Diagram (d) merupakan bukan fungsi karena jika diperhatikan garis lurus yang sejajar sumbu y memotong 2 titik pada grafik.
e. Diagram (e) merupakan fungsi karena jika diperhatikan garis lurus yang sejajar sumbu y hanya memotong 1 titik pada grafik.
f. Diagram (f) merupakan bukan fungsi karena jika diperhatikan garis lurus yang sejajar sumbu y memotong 2 titik pada grafik.

Daerah definisi (daerah asal atau *domain)* dari suatu fungsi real f dinotasikan D_f yang merupakan himpunan semua bilangan riil yang menyebabkan aturan fungsi berlaku atau terdefinisi. Jika himpunan pada *domain* tidak dinyatakan dengan jelas maka *domain* suatu fungsi adalah himpunan bilangan riil. Daerah nilai (daerah hasil atau *Range*) dari suatu fungsi $f(x)$ dinotasikan R_f yang didefinisikan sebagai $R_f = \{y | y = f(x), x \in D_f\}$. Misalkan $f: A \to B$ suatu fungsi dan $y = f(x)$ untuk suatu $x \in A$, maka x kita tulis $f^{-1}(y) = x$. Jika $Y \subset R_f$ maka prapeta dari Y adalah himpunan.

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A | f(x) \in Y\}$$

<u>Contoh 4.10</u> Misalkan $A = \{1,2,3,4,5\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$. Perhatikan diagram panah berikut.



Misalkan $f: A \to B$ yang didefinisikan oleh diagram panah di atas. Di sini tampak $D_f = \{1,2,3,4,5\}$ yang merupakan prapeta dari $R_f = \{a, c, d\}$. Kita miliki juga bahwa:

a. $f^{-1}(\{a\}) = \{3\}$, sebab hanya 3 yang petanya adalah $a \in B$.

b. $f^{-1}(\{c\}) = \{1, 2\}$, sebab 1 dan 2 dipetakan oleh fungsi f pada anggota yang sama, yaitu $c \in B$.

c. $f^{-1}(\{d\}) = \{4,5\}$, sebab 4 dan 5 dipetakan oleh fungsi f pada anggota yang sama, yaitu $d \in B$.

d. $f^{-1}(\{b\}) = \{\,\}$, sebab tidak ada anggota dalam A, yang petanya adalah $b \in B$.

Dalam pembahasan fungsi kita sering membandingkan dua fungsi yang sama. Misalkan $f: A \to B$ dan $g: A \to B$ dua fungsi dari A ke B. Fungsi f dan g dikatakan sama, ditulis $f = g$, jika $f(x) = g(x)$ untuk semua $x \in A$.

Contoh 4.11

1. Diberikan suatu fungsi f yang didefinisikan oleh $f(x) = x^2 + 1$. Perhatikan bahwa jika :

   $x = -1$ maka $f(-1) = 2$

   $x = 0$ maka $f(0) = 1$

   $x = 1$ maka $f(1) = 2$, dan seterusnya.

   a. Jika fungsi tersebut digambarkan pada diagram kartesius maka di setiap titik x selalu terdapat nilai bilangan riil. Maka domain dari fungsi f adalah $D_f = (-\infty, \infty)$.

   b. Karena hasil dari $f(x) = x^2 + 1$ adalah bilangan positif dan nilanya merupakan bilangan riil maka range dari fungsi f adalah $R_f = [1, \infty)$.

2. Diberikan suatu fungsi g yang didefinisikan oleh $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Perhatikan bahwa jika :

   $x = -1$ maka $g(-1) = \sqrt{3}$

   $x = 0$ maka $g(0) = 4$

   $x = 1$ maka $g(1) = \sqrt{3}$ dan seterusnya.

   a. Karena di dalam akar tidak boleh negatif maka syarat untuk D_g adalah $4 - x^2 \geq 0$, sehingga diperoleh $-2 \leq x \leq 2$. Jadi $D_g = [-2,2]$.

   b. Hasil fungsi ini haruslah bilangan bulat tak negatif. Maka $R_g = [0, \infty)$.

Berikut ini akan dibahas mengenai bagaimana menghitung banyaknya pemetaan yang mungkin terjadi dari dua himpunan berhingga. Misalkan $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ ke $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_m\}$ maka banyak semua pemetaan yang mungkin terjadi dari dua himpunan A dan B adalah m^n.

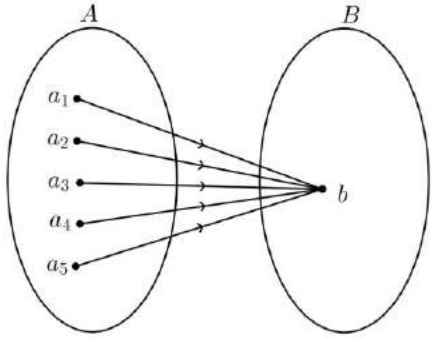
<u>Contoh 4.12</u>

1. Misalkan $A = \{a, b\}$ ke $B = \{p\}$. Banyak pemetaan dari A ke B yang dapat dibuat hanya ada 1 cara, yaitu $f = \{(a, p), (b, p)\}$.
2. Misalkan $A = \{a\}$ ke $B = \{p, q\}$. Banyak pemetaan dari A ke B yang dapat dibuat memiliki 2 cara, yaitu $f = \{(a, p)\}$ dan $g = \{(a, q)\}$.
3. Pemetaan dari $A = \{a, b\}$ ke $B = \{p, q\}$. Banyak pemetaan dari A ke B yang dapat dibuat memiliki 4 cara, yaitu $f_1 = \{(a, p), (b, p)\}$, $f_2 = \{(a, q), (b, q)\}$, $f_3 = \{(a, p), (b, q)\}$ dan $f_4 = \{(a, q), (b, p)\}$.

Ada beberapa fungsi khusus yang sering digunakan dalam keperluan tertentu pada ilmu matematika. Fungsi – fungsi yang dimaksud dapat dilihat sebagai berikut.

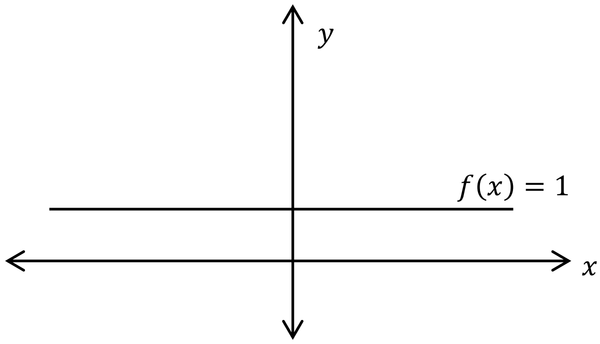
1. Fungsi Konstan

Fungsi f dinamakan fungsi konstan dari A ke B jika fungsi $f: A \to B$ bersifat bahwa setiap $a \in A$ dipetakan pada satu anggota $b \in B$.



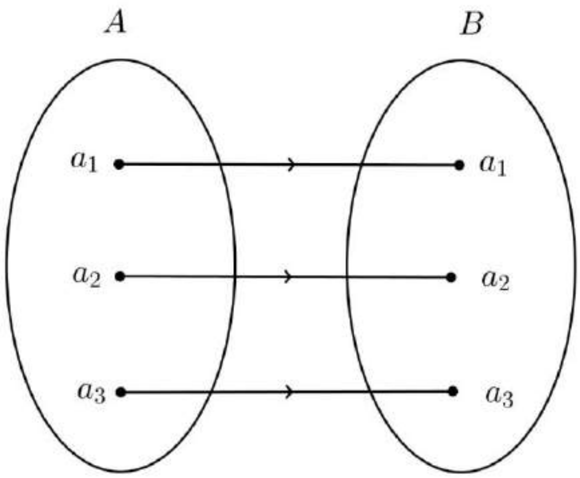
Gambar 4.4 Contoh Fungsi Konstan

Contoh 4.13 Misalkan $f(x) = 1$ untuk setiap bilangan riil x maka fungsi konstan di 1, dapat digambarkan sebagai berikut.



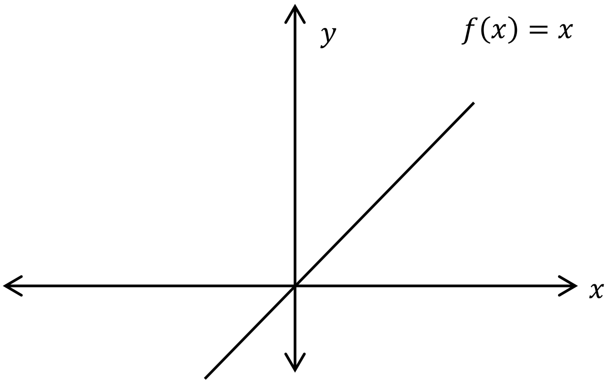
2. Fungsi Satuan (Identitas)

Fungsi f dinamakan fungsi identitas dari A ke B jika f adalah fungsi $f: A \to B$ dengan $B = A$ dan $f(a) = a$ untuk setiap $a \in A$. Kita notasikan fungsi identitas dari A ke A oleh 1_A.



Gambar 4.5 Contoh Fungsi Identitas

Contoh 4.14 Misalkan $f(x) = x$ untuk setiap bilangan riil x, maka grafik fungsi f adalah garis lurus yang melalui titik $O(0,0)$.



3. Fungsi Kaki

a. Fungsi Kaki *Floor*

Misalkan $f(x) = \lfloor x \rfloor$ untuk setiap bilangan riil x dimana $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x. Fungsi ini disebut fungsi kaki *floor* dari x.

Contoh 4.15

1) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ untuk $x = 9{,}5$ yaitu 9.
2) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ untuk $x = -9{,}5$ yaitu -10.

b. Fungsi Kaki *Ceiling*

Fungsi $f(x) = \lceil x \rceil$ untuk setiap bilangan riil x, disebut fungsi kaki *ceiling* dari x, dimana $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari atau sama dengan x.

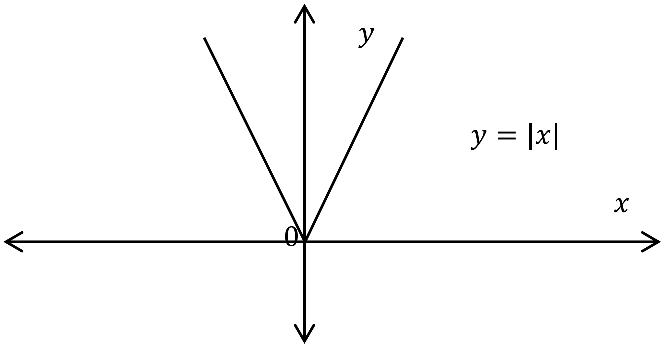
Contoh 4.16

1) $f(x) = \lceil x \rceil$ untuk $x = 9{,}5$ yaitu 10.
2) $f(x) = \lceil x \rceil$ untuk $x = -9{,}5$ yaitu -9.

4. Fungsi Modulus

Fungsi f dinamakan fungsi modulus jika f fungsi yang didefinisikan oleh $f: x \to |x|$ untuk setiap bilangan riil x, dimana $|x|$ adalah nilai mutlak dari x, yaitu:

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$



Gambar 4.6 Contoh Fungsi Modulus

<u>Contoh4.17</u> $|7| = 7,\ |0| = 0$, dan $|-3| = -(-3) = 3$.

5. Fungsi Polinomial

Fungsi f dinamakan fungsi polinomial jika f adalah fungsi suku banyak yang berbentuk $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dan untuk suatu $n \in \mathbb{N}$. Dalam kasus ini, jika $a_n \neq 0$ maka n kita katakan derajat dari fungsi polinomial f.

<u>Contoh 4.18</u> Misalkan $f(x) = x^2 - 3x^4$ dan $g(x) = 3x + 5$ untuk setiap bilangan riil x. Fungsi f adalah fungsi berderajat 2 dan g adalah fungsi berderajat 1.

6. Fungsi Rasional

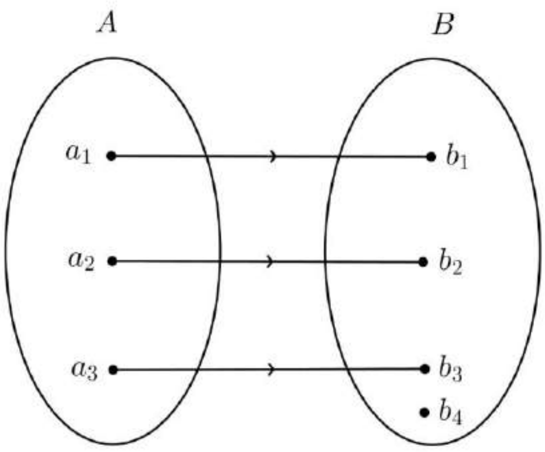
Fungsi f dinamakan fungsi rasional atau disebut juga fungsi pecahan jika $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ dimana $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah fungsi polinomial dengan $Q(x) \neq 0$.

<u>Contoh 4.19</u> Fungsi $(x) = \frac{1}{x-1}$, dan $g(x) = \frac{x^2+7x-3}{3x-8}$ adalah fungsi rasional.

D. Sifat – Sifat Fungsi

1. Fungsi satu – satu (*Injektif*)

Misalkan $f: A \to B$ suatu fungsi dari A ke B. Fungsi f adalah fungsi *injektif* jika $x_1 \neq x_2$ maka $f(x_1) \neq f(x_2)$ untuk setiap $x_1, x_2 \in A$, atau hal ini ekuivalen dengan jika $f(x_1) = f(x_2)$ maka $x_1 = x_2$.



Gambar 4.7 Contoh Fungsi Satu – Satu

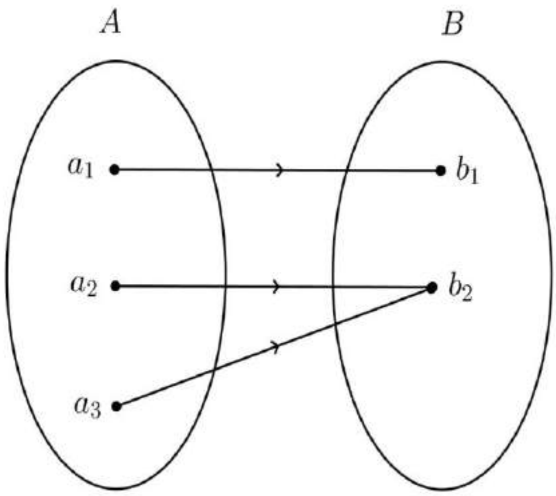
<u>Contoh 4.20</u>

a. $f(x) = x + 3, x \in \mathbb{Z}$ merupakan fungsi *injektif.*

b. $f(x) = x^2, x \in \mathbb{Z}$ bukan merupakan fungsi *injektif*. Karena terdapat $x_1 \neq x_2$ tetapi $f(x_1) = f(x_2)$, yaitu $x_1 = 1$,$x_2 = -1$, dan $f(1) = f(-1) = 1$.

2. Fungsi Pada (Onto / *Surjektif*)

Misalkan $f: A \to B$ suatu fungsi dari A ke B. Fungsi f adalah fungsi surjektif jika *range* dari f sama dengan *kodomain* dari f atau ditulis $R_f = B$.



Gambar 4.8 Contoh Fungsi Pada

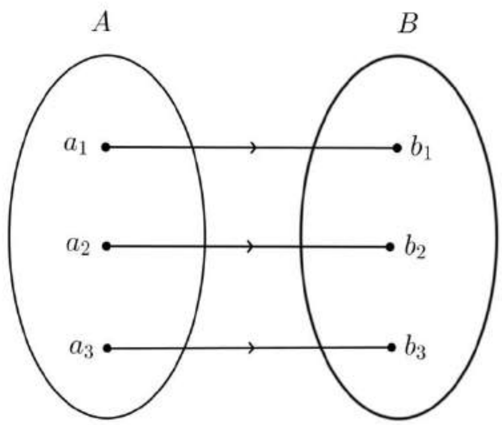
<u>Contoh 4.21</u>

a. $f(x) = x + 3,\ x \in \mathbb{Z}$ merupakan fungsi *sujektif.*

b. $f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{Z}$ bukan merupakan fungsi *sujektif*. Karena terdapat anggota dari *kodomain* yang bukan anggota *range* dari f, yaitu untuk $f(x) = -1$, tidak ada bilangan x di domain sedemikian sehingga $x^2 = -1$.

3. Fungsi Korespodensi Satu – Satu (*Bijektif)*

Misalkan $f: A \to B$ suatu fungsi dari A ke B. Fungsi f adalah fungsi *bijektif* jika f adalah fungsi *injektif* dan *surjektif*.



Gambar 4.9 Fungsi Korespodensi Satu – Satu

<u>Contoh 4.22</u>

a. $f(x) = x + 3, x \in \mathbb{Z}$ merupakan fungsi *bijektif.*

b. $f(x) = x^2, x \in \mathbb{Z}$ bukan merupakan fungsi *bijektif*. Karena f bukan *injektif* dan bukan *surjektif*.

E. Kombinasi Fungsi

Misalkan f dan g adalah fungsi – fungsi riil dengan masing-masing domain D_f dan D_g, maka kita dapat mendefinisikan fungsi-fungsi riil baru seperti contoh di bawah :

1. $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$.
2. $(fg)(x) = f(x).g(x)$.
3. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$.
4. $(c.f)(x) = c.f(x)$, c adalah konstanta.
5. $f^n = f(x)f(x) \ldots f(x)$; $D_{f^n} = D_f$.

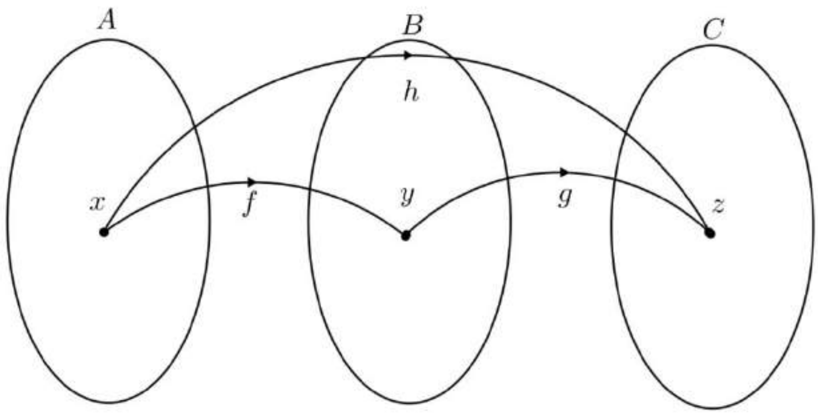
Domain dari kombinasi fungsi f dan g biasanya berupa irisan masing-masing domainnya yaitu $D_f \cap D_g$. Akan tetapi terdapat pengecualian pada beberapa kasus tertentu seperti dalam contoh di bawah ini.

Contoh 4.23 Misalkan $f(x) = \sqrt{x+1}$, dan $(x) = \sqrt{x-1}$, maka:

1. $D_f = \{x|x + 1 \geq 0\}$ atau $D_f = [-1, \infty)$.
2. $D_g = \{x|x - 1 \geq 0\}$ atau $D_g = [1, \infty)$.
3. $D_f \cap D_g = \{x|-1 \leq x \leq 1\}$ atau $D_f \cap D_g = [-1,1]$.
4. $f(x) + g(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$ dengan $D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-1,1]$.
5. $f(x).\,g(x) = \sqrt{(x^2 - 1)}$ dengan $D_{fg} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.
6. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$, dengan $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R}|\ g(x) \neq 0\} = [-1,1] \cap \{x \neq 1\} = [-1,1)$.

F. Komposisi Fungsi

Misalkan $f: A \to B$ dan $g: B \to C$.

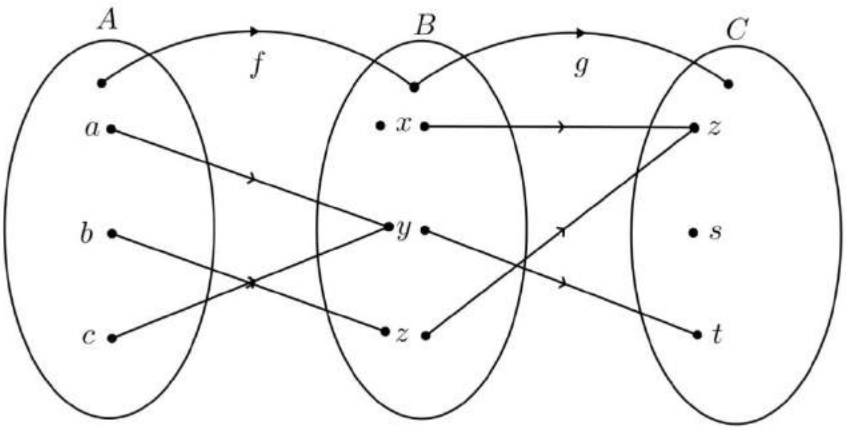


Gambar 4.10 Fungsi Komposisi $h = (g \circ f)$

Fungsi $h = (g \circ f)$ ($\circ$ dibaca komposisi atau bundaran) adalah fungsi $h: A \to C$ yang didefinisikan oleh $h(x) = g\big(f(x)\big)$ untuk setiap $x \in A$. Fungsi baru h ini disebut fungsi komposisi dari f dan g. Perhatikan bahwa$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$ terdefinisi jika $R_f \cap D_g \neq \emptyset$.

Contoh 4.24

1. Misalkan $f: A \to B$ dan $g: B \to C$ yang diberikan pada gambar di bawah ini. Kita peroleh:



$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(y) = t$

$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(z) = r$

$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(y) = t$

2. Misalkan fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dengan $f(x) = 2x^2 + 1$, dan fungsi $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $g(x) = x + 3$. Kita peroleh bahwa:

   a. $f \circ g(x) = f(g(x))$

$$= f((x+3))$$

$$= 2(x+3)^2 + 1$$

$$= 2(x^2 + 6x + 9) + 1$$

$$= 2x^2 + 12x + 19$$

b. $f \circ g(1)$ dapat dihitung dengan cara mensubstitusi $x = 1$ pada $f \circ g(x)$.

$$f \circ g(1) = 2(1)^2 + 12(1) + 19$$

$$= 33$$

c. $g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$

$$= g\big((2x^2 + 1)\big)$$

$$= (2x^2 + 1) + 3$$

$$= 2x^2 + 4$$

d. $g \circ f(2)$ dapat dihitung dengan mensubstitusi $x = 2$ pada $g \circ f(x)$.

$$g \circ f(2) = 2(2)^2 + 4$$

$$= 8$$

3. Diketahui fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dan fungsi $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Jika $f(x) = x + 3$ dan $f \circ g(x) = x^2 + 6x + 7$, maka fungsi $g(x)$ dapat dicari dengan cara sebagai berikut.

$$f \circ g(x) = x^2 + 6x + 7$$

$$f\big(g(x)\big) = x^2 + 6x + 7$$

$$g(x) + 3 = x^2 + 6x + 7$$

$$g(x) = x^2 + 6x + 4$$

Adapun sifat – sifat operasi komposisi pada dapat dilihat sebagai berikut.

Misalkan $f: A \to B$, $g: B \to C, h: C \to D$ maka berlaku:

1. $\big((f \circ g) \circ h\big)(x) = \big(f \circ (g \circ h)\big)(x)$ (sifat asosiatif).
2. $(f \circ 1_A)(x) = (1_B \circ f)(x) = f(x)$ (sifat fungsi identitas).

__**Contoh 4.25**__ Misalkan $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 3 - x$, $h(x) = x^2 + 1$, dan $1_{\mathbb{R}}(x) = x$, maka:

1. $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = 2g(x) + 1 = 2(3 - x) + 1 = 7 - 2x$. Akibatnya:

$$
\begin{aligned}
\big((f \circ g) \circ h\big)(x) &= (f \circ g)\big(h(x)\big) \\
&= (f \circ g)(x^2 + 2) \\
&= 7 - 2(x^2 + 2) \\
&= 3 - 2x^2 \\
&= 2(1 - x^2) + 1 \\
&= f(1 - x^2) \\
&= f\big(3 - (x^2 + 2)\big) \\
&= f\big(g(x^2 + 2)\big) \\
&= f\big((g \circ h)(x)\big)
\end{aligned}
$$

Jadi, $\big((f \circ g) \circ h\big)(x) = \big(f \circ (g \circ h)\big)(x)$.

2. $(f \circ 1_{\mathbb{R}})(x) = f\big(1_{\mathbb{R}}(x)\big)$

$(f \circ 1_{\mathbb{R}})(x) = f(x)$.

G.Fungsi Invers

1. Invers Sebuah Fungsi

Misalkan f adalah suatu fungsi $f: A \to B$, dan fungsi $g: B \to A$ dikatakan invers dari f jika berlaku:

$$f \circ g = 1_B \text{ dan } g \circ f = 1_A.$$

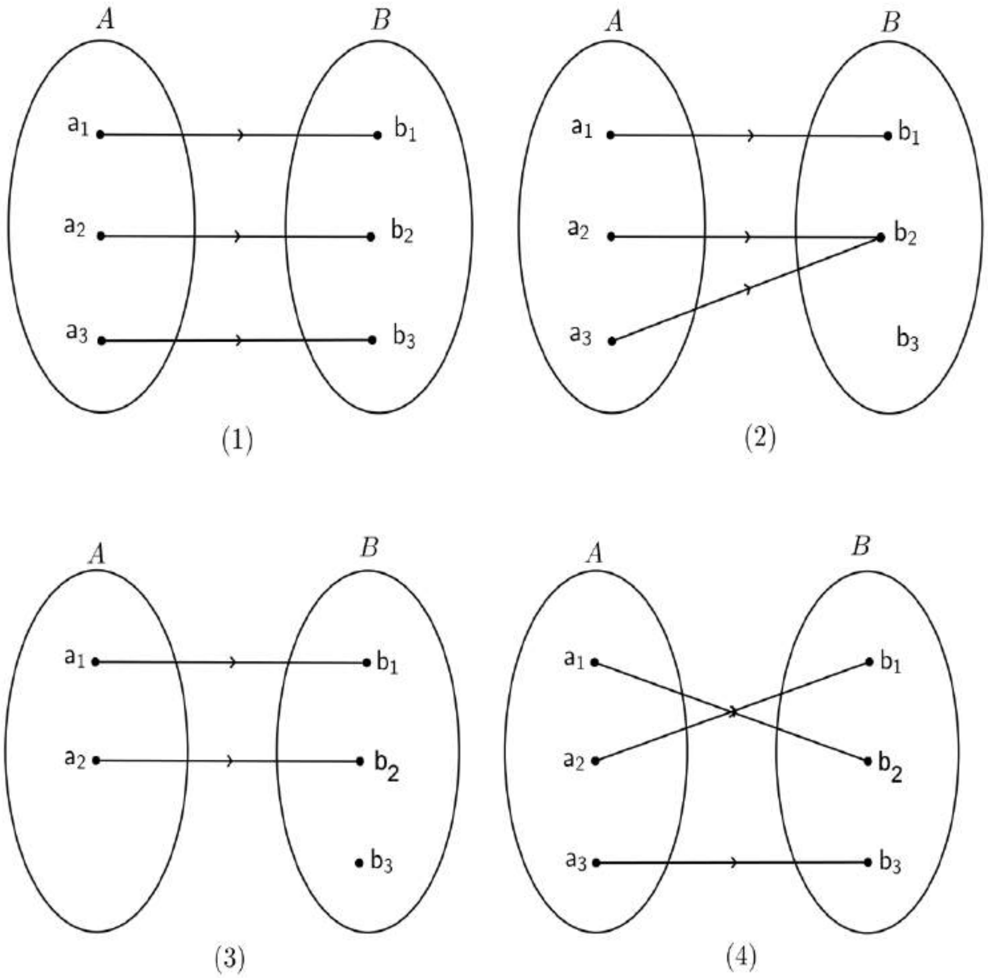
Dalam hal ini fungsi invers dari f kita tulis f^{-1}. Jika fungsi $f: A \to B$ dinyatakan dengan pasangan terurut $f: \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$ dan f memiliki invers maka invers dari fungsi f adalah $f^{-1}: B \to A$ ditentukan oleh $f^{-1} = \{(b, a) | b \in B, a \in A\}$.

Tidak semua fungsi memiliki invers karena fungsi yang memiliki invers hanya fungsi yang bijektif. Kita miliki bahwa:

a. Misalkan fungsi $f: A \to B$, fungsi f mempunyai invers $f^{-1}: B \to A$ jika dan hanya jika f adalah fungsi *bijektif*.
b. Fungsi kuadrat secara umum tidak mempunyai invers tetapi dapat mempunyai invers jika domainnya dibatasi.
c. Cara menentukan suatu grafik mempunyai invers dapat ditarik sembarang garis sejajar sumbu x pada domainnya, bila memotong grafik hanya di satu titik, maka grafik tersebut mempunyai invers. Bila tidak demikian, maka grafik tersebut tidak mempunyai invers.

<u>Contoh 4.26</u>

a. Tentukan manakah grafik di bawah ini fungsi yang memiliki invers/tidak !



Berdasarkan diagram panah di atas, fungsi yang memiliki invers dan yang tidak memilki inves dapat dilihat sebagai berikut.

1) Nomor (1) memiliki invers, karena fungsi tersebut merupakan fungsi *bijektif*.
2) Nomor (2) tidak memiliki invers, karena fungsi tersebut bukan merupakan fungsi *bijektif*.
3) Nomor (3) tidak memiliki invers, karena fungsi tersebut bukan merupakan fungsi *bijektif*.
4) Nomor (4) memiliki invers, karena fungsi tersebut merupakan fungsi *bijektif*.

Tampak bahwa yang fungsi yang memiliki invers hanya pada gambar (1) dan (4).

2. Rumus Umum Fungsi Invers

Dalam menentukan rumus fungsi invers dari fungsi riil dapat dilakukan dengan langkah – langkah berikut.

a. Misalkan $f(x) = y$.
b. Nyatakan x sebagai fungsi dari y dari persamaan diatas.
c. Menentukan rumus f^{-1} dengan melihat persamaan $x = f^{-1}(y)$ pada bagian b.

Cara menentukan rumus fungsi invers dari fungsi linier, fungsi kuadrat, fungsi rasional, fungsi pangkat, dan fungsi logaritma dapat dilihat sebagai berikut.

a. Menentukan fungsi invers dari fungsi linier

Bentuk umum fungsi linier adalah $f(x) = ax + b$.

Misalkan $f(x) = y$, maka $y = ax + b$. Kemudian nyatakan x dalam y sehingga diperoleh:

$$ax = y - b$$

$$x = \frac{y - b}{a}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y - b}{a}$$

Mengganti variabel y dengan variabel x sehingga diperoleh $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$.

<u>Contoh 4.25</u> Fungsi invers dari fungsi $f(x) = -3x + 4$ adalah $f^{-1}(x) = \frac{x-4}{-3}$ atau $f^{-1}(x) = \frac{4-x}{3}$.

b. Menentukan fungsi invers dari fungsi kuadrat

Bentuk umum fungsi kuadrat adalah $f(x) = ax^2 + bx + c$. Dengan membatasi domain fungsi kuadrat ini maka f memiliki invers. Jika $f(x) = ax^2 + bx + c$ memiliki domain $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \geq -\frac{b}{2a}\right\}$ atau $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \leq -\frac{b}{2a}\right\}$ maka f memiliki invers.

Misalkan $f(x) = y$, maka $y = ax^2 + bx + c$. Kemudian nyatakan x dalam y sehingga diperoleh:

$$ax^2 + bx = y - c$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{y-c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{y-c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{y-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{4a(y-c)}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{4ay - 4ac + b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 + 4ay - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 + 4ay - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 + 4ay - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ay - 4ac}}{2a}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ay - 4ac}}{2a}$$

Mengganti variabel y dengan variabel x sehingga diperoleh:

$f^{-1}(x) = \frac{-b+\sqrt{b^2+4ax-4ac}}{2a}$ untuk domain $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \geq -\frac{b}{2a}\right\}$ atau

$f^{-1}(x) = \frac{-b-\sqrt{b^2+4ax-4ac}}{2a}$ untuk domain $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \leq -\frac{b}{2a}\right\}$.

<u>**Contoh 4.27**</u> Fungsi invers dari fungsi $f(x) = 2x^2 + x - 4$ adalah:

$$f^{-1}(x) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ax - 4ac}}{2a}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4(2)x - 4(2)(-4)}}{2(2)}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8x + 32}}{4}$$

$$f^{-1}(x) = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{33 + 8x}}{4},$$

Jadi fungsi inversnya adalah:

$$f^{-1}(x) = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{33+8x}}{4}, \text{ untuk } D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \geq -\frac{1}{4}\right\} \text{ atau}$$

$$f^{-1}(x) = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{33+8x}}{4}, \text{ untuk } D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \leq -\frac{1}{4}\right\}.$$

c. Menentukan fungsi invers dari fungsi rasional

Bentuk umum fungsi rasional adalah $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d},\ \ x \neq -\frac{d}{c}$.

Misalkan $f(x) = y$, maka $y = \frac{ax+b}{cx+d},\ \ x \neq -\frac{d}{c}$. Kemudian nyatakan x dalam y sehingga diperoleh:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d},\ \ x \neq -\frac{d}{c}$$

$$y(cx+d) = ax+b$$

$$ycx - ax = b - dy$$

$$x(cy-a) = b - dy$$

$$x = \frac{b-dy}{cy-a}, \qquad y \neq \frac{a}{c}$$

$$x = \frac{-dy+b}{cy-a}, \qquad y \neq \frac{a}{c}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{-dy+b}{cy-a}, \qquad y \neq \frac{a}{c}$$

Mengganti variabel y dengan variabel x sehingga diperoleh:

$$f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}, \qquad x \neq \frac{a}{c}$$

Contoh 4.28 Fungsi invers dari fungsi $f(x) = \frac{2x+3}{5x-4}$, $y \neq \frac{4}{5}$ adalah $f^{-1}(x) = \frac{4x+3}{5x-2}$, $x \neq \frac{2}{5}$

d. Menentukan fungsi invers dari fungsi pangkat

Bentuk umum fungsi pangkat adalah $f(x) = a^{cx},\ a > 0$.

Misalkan $f(x) = y$, maka $y = a^{cx},\ a > 0$. Kemudian nyatakan x dalam y sehingga diperoleh:

$$y = a^{cx}, \qquad a > 0$$

$$cx = log_a\, y$$

$$x = \frac{1}{c} log_a\, y, \qquad c \neq 0$$

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{c}\log_a y, \qquad c \neq 0$$

Mengganti variabel y dengan variabel x sehingga diperoleh:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{c}\log_a x, \qquad c \neq 0$$

Contoh 4.29 Fungsi invers dari $f(x) = 3^{2x}$adalah $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\log_3 x$.

e. Menentukan fungsi invers dari fungsi logaritma

Bentuk umum fungsi logaritma adalah $f(x) = \log_a cx\, , a > 0, cx > 0$.

Misalkan $f(x) = y$, maka $y = \log_a cx\, ,\ a > 0, cx > 0$. Kemudian nyatakan x dalam y sehingga diperoleh:

$$y = log_a\, cx\,, \qquad a > 0, cx > 0$$

$$cx = a^y$$

$$x = \frac{a^y}{c}, \qquad c \neq 0$$

$$f^{-1}(y) = \frac{a^y}{c}, \qquad c \neq 0$$

Mengganti variabel y dengan variabel x sehingga diperoleh:

$$f^{-1}(x) = \frac{a^x}{c}, \qquad c \neq 0$$

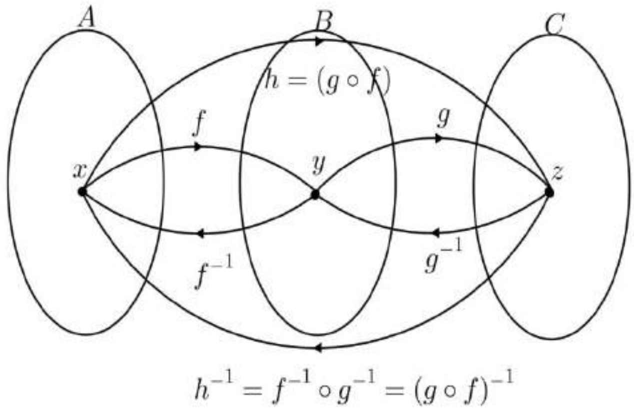
Contoh 4.30 Fungsi invers dari $f(x) = \log_2 5x$ adalah $f^{-1}(x) = \frac{2^x}{5}$.

H. Invers Dari Fungsi Komposisi

Misalkan fungsi f dan fungsi g masing-masing merupakan fungsi *bijektif* sehingga mempunyai fungsi invers f^{-1} dan g^{-1}. Misalkan $h(x)$ adalah fungsi komposisi yang dibentuk dari dua fungsi $f(x)$ dan fungsi $g(x)$. Fungsi $h(x)$ kemungkinannya adalah sebagai berikut:

1. $\boldsymbol{h(x) = (g \circ f)(x)}$

Jika terdapat fungsi komposisi $(g \circ f)$ maka, misalkan $h = (g \circ f)$ dapat dianggap menjadi satu fungsi, yaitu fungsi h. Dari diagram panah fungsi komposisi $(g \circ f)$ kita dapat menentukan invers dari $(g \circ f)$. Diagram panah untuk fungsi h dan inversnya dapat dilihat sebagai berikut.



Gambar 4.11 Fungsi Komposisi Invers $h^{-1} = (g \circ f)^{-1}$

Pada gambar 4.11. dapat dijelaskan bahwa fungsi h^{-1} dipetakan dari fungsi g^{-1} lalu hasil petanya dipetakan kembali ke fungsi f^{-1}. Perhatikan tabel berikut ini.

Fungsi	Himpunan Domain	Himpunan Range	Fungsi Invers	Himpunan Domain	Himpunan Range
f	A	B	f^{-1}	B	A
g	B	C	g^{-1}	C	B
h	A	C	h^{-1}	C	A
$h = g \circ f$			$h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$		

Contoh 4.31 Diketahui fungsi $h = g \circ f$ dengan $f(x) = 2x - 3$ dan $g(x) = \frac{1}{3x+1}, x \neq -\frac{1}{3}$. Sehingga $h^{-1}(x)$ dapat dikerjakan dengan cara sebagai berikut.

Cara 1:$h^{-1}(x) = (g \circ f)^{-1}(x)$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= g(2x - 3)$$

$$= \frac{1}{3(2x-3)+1}$$

$$= \frac{1}{6x-9+1}$$

$$= \frac{1}{6x-8} \quad , \qquad x \neq \frac{4}{3}$$

Selanjutnya untuk menentukan $(g \circ f)^{-1}(x)$ dapat kita misalkan $y = \frac{1}{6x-8}$ sehingga:

$$y = \frac{1}{6x-8}$$

$$y(6x-8) = \frac{1}{6x-8}(6x-8)$$

$$y(6x-8) = 1$$

$$6yx - 8y = 1$$

$$6yx - 8y + 8y = 1 + 8y$$

$$6yx = 8y + 1$$

$$\frac{6xy}{6y} = \frac{8y}{6y} + \frac{1}{6y}$$

$$x = \frac{4}{3} + \frac{1}{6}y$$

Jadi $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{1}{6}x + \frac{4}{3}$

Cara 2: $\boldsymbol{h^{-1}(x) = f^{-1} \circ g^{-1}(x)}$

Terlebih dahulu kita tentukan nilai $f^{-1}(x)$, yang dapat dilihat berikut ini.

Misalkan $y = 2x - 3$, sehingga:

$y = 2x - 3$

$y - 2x = 2x - 3 - 2x$

$y - 2x = -3$

$y - 2x - y = -3 - y$

$-2x = -3 - y$

$2x = y + 3$

$\frac{2x}{2} = \frac{y}{2} + \frac{3}{2}$

$x = \frac{y}{2} + \frac{3}{2}$

Jadi $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$

Selanjutnya kita kan tentukan nilai $g^{-1}(x)$ yang dapat dilihat berikut ini.

Misalkan $y = \frac{1}{3x+1}$, $x \neq -\frac{1}{3}$, sehingga:

$y = \frac{1}{3x + 1}$

$y(3x + 1) = \frac{1}{3x + 1}(3x + 1)$

$3yx + y = 1$

$3yx + y - y = 1 - y$

$3yx = 1 - y$

$$\frac{3yx}{3y} = \frac{1}{3y} - \frac{y}{3y}$$

$$x = \frac{1}{3y} - \frac{1}{3}$$

Jadi $g^{-1}(x) = \frac{1}{3x} - \frac{1}{3},\ \ x \neq 0$

Sehingga nilai dari $h^{-1}(x) = f^{-1} \circ g^{-1}(x)$ dapat dilihat berikut ini.

$$h^{-1}(x) = f^{-1} \circ g^{-1}(x)$$

$$= f^{-1}\left(g^{-1}(x)\right)$$

$$= f^{-1}\left(\frac{1}{3x} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{3x} - \frac{1}{3}}{2} + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{\frac{1-x}{3x}}{2} + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1-x}{3x(2)} + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1-x}{6x} + \frac{3(3x)}{6x}$$

$$= \frac{1-x+9x}{6x}$$

$$= \frac{8x+1}{6x}$$

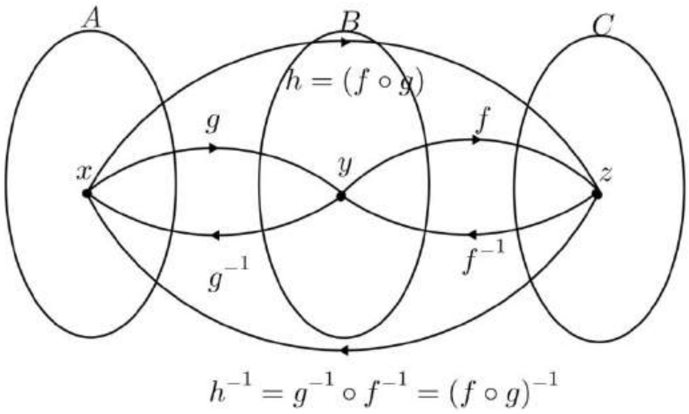
$$= \frac{8x}{6x} + \frac{1}{6x}$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{1}{6x}$$

Jadi $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = \frac{1}{6}x + \frac{4}{3}$

2. $\boldsymbol{h(x) = (f \circ g)(x)}$

Jika terdapat fungsi komposisi $(f \circ g)$ maka, kita misalkan $h = (f \circ g)$ dapat dianggap menjadi satu fungsi, yaitu fungsi h. Dari diagram panah fungsi komposisi, kita dapat menentukan invers dari $(f \circ g)$. Diagram panah untuk fungsi h dan inversnya dapat dilihat sebagai berikut.



Gambar 4.12 Fungsi Komposisi Invers $\boldsymbol{h^{-1} = (f \circ g)^{-1}}$

Pada gambar 4.12. dapat dijelaskan bahwa fungsi h^{-1} dipetakan dari fungsi f^{-1} lalu hasil petanya dipetakan kembali ke fungsi g^{-1}. Perhatikan tabel berikut ini.

Fungsi	Himpunan Domain	Himpunan Range	Fungsi Invers	Himpunan Domain	Himpunan Range
g	A	B	g^{-1}	B	A
f	B	C	f^{-1}	C	B
h	A	C	h^{-1}	C	A
$h = f \circ g$			$h^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$		

Contoh 4.32 Diketahui fungsi $h = f \circ g$ dengan $f(x) = 2x - 3$ dan $g(x) = \frac{1}{3x+1}, x \neq -\frac{1}{3}$. Sehingga $h^{-1}(x)$ dapat dikerjakan dengan cara sebagai berikut.

Cara 1: $h^{-1}(x) = (f \circ g)^{-1}(x)$

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

$$= f\left(\frac{1}{3x+1}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{3x+1}\right) - 3$$

$$= \frac{2}{3x+1} - 3$$

$$= \frac{2}{3x+1} - \frac{3(3x+1)}{3x+1}$$

$$= \frac{2 - 9x - 3}{3x+1}$$

$$= \frac{-9x-1}{3x+1} \quad , \quad x \neq -\frac{1}{3}$$

Selanjutnya untuk menentukan $(f \circ g)^{-1}(x)$ dapat kita misalkan $y = \frac{-9x-1}{3x+1}$ sehingga:

$$y = \frac{-9x-1}{3x+1}$$

$$y(3x+1) = \frac{-9x-1}{3x+1}(3x+1)$$

$$y(3x+1) = -9x - 1$$

$3xy + y = -9x - 1$

$3xy + y + 9x = -9x - 1 + 9x$

$3xy + y + 9x - y = -1 - y$

$3xy + 9x = -1 - y$

$x(3y + 9) = -1 - y$

$$\frac{x(3y + 9)}{3y + 9} = \frac{-1 - y}{3y + 9}$$

$$x = -\frac{y + 1}{3y + 9}$$

Jadi $(f \circ g)^{-1}(x) = -\frac{x+1}{3x+9}, x \neq -3$

<u>Cara 2: $h^{-1}(x) = g^{-1} \circ f^{-1}(x)$</u>

Telah diperoleh nilai $f^{-1}(x)$, yaitu $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$, sedangkan nilai $g^{-1}(x)$, yaitu $g^{-1}(x) = \frac{1}{3x} - \frac{1}{3}$, $x \neq 0$.

Sehingga nilai dari $h^{-1}(x) = g^{-1} \circ f^{-1}(x)$ dapat dilihat berikut ini.

$$\begin{aligned} h^{-1}(x) &= g^{-1} \circ f^{-1}(x) \\ &= g^{-1}\left(f^{-1}(x)\right) \\ &= g^{-1}\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{1}{3\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\right)} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{3}{3\left(\frac{3x+9}{2}\right)} - \frac{\frac{3x+9}{2}}{3\left(\frac{3x+9}{2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{6-3x-9}{2}}{3\left(\frac{3x+9}{2}\right)}$$

$$= \frac{-3x-3}{9x+27}$$

$$= -\frac{x+1}{3x+9}$$

Jadi $(g \circ f^{-1})(x) = -\frac{x+1}{3x+9},\ x \neq -3.$

I. Latihan Soal Bab 4

1. Relasi antara dua himpunan A dan B dinyatakan sebagai himpunan pasangan berurutan $\mathcal{R} = \{(0,0),(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)\}$.

   a. Tulislah anggota – anggota himpunan A dan B yang mungkin dengan mendaftar anggota – anggotanya!

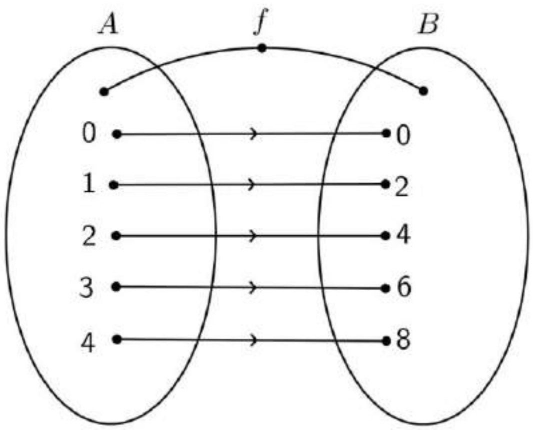
   Penyelesaian:

   $A = \{0,1,2,3,4\}$

   $B = \{0,2,4,6,8\}$

   b. Gambarlah diagram panah dari kedua himpunan tersebut!

   Penyelesaian:



c. Tuliskan relasi yang terbentuk dari himpunan A ke himpunan B sebagai fungsi dari A ke B!

Penyelesaian:

Setiap anggota di himpunan A dua kali di himpunan B, jadi dapat didefinisikan $f(x) = 2x,$ untuk setiap $x \in \{0,1,2,3,4\}$.

d. Tentukan sifat yang dimiliki oleh relasi $\mathcal{R}$!

Penyelesaian:

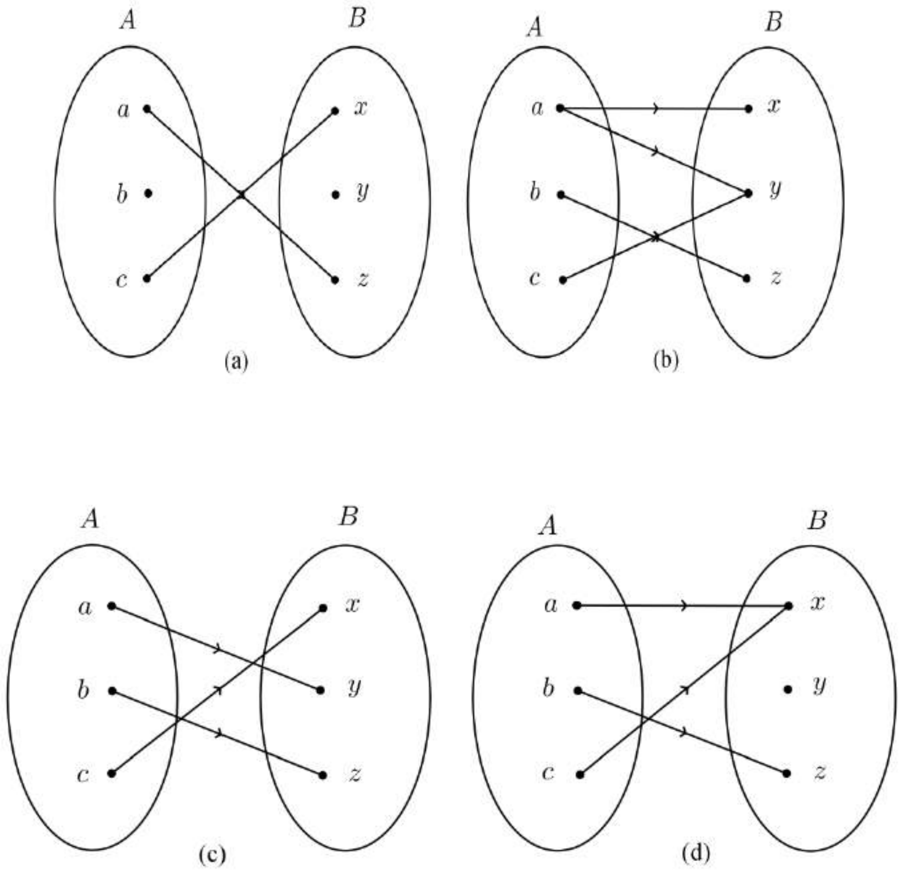
Antisimetri, karena $(0,0) \in \mathcal{R}$ dan setiap $(a, b) \in \mathcal{R}$ dengan $a \neq b$ maka $(b, a) \notin \mathcal{R}$

2. Tentukan $s(\mathcal{R})$ dari $\mathcal{R} = \{(0,0), (1,2), (2,4), (3,6), (4,8)\}$!

Penyelesaian:

$s(\mathcal{R}) = \{(0,0), (1,2), (2,4), (3,6), (4,8), (\underline{2,1}), (\underline{4,2}), (\underline{6,3}), (\underline{8,4})\}$

3. Dari diagram di bawah ini, Tentukan mana yang merupakan fungsi/bukan !



Penyelesaian:

Misalkan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{x, y, z\}$.

a. Diagram panah (a) merupakan bukan fungsi karena $b \in A$ tidak terpasang dengan anggota B.
b. Diagram panah (b) merupakan bukan fungsi karena $a \in A$ memiliki dua pasangan di B.
c. Diagram panah (c) merupakan fungsi.
d. Diagram panah (d) merupakan fungsi.

4. Diketahui $g(x) = x^2 + 2$ dengan domain $D_g = \{x|-4 < x < 2, x \in \mathbb{Z}\}$ dan kodomain bilangan bulat.

   a. Tuliskan domain D_g dengan mendaftar anggota-anggotanya.

Penyelesaian: $D_g = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$

b. Tentukan daerah hasil R_g

Penyelesaian: Kita miliki:

$g(-3) = (-3)^2 + 2 = 11,$

$g(-2) = (-2)^2 + 2 = 6,$

$g(-1) = (-1)^2 + 2 = 3,$

$g(0) = 0^2 + 2 = 2,$

$g(1) = 1^2 + 2 = 3$

Jadi, $R_g = \{2,3,6,11\}$.

5. Tentukan apakah fungsi $f(x) = x^2 - 6x + 2$ termasuk fungsi injektif, fungsi surjektif, atau fungsi bijektif!

   Penyelesaian: Fungsi f bukan termasuk fungsi injektif karena $f(2) = f(4) = -6$, fungsi f bukan fungsi surjektif karena $f(x) \geq -7$ untuk setiap bilangan x. Kita simpulkan f bukan fungsi bijektif.

6. Diketahui $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = 2x - 5$. Tentukan $f^{-1}(x)$!

   Penyelesaian: Kita ketahui bahwa jika $f(x) = ax + b,\ a \neq 0$ maka $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$, $a \neq 0$. Sehingga $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$.

7. Diketahui $f(x) = x^2 - 6x + 4$. Tentukan $f^{-1}(x)$ untuk masing-masing domain dari $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 3\}$ dan $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 3\}$!

   Penyelesaian:

Misalkan $f(x) = ax^2 + bx + c$, maka $f^{-1}(x) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2+4ax-4ac}}{2a}$. Sehingga $f^{-1}(x) = \frac{6 \pm \sqrt{36+4x-16}}{2}$

$$f^{-1}(x) = 3 \pm \frac{\sqrt{36+4x-16}}{2}$$

$$f^{-1}(x) = 3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{20+4x} = 3 + \sqrt{5+x}$$

Jadi $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{5+x}$ untuk $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 3\}$ dan

$f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{5+x}$ untuk $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 3\}$.

8. Diketahui $f(x) = \frac{2x+1}{x-4}, x \neq 4$. Tentukan $f^{-1}(x)$!

   Penyelesaian: Misalkan $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, x \neq -\frac{d}{c}$, maka $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}, x \neq \frac{a}{c}$. Jadi, $f^{-1}(x) = \frac{4x+1}{x-2}, x \neq 2$.

9. Tentukan rumus fungsi $g(x)$ jika diketahui $f(x) = x + 3$ dan $(f \circ g)(x) = 3x - 5$!

   Penyelesaian:

   $(f \circ g)(x) = 3x - 5$

   $f(g(x)) = 3x - 5$

   $g(x) + 3 = 3x - 5$

   $g(x) = 3x - 8$.

10. Diketahui $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 2$, $g^{-1}(x) = \frac{4x+5}{x-2}$ dan $h(x) = (g \circ f)(x)$. Tentukan $h^{-1}(x)$!

Penyelesaian: Ada dua cara dalam menyelesaikan persoalan ini.

Cara 1:

Kita ketahui bahwa $f^{-1} \circ f(x) = x$, sehingga:

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x$$

$$\frac{1}{2}f(x) - 2 = x$$

$$f(x) = 2x + 4$$

Diketahui bahwa $g^{-1} \circ g(x) = x$, sehingga:

$$g^{-1}\big(g(x)\big) = x$$

$$\frac{4g(x) + 5}{g(x) - 2} = x$$

$$4g(x) + 5 = xg(x) - 2x$$

$$xg(x) - 4g(x) = 2x + 5$$

$$g(x) = \frac{2x + 5}{x - 4}, \qquad x \neq 4$$

Selanjutnya $h(x) = (g \circ f)(x)$ diperoleh sebagai berikut:

$$h(x) = g\big(f(x)\big)$$

$$= g(2x + 4)$$

$$= \frac{2(2x + 4) + 5}{(2x + 4) - 4}$$

$$= \frac{4x+13}{2x}, \qquad x \neq 0$$

Maka $h^{-1}(x) = \frac{13}{2x-4}$, $x \neq 2$.

Cara 2:

Karena $h(x) = (g \circ f)(x)$ maka dalam mencari h^{-1} dapat menggunakan $h^{-1}(x) = f^{-1} \circ g^{-1}(x)$, perhatikan berikut:

$$h^{-1}(x) = f^{-1} \circ g^{-1}(x)$$

$$= f^{-1}\left(g^{-1}(x)\right)$$

$$= f^{-1}\left(\frac{4x+5}{x-2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4x+5}{x-2}\right) - 2$$

$$= \frac{3}{2x-4}, x \neq 2$$

J. Rangkuman Bab 4

1. Misalkan $A \times B$ adalah produk Kartesius himpunan A dan B, maka suatu relasi atau hubungan $\mathcal{R}$ dari A ke B adalah suatu himpunan bagian dari produk Kartesius $A \times B$.
2. Pada relasi $\mathcal{R} = \{(x,y) | \, x \in A \text{ dan } x \in B\}$. Himpunan ordinat pertama dari pasangan terurut (x,y) disebut daerah asal (*domain*), himpunan B, disebut daerah kawan (*kodomain*), himpunan bagian dari B yang bersifat $y \in B$ dengan $(x,y) \in \mathcal{R}$ disebut daerah hasil (*range*) relasi $\mathcal{R}$.
3. Suatu relasi $\mathcal{R} = \{(x,y) | \, x \in A \text{ dan } x \in B\}$ dapat dinyatakan dalam himpunan pasangan berurutan, diagram panah, koordinat kartesius, tabel, matriks.

4. Jenis-jenis relasi berdasarkan sifat keanggotaannya, yaitu relasi refleksi, relasi irrefleksi, relasi simetri, relasi antisimetri, relasi asimetri, relasi transitif, relasi ekuivalen, relasi partial order.
5. Terdapat 4 jenis penutup relasi yaitu penutup refleksi, penutup simetri, penutup transitif, penutup transitif – refleksi.
6. Misalkan A dan B suatu himpunan. Suatu fungsi dari A ke B adalah suatu relasi khusus dari A ke B. Secara formal, fungsi dari A ke B, ditulis $f: A \to B,$ adalah suatu relasi dari A ke B yang memasangkan setiap anggota dari A dengan tepat satu anggota B.
7. Ada beberapa fungsi khusus yang sering digunakan dalam keperluan tertentu pada ilmu matematika, yaitu fungsi konstan, fungsi satuan (identitas), fungsi kaki, fungsi modulus, fungsi 177olynomial, fungsi rasional.
8. Sifat sifat fungsi diantara lain, fungsi satu –satu (injektif), fungsi pada (surjektif), fungsi bijektif.
9. Misalkan f adalah suatu fungsi $f: A \to B$, dan misalkan untuk suatu $a \in A$, petanya adalah $f(a) = b \in B$. Prapeta dari $b \in B$ dinotasikan dengan $f^{-1}(\{b\})$ adalah himpunan $f^{-1}(\{b\}) = \{a \in A |\, f(a) = b\}$.
10. Komposisi fungsi adalah penggabungan operasi dua fungsi secara berurutan sehingga menghasilkan sebuah fungsi baru.
11. Misalkan fungsi f dan fungsi g masing-masing merupakan fungsi *bijektif* sehingga mempunyai fungsi invers f^{-1} dan g^{-1}.

Tes Formatif 4

1. Relasi antara dua himpunan Adan B dinyatakan sebagai himpunan pasangan berurutan $\mathcal{R} = \{(1,5), (2,10), (3,15), (4,20)\}$.
   a. Tulislah anggota – anggota himpunan A dan B yang mungkin dengan mendaftar anggota – anggotanya!
   b. Gambarlah diagram panah dari kedua himpunan tersebut!
   c. Tulis relasi $\mathcal{R}$ sebagai fungsi dari himpunan A ke himpunan B !
   d. Tentukan sifat yang dimiliki oleh relasi $\mathcal{R}$!
2. Tentukan $s(\mathcal{R})$ dari $\mathcal{R} = \{(1,5), (2,10), (3,15), (4,20)\}$!
3. Misalkan $A = \{a, b, c, d\}$. Tentukan apakah setiap himpunan pasangan terurut berikut merupakan sebuah fungsi dari A ke A!
   a. $f_1 = \{(b,a), (c,d), (d,a), (c,d), (a,d)\}$
   b. $f_2 = \{(d,d), (c,a), (a,b), (d,b)\}$
   c. $f_3 = \{(a,b), (b,b), (c,b), (d,b)\}$
   d. $f_4 = \{(a,a), (b,a), (a,b), (c,d), (d,a)\}$
4. Diketahui $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.
   a. Tentukan domain dari g.
   b. Tentukan daerah hasil g
5. Tentukan apakah fungsi $f(x) = x^3$ termasuk fungsi injektif, fungsi surjektif, atau fungsi bijektif!
6. Diketahui $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = \sqrt[5]{1 - x^3} + 2$. Tentukan $f^{-1}(x)$!
7. Diketahui $f(x) = 5^{2x}$. Tentukan $f^{-1}(x)$!
8. Diketahui$f(x) = \frac{2x+1}{x-4}, x \neq 4$. Tentukan nilai k dari $f^{-1}(k) = 1$!
9. Misalkan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dan $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Jika fungsi $f(x) = 2x + 4$ dan fungsi $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 12x + 6$ maka tentukan $g(x)$!

10. Diketahui $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = 3 - x$ dan $h(x) = \frac{4}{x}. x \neq 0$. Tentukan nilai x sehingga $(h \circ g \circ f)^{-1}(x) = 1$!

Cocokanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 4 yang terdapat dibagian akhir bab ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi fungsi.

$$\text{Tingkat penguasaan}(x) = \frac{\text{Jumlah jawaban yang benar}}{\text{Jumlah pertanyaan}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan :

$100\% \leq x < 90\%$ baik sekali

$90\% \leq x < 80\%$ baik

$80\% \leq x \leq 70\%$ cukup

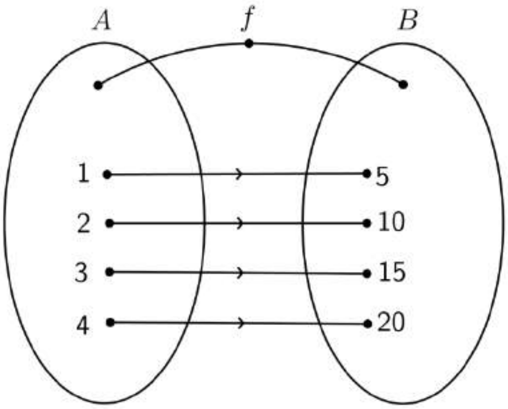
$x < 70\%$ kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan materi bab 5. Jika masih di bawah 80% Anda harus mengulangi materi bab 4, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif 4

1. a. $A = \{1,2,3,4\}$ dan $B = \{5,10,15,20\}$

   b.



   c. Setiap anggota di himpunan A dua kali di himpunan B dan dapat didefinisikan $f(x) = 2x,\ 0 \leq x \leq 4$.

   d. Irrefkleksi, Antisimetri, Asimetri.

2. $s(\mathcal{R}) = \{(1,5),(2,10),(3,15),(4,20),(\underline{5,1}),(\underline{10,2}),(\underline{15,3}),(\underline{20,4})\}$
3. a. Iya

   b. Bukan

   c. Iya

   d. Bukan
4. a. $D_g = \{x | x \leq -2 \cup x \geq 2, x \in \mathbb{R}\}$

   b. $R_g = \mathbb{R}^+$
5. Fungsi f termasuk fungsi bijektif.
6. Misalkan $y = \sqrt[5]{1 - x^3} + 2$ maka :

$(y-2)^5 = 1 - x^3$

$(y-2)^5 - 1 = -x^3$

$x^3 = 1 - (y-2)^5$

$x = \sqrt[3]{1-(y-2)^5}$

Sehingga $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{1-(x-2)^5}$.

7. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\log_5 x$
8. $f^{-1} = \frac{4x+1}{x-2}, x \neq 2$

$f^{-1}(k) = 1$

$$\frac{4k+1}{k-2} = 1$$

$k - 2 = 4k + 1$

$3k = -3$

$k = -1$

9. $g\big(f(x)\big) = 4x^2 + 12x + 6$

$g(2x+4) = 4x^2 + 12x + 6$

Misalkan $y = 2x + 4$ maka $x = \frac{y-4}{2}$, sehingga:

$$g(x) = 4\left(\frac{x-4}{2}\right)^2 + 12\left(\frac{x-4}{2}\right) + 6$$

$$= x^2 - 2x - 2$$

10. $(h \circ g \circ f)(x) = h\big(g(2x-1)\big)$

$$= h\big(3-(2x-1)\big)$$

$$= \frac{4}{4-2x}$$

$$(h \circ g \circ f)^{-1}(x) = \frac{-4x+4}{-2x}$$

$$1 = \frac{-4x+4}{-2x}$$

$$-2x = -4x + 4$$

$$x = 2$$

BAB 5
Persamaan dan Pertidaksamaan

Dalam bab ini, akan membahas mengenai persamaan dan pertidaksamaan yang mencakup materi – materi bahasan sebagai berikut:

1. Konsep persaman dan pertidaksaman.
2. Persamaan dan pertidaksamaan linier.
3. Persamaan dan pertidaksamaan kuadrat.
4. Persamaan dan pertidaksamaan lingkaran.
5. Persamaan dan pertidaksamaan trigonometri.
6. Persamaan dan pertidaksamaan rasional.

Penulis berharap bagi pembaca yang telah mempelajari bab ini, secara umum diharapkan dapat menjelaskan konsep – konsep dan prinsip – prinsip dari persamaan dan pertidaksamaan. Adapun capaian pembelajaran mata kuliah (CPMK) pada bab ini sebagai berikut.

1. Membuat persamaan garis.
2. Membentuk dan menyelesaikan persamaan kuadrat.
3. Menyelesaikan permasalahan mengenai persamaan lingkaran.
4. Menyelesaikan permasalahan mengenai persamaan trigonometri.
5. Menyelesaikan sistem persamaan linier dua variabel dan tiga variabel.
6. Menyelesaikan pertidaksamaan linier, kuadrat, polinom, trigonometri dan rasional.

Berdasarkan CPMK yang telah dirancang, selanjutnya berikut merupakan sub – CPMK yang telah dirancang.

1. Mendefinisikan bentuk umum persamaan garis.
2. Menentukan gradien garis.
3. Mendefinisikan bentuk umum persamaan kuadrat.
4. Menyelesaikan persamaan kuadrat.
5. Mendefinisikan lingkaran.
6. Mengidentifikasikan bentuk umum persamaan lingkaran.
7. Menentukan garis singgung pada lingkaran.
8. Memahami konsep trigonometri.
9. Menyelesaikan persamaan trigonometri.
10. Mendefinisikan persamaan dan pertidaksamaan.
11. Merubah bentuk persamaan ke bentuk matriks.
12. Menentukan determinan matriks.
13. Menentukan invers matriks.
14. Menyelesaikan sistem persamaan linier dua variabel dan tiga variabel dengan matriks.
15. Menyelesaikan pertidaksamaan linier, kuadrat, polinom, trigonometri, dan rasional.

Adapun hubungan materi persamaan dan pertidaksamaan dengan surat di Al Qur’an, yaitu pada surat Al Jumua’ah ayat 9 dan ayat 10 yang berbunyi,

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ إِذَا نُودِيَ لِلصَّلَوٰةِ مِن يَوۡمِ ٱلۡجُمُعَةِ فَٱسۡعَوۡاْ إِلَىٰ ذِكۡرِ ٱللَّهِ وَذَرُواْ ٱلۡبَيۡعَۚ ذَٰلِكُمۡ خَيۡرٞ لَّكُمۡ إِن كُنتُمۡ تَعۡلَمُونَ ﴿٩﴾ فَإِذَا قُضِيَتِ ٱلصَّلَوٰةُ فَٱنتَشِرُواْ فِي ٱلۡأَرۡضِ وَٱبۡتَغُواْ مِن فَضۡلِ ٱللَّهِ وَٱذۡكُرُواْ ٱللَّهَ كَثِيرٗا لَّعَلَّكُمۡ تُفۡلِحُونَ ﴿١٠﴾

Artinya : 9. Hai orang-orang beriman, apabila diseru untuk menunaikan shalat Jum'at, Maka bersegeralah kamu kepada mengingat Allah dan tinggalkanlah jual beli. yang demikian itu lebih baik bagimu jika kamu Mengetahui. 10. Apabila Telah ditunaikan shalat, Maka bertebaranlah kamu di muka bumi; dan carilah karunia Allah dan ingatlah Allah banyak-banyak supaya kamu beruntung. (QS. Al Jumu’ah, 62:9-10)

Tanpa disadari, kita sering menggunakan perhitungan aljabar dalam kehidupan sehari-hari. Banyak manfaat dalam kehidupan sehari-hari yang dapat diambil pada saat kita mempelajari persamaan dan pertidaksamaan. Misalnya kita makan di restoran dan kita memesan paketan makanan. Secara tidak langsung kita masuk ke dunia ilmu persamaan, karena kita dapat mengetahui harga masing – masing makanan.Selain itu, ilmu pertidaksamaan dapat digunakan pada saat membuat model matematika dari keuntungan sebesar – besarnya dalam usaha. Bukan hanya dalam kehidupan sehari-hari manfaat dari mempelajari persamaan dan pertidaksamaan, tetapi juga pada ilmu lain, seperti fisika (menghubungkan Temperatur *Celcius* dengan *Farenheit*), Programer (penerapan *Turbo Pascal*, yaitu mesin pengambilan antrian/nomor pelanggan), *Game Maker* (penempatan letak karakter, penempatan objek-objek tertentu yang berada di game tersebut), *Ekologi* (untuk mengetahui asumsi populasi makhluk hidup), dll. Begitu banyak manfaat ilmu persamaan dan pertidaksamaan jika dipelajari.

A. Konsep Dasar Persamaan dan Pertidaksamaan

Persamaan adalah kalimat terbuka yang menggunakan relasi sama dengan $(=)$. Menyelesaikan persamaan berarti menentukan nilai-nilai dari faktor yang tidak diketahui dalam suatu persamaan. Faktor yang tidak diketahui nilainya disebut variabel.

Contoh 5.1

1. $x = -3$
2. $3x^2 - 4x = \sqrt{7}$
3. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Pertidaksamaan adalah kalimat terbuka yang ruas kiri dan ruas kanan kalimat tersebut dihubungkan dengan tanda "$<$", "$>$", "$\leq$", "$\geq$" dan $\neq$. Penjelasan tanda – tanda tersebut dalam matematika diistilahkan sebagai berikut.

Tabel 5.1
Istilah – Istilah Tanda Petidaksamaan

Notasi	Dibaca
$<$	kurang dari
$>$	lebih dari
$\leq$	kurang dari atau sama dengan
$\geq$	lebih dari atau sama dengan
$\neq$	tidak sama dengan

Semua himpunan bilangan riil yang memenuhi pertidaksamaan dinamakan himpunan penyelesaian. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan dapat diperoleh dengan menggunakan sifat-sifat urutan yang telah dibicarakan pada Bab 3 sebelumnya. Adapun sifat-sifat pertidaksamaan yang lebih rinci dapat dilihat sebagai berikut.

Misalkan $a, b, c \in \mathbb{R}$

1. Jika $a < b$ maka $b > a$
2. Jika $a > b$ maka:
   a. $a \pm c > b \pm c$
   b. $ac > bc,$ untuk $c > 0$
   c. $ac < bc,$ untuk $c < 0$
   d. $a^n > b^n, n \in$ bilangan ganjil
   e. $a^n < b^n, n \in$ bilangan ganjil
3. Jika $a > b$ dan $b > c$ maka $a > c$
4. Jika $a > b$ dan $c > d$ maka $a + c > b + d$
5. Jika $a > b > 0$ dan $c > d > 0$ maka $ac > bd$
6. Jika $a > b > 0$ maka
   a. $a^2 > b^2$
   b. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
7. Jika $\frac{a}{b} > 0$ maka $ab > 0$
8. Jika $\frac{a}{b} < 0$ maka $ab < 0$
9. Jika $a > 0$ maka $\frac{1}{a} > 0$

10. Jika $a < 0$ maka $\frac{1}{a} < 0$

Contoh 5.2

1. $x \leq -3$
2. $3x^2 - 4x > \sqrt{7}$
3. $\sin^2 x + \cos^2 x \neq -1$

Math Info

Rene Descartes (1596 – 1650) merupakan filsuf dan matematikawan perancis.Ia merupakan salah satu penemuannya adalah tentang kemiringan pada persamaan garis lurus, selain menemukan diagram kartesius.

Persamaan garis adalah persamaan yang dapat ditulis dalam bentuk umum:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Dengan m adalah gradien dari suatu persamaan garis dan (x_1, y_1) adalah koordinat dari suatu titik yang dilewati oleh garis tersebut. Jika titik koordinatnya berada di $(0,0)$ maka bentuk umum dari persamaan garis menjadi $y = mx$.

Contoh 5.3

1. Misalkan $(-2,5)$ adalah koordinat dari suatu titik yang dilewati suatu garis dengan gradien -3 maka persamaan garisnya dapat dilihat sebagai berikut.

   $y - y_1 = m(x - x_1)$
   $y - 5 = -3(x - (-2))$ … substitusi gradien dan titik koordinat
   $y - 5 = -3(x + 2)$ … sederhanakan
   $y - 5 = -3x - 6$ … sifat distributif
   $y - 5 + 5 = -3x - 6 + 5$ … kedua ruas ditambah 5
   $y = -3x - 1$

2. Misalkan terdapat persamaan garis $3x - 7y - 2 = 0$, kita dapat menentukan gradien dari persamaan garis tersebut dengan merubah bentuk umum dari persamaan garis.

$3x - 7y - 2 = 0$

$3x - 7y - 2 + 2 = 0 + 2$ … kedua ruas ditambah 2

$3x - 7y = 2$

$3x - 7y - 3x = 2 - 3x$ … kedua ruas dikurang $-3x$

$-7y = 2 - 3x$

$\frac{-7y}{7} = \frac{2-3x}{7}$ … kedua ruas dibagi 7

$-y = \frac{2}{7} - \frac{3}{7}x$

$y = \frac{3}{7}x - \frac{2}{7}$ … kedua ruas dikali (-1)

Sehingga nilai gradiennya adalah $\frac{3}{7}$.

B. Persamaan dan Pertidaksamaan Linier

1. Persamaan Linier Sederhana

Persamaan linier sederhana atau persamaan berpangkat (derajat) satu adalah suatu persamaan yang memuat satu kuantitas yang tidak diketahui (variabel) yang berbentuk $ax + b = c$, dimana a, b dan c bilangan riil dan $a \neq 0$, serta x adalah kuantitas yang tidak diketahui atau variabel.

Penyelesaian persamaan linier adalah nilai-nilai variabel yang memenuhi persamaan linier tersebut. Himpunan penyelesaian persamaan linier adalah himpunan semua penyelesaian persamaan linier. Semua operasi aritmatika dapat dilakukan terhadap suatu persamaan, selama kesamaan dari persamaan tersebut tetap dipertahankan. Nilai pengganti peubah pada persamaan-persamaan yang membuat persamaan itu benar disebut penyelesaian atau akar persamaan. Untuk menyelesaikan persamaan digunakan sifat dasar bahwa, suatu persamaan tidak berubah himpunan penyelesaiannya, jika kedua ruas persamaan:

a. Ditambah atau dikurangi dengan bilangan yang sama
b. Dikalikan atau dibagi dengan bilangan yang sama, asal bukan nol.

Contoh 5.4

a. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan $3x + 6 = 21 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

$3x + 6 = 21 - 2x$

$3x + 6 - 6 = 21 - 2x - 6$ …kedua ruas dikurangi 6

$3x = 21 - 6 - 2x$

$3x = 15 - 2x$

$3x + 2x = 15 - 2x + 2x$ …kedua ruas ditambah 2

$5x = 15$

$\frac{5x}{5} = \frac{15}{5}$ …kedua ruas dibagi dengan 5

$x = 3$

b. Ical menabung sisa uang jajannya selama 6 hari sebesar Rp 36.000,- Setiap hari Ical menyisihkan uang yang sama banyaknya. Untuk mengetahui besarnya rupiah Ical menyisihkan uangnya setiap hari dapat dilihat sebagai berikut.

Misalkan x adalah banyaknya uang yang ditabung Ical setiap hari. Ical menabung selama 6 hari sebesar Rp 36.000,-, sehingga diperoleh persamaan $6x = 36000$. Untuk menentukan banyaknya uang yang ditabung ical setiap hari dapat dilihat sebagai berikut.

$6x = 36000$

$6x.\frac{1}{6} = 36000.\frac{1}{6}$ ... kedua ruas dikalikan dengan $\frac{1}{6}$

$x = 6000$

Artinya setiap hari Ical menabung sebesar Rp 6.000

Dua atau lebih persamaan linier dikatakan setara atau ekuivalen jika himpunan penyelesaian persamaan itu sama tetapi bentuk persamaannya berbeda, dilambangkan dengan $\Leftrightarrow$.

Contoh 5.5

a. Misalkan $2x - 8 = 16,\ \ x \in \mathbb{R}$ ekuivalen dengan$2x - 10 = 14,\ \ x \in \mathbb{R}$ karena himpunan penyelesaiannya adalah sama yaitu $\{12\}$. Dengan menggunakan lambang ekuivalen dapat ditulis sebagai berikut:

$$2x - 8 = 16 \ \Leftrightarrow 2x - 10 = 14$$

b. Perhatikan bahwa $2x - 8 = 16$, $x \in \mathbb{R}$ tidak ekuivalen dengan $x - 10 = 14,\ \ x \in \mathbb{R}$ karena himpunan penyelesaiannya berbeda. Pada persamaan $2x - 8 = 16$ himpunan penyelesaiannya adalah $\{12\}$ sedangkan pada persamaan $x - 10 = 14$ himpunan penyelesaiannya adalah $\{24\}$. Dalam hal ini kita tulis,

$$2x - 8 = 16 \not\Leftrightarrow x - 10 = 14$$

2. Pertidaksamaan Linier Sederhana

Pada bagian ini akan mempelajari cara mendapatkan penyelesaian dari pertidaksamaan linier satu variabel. Pertidaksamaan linier satu variabel adalah pertidaksamaan yang hanya memuat sebuah variabel dan dapat berbentuk salah satu dari dari pertidaksamaan di bawah ini.

a. $ax + b < 0$

b. $ax + b > 0$

c. $ax + b \leq 0$

d. $ax + b \geq 0$

e. $ax + b \neq 0$

Dengan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$

Sama halnya dengan persamaan, untuk menyelesaikan pertidaksamaan digunakan sifat dasar.Hal ini dapat dilihat sebagai berikut.

a. Ruas-ruas suatu pertidaksamaan tidak berubah jika ditambah atau dikurangi dengan bilangan yang sama.
b. Ruas-ruas suatu pertidaksamaan tidak berubah jika dikalikan atau dibagi dengan bilangan positif yang sama.
c. Jika ruas-ruas suatu pertidaksamaan dikalikan atau dibagi dengan bilangan negatif yang sama, maka tanda pertidaksamaannya harus dibalik.
d. Jika a dan b bilangan posiitif dan $a < b$ maka $a^2 < b^2$.

Selanjutnya setelah dipaparkan mengenai aturan dalam menyelesaikan petidaksamaan, kita pelajari mengenai langkah – langkah menyelesaikan pertidaksamaan linier, yang dapat dilihat di bawah ini.

a. Semua yang mengandung variabel dipindahkan ke ruas kiri, sedangkan konstanta ke ruas kanan.
b. Sederhanakan ruas kiri dan ruas kanan.

Adapun hal – hal yang perlu diperhatikan dalam menyelesaikan pertidaksamaan linier satu variabel, dapat dilihat sebagai berikut.

a. Jika kedua ruas suatu pertidaksamaan ditambah atau dikurangi dengan bilangan yang sama, maka tanda pertidaksamaan tetap.
b. Jika kedua ruas suatu pertidaksamaan dikalikan atau dibagi dengan bilangan positif yang sama dan tidak nol, maka tanda pertidaksamaan tetap.
c. Jika kedua ruas suatu pertidaksamaan dikalikan atau dibagi dengan bilangan negatif yang sama dan tidak nol, maka tanda pertidaksamaan menjadi sebaliknya.

Adapun beberapa trik/sifat yang dapat membantu dalam menyelesaikan pertidaksamaan, dapat dilihat sebagai berikut.

a. Jika $a \pm b < c$ maka $a < c \pm b$
b. Jika $a.b > c$ maka $a > \frac{c}{b}$, dengan $b > 0$
c. Jika $\frac{a}{b} \leq c$ maka $a \leq bc$, dengan $b > 0$

Contoh 5.6

a. Tentukan himpunan penyelesaian (HP) dari pertidaksamaan linier $4x - 10 < 14$, $x \in \mathbb{R}$. Perhatikan bahwa:

$4x - 10 < 14$

Langkah awal memindahkan semua konstanta ke ruas kanan, dan mempertahankan variabel di ruas kiri, sehingga

$4x - 10 + 10 < 14 + 10$ … kedua ruas ditambah 10
$4x < 24$
$\frac{4x}{4} < \frac{24}{4}$ … kedua ruas dibagi dengan 4
$x < 6$

Jadi himpunan penyelesainnya adalah HP= $\{x \in \mathbb{R} | x < 6\}$

b. Menentukan himpunan penyelesaian (HP) dari pertidaksamaan linier $-6x + 10 \geq 46$, $\in \mathbb{R}$. Perhatikan berikut.

$-6x + 10 \geq 46$

Langkah awal memindahkan semua konstanta ke ruas kanan, dan mempertahankan variabel di ruas kiri, sehingga

$-6x + 10 - 10 \leq 46 - 10$ …kedua ruas dikurangi 10
$-6x \leq 36$

Karena nilai x negatif maka kedua ruas dikalikan dengan (-1) maka tanda pertidaksamaannya harus dibalik menjadi

$6x \geq -36$

$\frac{6x}{6} \geq -\frac{36}{6}$ … kedua ruas dibagi 6

$x \geq -6$

Jadi himpunan penyelesainnya adalah HP= $\{x|x \geq -6, x \in \mathbb{R}\}$

c. Menentukan himpunan penyelesaian (HP) dari pertidaksamaan linier $-\frac{1}{4}x - 5 \leq 3, x \in \mathbb{R}$. Perhatikan berikut.

$$-\frac{1}{4}x - 5 \leq 3$$

Langkah awal memindahkan semua konstanta ke ruas kanan, dan mempertahankan variabel di ruas kiri, sehingga

$-\frac{1}{4}x - 5 + 5 \leq 3 + 5$ … kedua ruas ditambah 5

$$-\frac{1}{4}x \leq 8$$

Karena nilai x negatif maka kedua ruas dikalikan dengan (-1) maka tanda pertidaksamaannya harus dibalik menjadi

$$\frac{1}{4}x \geq -8$$

$\frac{1}{4}x \,.\, 4 \geq -8 \,.\, 4$ … kedua ruas dikali 4

$x \geq -32$

Jadi himpunan penyelesainnya adalah HP= $\{x \in \mathbb{R}|x \geq -32\}$

d. Tentukan himpunan penyelesaian (HP) dari pertidaksamaan linier $-6 - 4x \leq 4 - 14x, x \in \mathbb{R}$. Perhatikan berikut.

$-6-4x \leq 4-14x$

Langkah awal memindahkan semua konstanta ke ruas kanan, dan mempertahankan variabel di ruas kiri, sehingga

$-6-4x+6 \leq 4-14x+6$ … kedua ruas ditambah 6

$-4x \leq 10-14x$

$-4x+14x \leq 10-14x+14x$ … kedua ruas ditambah $14x$

$10x \leq 10$

$\frac{10x}{10} \leq \frac{10}{10}$ … kedua ruas dibagi 10

$x \leq 1$

Jadi himpunan penyelesainnya adalah HP= $\{x|x \leq 1, x \in \mathbb{R}\}$

e. Menentukan himpunan penyelesaian (HP) dari pertidaksamaan linier $4 \leq \frac{6x+4}{10} \leq 10x \in \mathbb{R}$. Perhatikan berikut.

$$4 \leq \frac{6x+4}{10} \leq 10$$

$4.10 \leq \frac{6x+4}{10} .10 \leq 10.10$ … semua ruas dikali 10

$40 \leq 6x+4 \leq 100$

$40-4 \leq 6x+4-4 \leq 100-4$ … semua ruas dikurang 4

$36 \leq 6x \leq 96$

$\frac{36}{6} \leq \frac{6x}{6} \leq \frac{96}{6}$ … semua ruas dibagi 6

$6 \leq x \leq 16$

Jadi himpunan penyelesainnya adalah HP= $\{x \in \mathbb{R}|6 \leq x \leq 16\}$

3. Persamaan Linier Simultan

a. Dua Persamaan dan Dua Variabel

Persamaan linier dua variabel adalah persamaan yang memiliki dua variabel dan masing-masing variabel berpangkat satu dan memiliki bentuk umum $ax + by = c$ dimana a, b, c bilangan riil dan $a, b \neq 0$.

Contoh 5.7

1) $2x + 3y = -8$
2) $-4y + 7z - 12 = 0$
3) $3p - 8q = 2$

Diketahui terdapat dua buah persamaan linier dengan dua variabel x dan y seperti berikut

$$a_1x + b_1y = c_1 \ldots (1)$$
$$a_2x + b_2y = c_2 \ldots (2)$$

Dengan $x, y, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ dan $a_1, a_2, b_1, b_2 \neq 0$

Dua persamaan di atas dikatakan persamaan linier simultan dengan dua variabel atau suatu sistem persamaan linier dengan dua persamaan dan dua variabel. Pasangan$x$ dan y yang memenuhi persamaan (1) dan persamaan (2) dikatakan penyelesaian simultan yang dapat ditulis (x, y). Menyelesaikan persamaan linier simultan, artinya menentukan semua nilai (x, y) yang memenuhi persamaan simultan tersebut. Metode yang dapat digunakan untuk menentukan penyelesaian persamaan linier simultan dua variabel dapat dilihat pada berikut.

1) Metode Grafik

Metode grafik digunakan untuk menyelesaikan persamaan linier simultan dengan menggunakan diagram kartesius. Adapun langkah – langkah dalam menentukan penyelesaian persamaan simultan linier dua variabel dengan menggunakan metode grafik sebagai berikut.

a) Tentukan titik potong garis dengan sumbu X, syarat $y = 0$ dan tentukan titik potong garis dengan sumbu Y, syarat $x = 0$. Hal ini dapat disederhanakan dalam bentuk tabel sebagai berikut.

x	0	...
y	...	0

b) Gambar pasangan titik yang didapat pada koordinat kartesius lalu buat garis yang melalui dua titik ini.

c) Tentukan titik potong dua garis dalam persamaan linier simultan yang merupakan himpunan penyelesaian dari persamaan linier simultan ini.

<u>**Contoh 5.8**</u> Tentukan himpunan penyelesaian persamaan linier dua variabel dari dua persamaan berikut.

$$x - y = 2 \ldots (1)$$
$$2x + y = 7 \ldots (2)$$

Langkah-langkah penyelesainnya persamaan linier dua variabel dengan metode grafik dapat dilihat sebagai berikut.

a) Menentukan titik potong garis dengan sumbu X dan Y pada persamaan (1) dan (2)

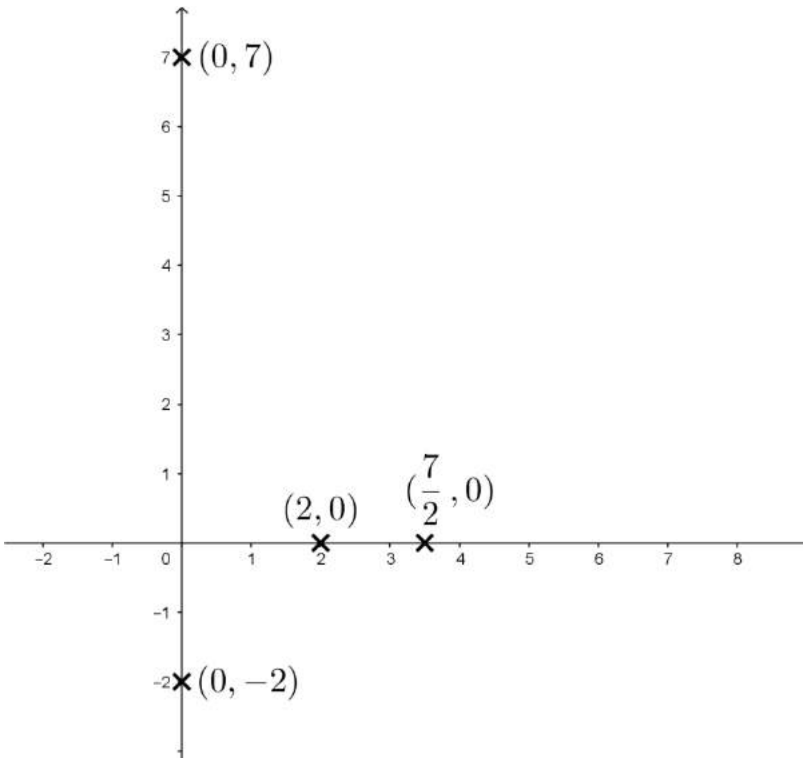
$x - y = 2$

x	0	2
y	-2	0

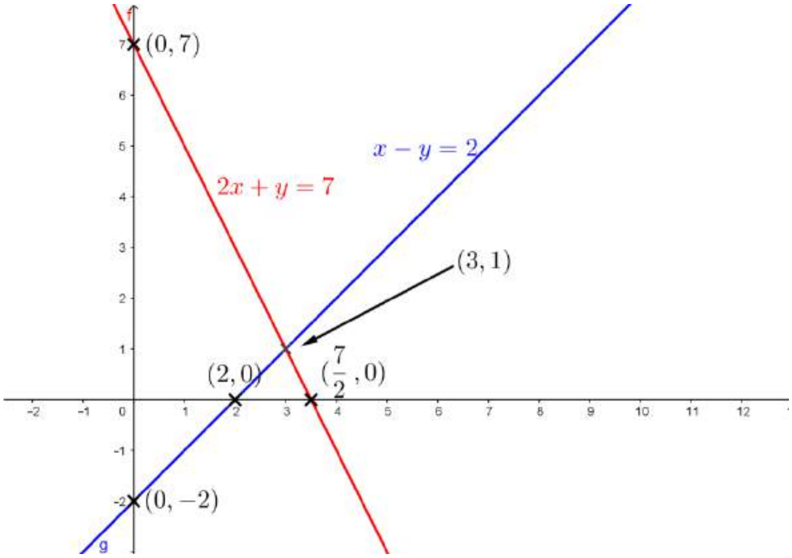
$2x + y = 7$

x	0	$\frac{7}{2}$
y	7	0

b) Gambar pasangan titik yang didapat pada koordinat kartesius



c) Menentukan titik potong kedua garis yang merupakan himpunan penyelesaian dari persamaan linier simultan dua variabel



Titik potong kedua grafik adalah $(3,1)$. Jadi himpunan penyelesaiannya $\{(3,1)\}$

2) Metode Substitusi

Metode substitusi digunakan untuk menyelesaikan persamaan linier simultan dimulai dengan satu persamaan dari sistem dan menuliskan satu variabel dalam bentuk variabel lainnya pada persamaan ini. Adapun langkah – langkah dalam menentukan penyelesaian persamaan linier simultan dua variabel dengan menggunakan metode substitusi adalah sebagai berikut.

a) Pilih satu persamaan dan selesaikan satu variabel ke dalam bentuk variabel lainnya.
b) Substitusikan pernyataan yang diperoleh dari langkah pertama ke dalam persamaan lainnya, dan selesaikan untuk persamaan tersebut.
c) Substitusi nilai yang diperoleh dari langkah kedua ke pernyataan yang diperoleh di langkah pertama untuk menentukan variabel yang tersisa.

Contoh 5.9 Tentukan himpunan penyelesaian persamaan linier dua variabel dari dua persamaan berikut.

$$x - y = 2 \ldots (1)$$
$$2x + y = 7 \ldots (2)$$

Langkah-langkah penyelesainnya persamaan linier simultan dua variabel dengan menggunakan metode substitusi dapat dilihat sebagai berikut.

a) Pilih satu persamaan, misalkan persamaan (1) dan selesaikan satu variabel ke dalam bentuk variabel lainnya, seperti berikut.

$x - y = 2$

$x = 2 + y$

b) Substitusikan pernyataan yang diperoleh dari langkah pertama ke dalam persamaan (2), dan selesaikan untuk persamaan tersebut, seperti berikut.

$2x + y = 7$

$2(2 + y) + y = 7$

$4 + 2y + y = 7$

$3y + 4 = 7$

$3y + 4 - 4 = 7 - 4$ ... kedua ruas dikurang 4

$3y = 3$

$y = 1$

c) Substitusi nilai $y = 1$ke persamaan $x = 2 + y$, sehingga dapat diperoleh sebagai berikut:

$x = 2 + y$

$x = 2 + 1$

$x = 3$

Jadi himpunan penyelesaiannya $\{(3,1)\}$

3) Metode Eliminasi

Metode eliminasi digunakan untuk menyelesaikan persamaan linier simultan dengan mengkombinasikan penjumlahan dan pengurangan dua persamaan atau lebih sedemikian hingga dapat mengeliminasi salah satu variabel. Adapun langkah – langkah dalam menentukan penyelesaian persamaan linier simultan dua variabel dengan menggunakan metode eliminasi adalah sebagai berikut.

a) Tentukan variabel yang akan dieliminasi
b) Kalikan persamaan dengan angka yang sesuai agar koefisien variabel yang akan dieliminasi pada satu persamaan merupakan negatifnya atau sama dengan persamaan yang lain.
c) Jumlahkan atau kurangkan kedua persamaan agar mengeliminasi satu variabel.
d) Lakukan hal yang sama seperti langkah pertama sampai semua variabel ditentukan.

Contoh 5.10 Tentukan himpunan penyelesaian persamaan linier dua variabel dari dua persamaan berikut.

$$x - y = 2 \ldots (1)$$
$$2x + y = 7 \ldots (2)$$

Langkah-langkah penyelesainnya persamaan linier dua variabel dengan menggunakan metode eliminasi dapat dilihat sebagai berikut.

a) Misalkan variabel y yang akan dieliminasi

b) Karena koefisien suku y pada persamaan (1) merupakan negatif bagi suku y pada persamaan (2), maka dua persamaan tersebut dapat dieliminasi.

c) Jumlahkan persamaan (1) dan persamaan (2) agar mengeliminasi variabel y seperti berikut.

$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ \underline{2x + y} &\underline{= 7} + \\ 3x &= 9 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Lakukan hal yang sama seperti langkah pertama untuk mengeliminasi variabel x seperti mengalikan persamaan (1) dengan -2 sehingga diperoleh $-2x + 2y = -4$. Karena koefisien suku x pada persamaan (1) merupakan negatif bagi suku x pada persamaan (2), maka dua persamaan tersebut dapat dieliminasi. Jumlahkan persamaan (1) dan persamaan (2) agar mengeliminasi variabel x seperti berikut.

$$\begin{aligned} -2x + 2y &= -4 \\ \underline{2x + y} &\underline{= 7} + \\ 3y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Jadi himpunan penyelesaiannya $\{(3,1)\}$

4) Metode Eliminasi dan Substitusi

Metode eliminasi dan substitusi digunakan untuk menyelesaikan persamaan linier simultan dengan menggabungkan metode eliminasi dan metode substitusi. Adapun langkah – langkah dalam menentukan penyelesaian persamaan linier simultan dua variabel dengan menggunakan metode eliminasi dan substitusi sebagai berikut.

a) Tentukan variabel yang akan dieliminasi.
b) Kalikan persamaan dengan angka yang sesuai agar koefisien variabel yang akan dieliminasi pada satu persamaan merupakan negatifnya atau sama dengan pada persamaan yang lain.
c) Jumlahkan atau kurangkan kedua persamaan agar mengeliminasi satu variabel.
d) Substitusikan nilai yang diperoleh pada langkah ketiga ke dalam persamaan awal, dan tentukan solusi untuk variabel lainnya.

<u>**Contoh 5.11**</u> Tentukan himpunan penyelesaian persamaan linier dua variabel dari dua persamaan berikut.

$$x - y = 2 \ldots (1)$$
$$2x + y = 7 \ldots (2)$$

Langkah-langkah penyelesainnya persamaan linier dua variabel dengan menggunakan metode eliminasi dan substitusi dapat dilihat sebagai berikut.

1) Misalkan variabel y yang akan dieliminasi.
2) Karena koefisien suku y pada persamaan (1) merupakan negatif bagi suku y pada persamaan (2), maka dua persamaan tersebut dapat dieliminasi.
3) Jumlahkan persamaan (1) dan persamaan (2) agar mengeliminasi variabel y seperti berikut.

$$x - y = 2$$
$$\underline{2x + y = 7} +$$
$$3x = 9$$
$$x = 3$$

4) Kemudian substitusi $x = 3$ pada salah satu persamaan awal, misalkan mensubstitusi $x = 3$ pada persamaan (1) maka diperoleh

$x - y = 2$
$3 - y = 2$ ... substitusi $x = 3$
$3 - y - 3 = 2 - 3$ ... kedua ruas dikurang 3
$-y = -1$
$y = 1$ ... kedua ruas dikalikan -1

Jadi himpunan penyelesaiannya $\{(3,1)\}$.

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak sekali permasalahan – permasalahanyang dapat dipecahkan menggunakan persamaan linier simultan dua variabel. Pada umumnya, permasalahan tersebut berkaitan dengan masalah aritmetika sosial. Misalnya, menentukan harga satuan barang, menentukan panjang atau lebar sebidang tanah, dan lain sebagainya.

Contoh 5.12 Misalkan usia Soni 8 tahun lebih tua dari umur Ina. Sedangkan jumlah usia mereka adalah 44 tahun. Tentukan usia Soni dan Ina saat ini, pertama kita menentukan model matematikanya sebagai berikut

Misalkan usia Soni saat ini $= x$ tahun dan usia Ina saat ini $= y$ tahun, sehingga model matematikanya

$$x = 8 + y \ldots (1)$$
$$x + y = 44 \ldots (2)$$

Untuk menghitung usia masing-masing, dapat menggunakan metode eliminasi dan metode substitusi, dapat dilihat sebagai berikut.

Mengeliminasi variabel y terlebih dahulu sehingga:

$x - y = 8$

$\underline{x + y = 44} +$

$2x = 52$

$x = 26$

Mensubstitusi nilai x ke persamaan (1) sehingga:

$x = 8 + y$	
$26 = 8 + y$	… substitusi nilai $x = 26$
$26 - 26 = 8 + y - 26$	… kedua ruas dikurang 26
$0 = -18 + y$	
$0 - y = -18 + y - y$	… kedua ruas dikurang $-y$
$-y = -18$	
$y = 18$	… kedua ruas dikalikan -1

Jadi usia Soni adalah 26 tahun dan usia Ina 18 tahun.

b. Tiga Persamaan dan Tiga Variabel

Pada bagian ini kita akan menyelesaikan persamaan yang memiliki tiga variabel dan masing-masing variabel berpangkat satu. Bentuk umum persamaan linier tiga variabel dalam $x, y,$ dan z adalah $ax + by + cz = d$ dimana a, b, c, d bilangan riil dan $a, b, c \neq 0$.

Contoh 5.13

1) $2x + 3y + 4z = -8$
2) $-4y + 7z - 12 + 3x = 0$
3) $3p - 8q = r + 2$

Diketahui terdapat tiga buah persamaan dengan tiga variabel x, y dan z adalah berbentuk $ax + by + cy = d$ dimana a, b, c, d bilangan riil dan $a, b, c \neq 0$, seperti berikut:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \ldots (1)$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \ldots (2)$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \ldots (3)$$

Dengan $x, y, z, a_1, a_2,\ a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$ dan $a_1, a_2,\ a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ tidak semuanya 0.

Tiga persamaan di atas dikatakan persamaan linier simultan dengan tiga variabel atau suatu system tiga persamaan linier dengan tiga variabel. Pasangan x, y dan z yang memenuhi persamaan (1), persamaan (2) dan persamaan (3) dikatakan penyelesaian simultan yang dapat ditulis (x, y, z). Menyelesaikan persamaan linier simultan, artinya menentukan semua nilai (x, y, z) yang memenuhi persamaan simultan tersebut. Metode yang dapat digunakan untuk menentukan penyelesaian persamaan linier simultan tiga variabel sama seperti menentukan penyelesaian persamaan linier simultan dua variabel.

Contoh 5.14 Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linier tiga variabel dari tiga persamaan berikut.

$$x + y - z = 3 \ldots (1)$$
$$2x + y + z = 5 \ldots (2)$$
$$x + 2y + z = 7 \ldots (3)$$

Langkah-langkah penyelesaian persamaan linier tiga variabel dengan menggunakan metode eliminasi dan metode substitusi dapat dilihat sebagai berikut.

1) Misalkan variabel z yang akan dieliminasi.
2) Karena koefisien suku z pada persamaan (1) merupakan negatif bagi suku z pada persamaan (2), maka dua persamaan tersebut dapat dieliminasi dengan cara menjumlahkan kedua persamaan tersebut.

$$\begin{array}{r} x+y-z=3 \\ \underline{2x+y+z=5} + \\ 3x+2y=8 \ldots (4) \end{array}$$

Mengeliminasi variabel z dari persamaan (1) dan (3) sehingga diperoleh:

$$\begin{array}{r} 2x+y+z=5 \\ \underline{x+2y+z=7} - \\ x-y=-2 \ldots (5) \end{array}$$

Persamaan (5) dikali 2 sehingga didapat $2x-2y=-4$. Eliminasi persamaan variabel y dari (4) dan (5).

$$\begin{array}{r} 3x+2y=8 \\ \underline{2x-2y=-4} + \\ 5x=4 \\ x=\frac{4}{5} \end{array}$$

3) Substitusi nilai x ke persamaan (5) sehingga diperoleh:

$x - y = -2$

$\frac{4}{5} - y = -2$ ... substitusi nilai $x = \frac{4}{5}$

$\frac{4}{5} - y - \frac{4}{5} = -2 - \frac{4}{5}$ ... kedua ruas dikurang $\frac{4}{5}$

$-y = -\frac{14}{5}$

$y = \frac{14}{5}$ .. kedua ruas dikali -1

Substitusi nilai x dan y ke persamaan (1) sehingga diperoleh:

$x + y - z = 3$

$\frac{4}{5} + \frac{14}{5} - z = 3$ ... substitusi nilai$x = \frac{4}{5}$dan $y = \frac{14}{5}$

$\frac{18}{5} - z = 3$

$\frac{18}{5} - z - \frac{18}{5} = 3 - \frac{18}{5}$ ... kedua ruas dikurang$\frac{18}{5}$

$-z = -\frac{3}{5}$

$z = \frac{3}{5}$ ... kedua ruas dikalikan -1

Jadi himpunan penyelesaiannya $\left\{\left(\frac{4}{5}, \frac{14}{5} . \frac{3}{5}\right)\right\}$.

c. Persamaan Linier Simultan

Persamaan linier simultan adalah suatu bentuk persamaan – persamaan berderajat satu yang bersama – sama menyajikan banyak variabel bebas yang sama. Bentuk persamaan linier simultan dengan m persamaan dan n variabel bebas dapat dituliskan dalam bentuk

$$\begin{array}{cccccc}
a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & a_{13}x_3 + & \ldots + & a_{1n}x_n & = b_1 \\
a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & a_{23}x_3 + & \ldots + & a_{2n}x_n & = b_2 \\
a_{31}x_1 + & a_{32}x_2 + & a_{33}x_3 + & \ldots + & a_{3n}x_n & = b_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & a_{m3}x_3 + & \ldots + & a_{mn}x_n & = b_m
\end{array}$$

Dimana $a_{ij} \in \mathbb{R}$ merupakan koefisien pada persamaan linier simultan, $b_i \in \mathbb{R}$ merupakan konstanta pada persamaan linier simultan, dan x_j merupakan variabel bebas pada persamaan linier simultan dengan $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

1) Matriks

Persamaan linier simultan umum di atas dapat dinyatakan sebagai persamaan matriks seperti berikut.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Bentuk matriks di atas dapat ditulis sebagai $AX = B$, dimana:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{dan} B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Matriks A merupakan matriks koefisien dari persamaan simultan atau dinamakan matriks *Jacobian*, matriks B merupakan matriks konstanta, dan matrix X merupakan vektor variabel bebas.

Matriks muncul karena dibutuhkan pada saat menentukan solusi dari persamaan linier simultan dengan $m \geq 3$ persamaan dan $n \geq 3$. Menyelesaikan solusi dari persamaan linier simultan akan lebih mudah dengan mengubah persamaan linier simultan ke bentuk matriks.

Matriks adalah susunan bilangan-bilangan riil atau kompleks yang diatur dalam baris-baris dan kolom-kolom berbentuk persegi panjang. Masing-masing bilangan dalam matriks disebut entri atau elemen. Ordo (ukuran) matriks adalah jumlah baris kali jumlah kolom. Matriks dinyatakan dalam huruf besar $A, B, \dots, P, \dots$. Atau secara lengkap ditulis $A = (a_{ij})$ artinya matriks A mempunyai entri a_{ij}, dimana indeks i menyatakan baris ke $-i$ dan indeks j menyatakan kolom ke $-j$

<u>Contoh 5.15</u> Ubah persamaan linier simultan di bawah ini menjadi persamaan matriks

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -3$$
$$-2x_1 + 3x_2 = -7$$
$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2$$
$$4x_2 - 3x_3 = 0$$

Sebelum mengubah persamaan linier tersebut ke dalam bentuk matriks, terlebih dulu diubah seperti berikut.

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 0x_4 = -3$$
$$-2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -7$$
$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2$$
$$0x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 0x_4 = 0$$

Sehingga persamaan matriks dari persamaan linier simultan di atas adalah:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2) Operasi Pada Matriks

Pada matriks terdapat beberapa operasi. Misalkan $A_{m\times n} = [a_{ij}]$ dan $B_{r\times p} = [b_{ij}]$

a) Operasi $A \pm B$ dengan syarat $m = r$ dan $n = p$ dan entri matriks baru ini didefinisikan oleh $a_{ij} \pm b_{ij}$ untuk setiap i dan j.

<u>Contoh 5.16</u> Misalkan $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ maka:

(1) Matriks $A + B$ dapat dilihat sebagai berikut.

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 + (-2) \\ -1 + 0 \\ 3 + 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 - 2 \\ -1 + 0 \\ 3 + 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2) Matriks $A - B$ dapat dilihat sebagai berikut.

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 - (-2) \\ -1 - 0 \\ 3 - 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 + 2 \\ -1 - 0 \\ 3 - 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(3) Matriks $B + A$ dapat dilihat sebagai berikut.

$$B + A = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2+2 \\ 0+(-1) \\ 5+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2+2 \\ 0-1 \\ 5+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

(4) Matriks $B - A$ dapat dilihat sebagai berikut.

$$B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2-2 \\ 0-(-1) \\ 5-3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2-2 \\ 0+1 \\ 5-3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

b) Operasi perkalian skalar dengan matriks yaitu cA (atau Ac) dengan $c \in \mathbb{R}$ didefinisikan oleh $c(a_{ij})$ (atau $(a_{ij})c$) untuk setiap i dan j.

Contoh 5.17 Misalkan $c = -5$ dan $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -7 \\ 5 & 3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ maka:

(1) cA dapat dilihat sebagai berikut.

$$cA = -5 \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -7 \\ 5 & 3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-5)(-2) & (-5)-1 & (-5)0 \\ (-5)0 & (-5)-4 & (-5)-7 \\ (-5)5 & (-5)3 & (-5)\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 5 & 0 \\ 0 & 20 & 35 \\ -25 & -15 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

(2) Ac dapat dilihat sebagai berikut.

$$Ac = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -7 \\ 5 & 3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}(-5)$$

$$= \begin{bmatrix} (-2)(-5) & -1(-5) & 0(-5) \\ 0(-5) & -4(-5) & -7(-5) \\ 5(-5) & 3(-5) & \frac{1}{2}(-5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 5 & 0 \\ 0 & 20 & 35 \\ -25 & -15 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

c) Diberikan dua matriks $A_{m \times n}$ dan $B_{r \times p}$ dengan dengan $n = r$. Jika $C = AB$ maka:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots a_{in} b_{nj}$$

dengan 1 $\leq i \leq m$ dan 1 $\leq j \leq p$

Contoh 5.18 Misalkan $= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ maka:

(1) AB dapat dilihat sebagai berikut.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2)2+(1)0+(0)5 & (2)1+(1)4+(0)3 & (2)0+(1)2+(0)1 \\ (0)2+(4)0+(2)5 & (0)1+(4)4+(2)3 & (0)0+(4)2+(2)1 \\ (5)2+(1)0+(3)5 & (5)1+(1)4+(3)3 & (5)0+(1)2+(3)1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+0+0 & 2+4+0 & 0+2+0 \\ 0+0+10 & 0+16+6 & 0+8+2 \\ 10+0+15 & 5+4+9 & 0+2+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 10 & 22 & 10 \\ 25 & 18 & 5 \end{bmatrix}$$

(2) BA dapat dilihat sebagai berikut.

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2)2+(1)0+(0)5 & (2)1+(1)4+(0)1 & (2)0+(1)2+(0)3 \\ (0)2+(4)0+(2)5 & (0)1+(4)4+(2)1 & (0)0+(4)2+(2)3 \\ (5)2+(3)0+(1)5 & (5)1+(3)4+(1)1 & (5)0+(3)2+(1)3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+0+0 & 2+4+0 & 0+2+0 \\ 0+0+10 & 0+16+2 & 0+8+6 \\ 10+0+5 & 5+12+1 & 0+6+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 10 & 18 & 14 \\ 15 & 18 & 9 \end{bmatrix}$$

Dalam operasi matriks terdapat beberapa sifat matriks jika matriks A, B, C berordo sama dan c suatu bilangan riil, maka berlaku sifat – sifat berikut:

a) $A + B = B + A$(sifat komutatif penjumlahan).
b) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (sifat asosiatif penjumlahan).
c) $c(A + B) = cA + cB$ (sifat distributif).

3) Operasi Baris Elementer

Sekarang akan diperkenalkan suatu operasi yang mengubah baris pada suatu matriks. Operasi ini disebut operasi baris elementer atau bisa disebut dengan OBE. Operasi ini digunakan dalam aljabar linier, seperti metode eliminasi Gauss, determinan, invers dan hal lainnya.

Ada tiga tipe operasi baris elementer diantaranya sebagai berikut.

a) Menukar baris ke i dengan baris ke j dari matriks. Operasi ini dapat dinotasikan dengan $b_i \sim b_j$.

Contoh 5.19 Misalkan $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 10 & 18 & 14 \\ 15 & 18 & 9 \end{bmatrix}$ maka jika baris ke 3 ditukar dengan baris ke 2 maka dapat dilihat sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 10 & 18 & 14 \\ 15 & 18 & 9 \end{bmatrix}_{b_3 \sim b_2} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 15 & 18 & 9 \\ 10 & 18 & 14 \end{bmatrix}$$

b) Mengalikan baris ke i dengan bilangan riil $k \neq 0$. Operasi ini dapat dinotasikan dengan kb_i.

Contoh 5.20 Misalkan $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 10 & 18 & 14 \\ 15 & 18 & 9 \end{bmatrix}$ maka jika baris ke 1 dikalikan dengan -1 maka dapat dilihat sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 10 & 18 & 14 \\ 15 & 18 & 9 \end{bmatrix}^{-b_1} \rightarrow \begin{bmatrix} -4 & -6 & -2 \\ 15 & 18 & 9 \\ 10 & 18 & 14 \end{bmatrix}$$

c) Mengalikan baris ke j dengan bilangan riil $k \neq 0$, kemudian hasilnya ditambahkan dengan baris ke i. Operasi ini dapat dinotasikan dengan $kb_j + b_i$ atau $b_i + kb_j$.

Contoh 5.21 Misalkan $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 10 & 18 & 14 \\ 15 & 18 & 9 \end{bmatrix}$ maka jika pada baris pertama dioperasikan dengan mengalikan baris kedua dengan

-2 kemudian hasilnya ditambahkan dengan baris ke 1. maka dapat dilihat sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 10 & 18 & 14 \\ 15 & 18 & 9 \end{bmatrix} b_1 + (-2)b_2$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 4+(-2)(10) & 6+(-2)(18) & 2+(-2)(14) \\ 15 & 18 & 9 \\ 10 & 18 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 4+(-20) & 6+(-36) & 2+(-28) \\ 15 & 18 & 9 \\ 10 & 18 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 4-20 & 6-36 & 2-28 \\ 15 & 18 & 9 \\ 10 & 18 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} -16 & -30 & -26 \\ 15 & 18 & 9 \\ 10 & 18 & 14 \end{bmatrix}$$

4) Determinan Matriks

Determinan adalah penjumlahan dari setiap hasil kali elementer bertanda. Hasil kali elementer adalah perkalian entri–entri matriks yang tidak sebaris dan tidak sekolom.Dalam menentukan banyaknya hasil kali elementer kita dapat menggunakan permutasi.

Contoh 5.22 Diberikan matriks 3×3. Perhatikan matriks A berikut.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Kita ketahui bahwa permutasi dari $(1{,}2{,}3)$ ada 6 yaitu $(1{,}2{,}3)$, $(1{,}3{,}2), (2{,}1{,}3), (2{,}3{,}1), (3, 1, 2)$ dan $(3, 2, 1)$. 6 susunan permutasi ini akan terkait dengan 6 hasil kali elementer pada matriks 3×3. Perhatikan hasil kali elementer dari matriks A.

$a_{1\boxed{1}}a_{2\boxed{2}}a_{3\boxed{3}}$, $a_{1\boxed{1}}a_{2\boxed{3}}a_{3\boxed{2}}$, $a_{1\boxed{2}}a_{2\boxed{1}}a_{3\boxed{3}}$, $a_{1\boxed{2}}a_{2\boxed{3}}a_{3\boxed{1}}$, $a_{1\boxed{3}}a_{2\boxed{1}}a_{3\boxed{2}}$, dan $a_{1\boxed{3}}a_{2\boxed{2}}a_{3\boxed{1}}$.

Terlihat bahwa indeks-indeks kolom dari setiap hasil kali elementer membentuk suatu permutasi dari $(1{,}2{,}3)$. Hal ini dapat diperumum bahwa untuk mendapatkan perkalian entri – entri matriks yang tidak sebaris dan tidak sekolom pada matriks berukuran $n \times n$ dapat menggunakan permutasi dari $(1{,}2, \dots n)$.

Karena determinan adalah penjumlahan dari setiap hasil kali elementer bertanda maka untuk menentukan tanda positif $(+)$ dan tanda negatif $(-)$ tiap – tiap hasil kali elementer kita menggunakan dengan invers permutasi. Invers dari suatu permutasi $(1{,}2, \dots n)$ adalah 1 pasang bilangan dalam $1{,}2, \dots, n$ memiliki urutan dari besar ke kecil dalam urutan permutasi.

Tanda $(+)$ atau $(-)$ ditentukan banyaknya invers dalam suatu permutasi $(1{,}2, \dots n)$ Hal ini ekuivalen dengan menghitung berapa langkah(transposisi) penukaran urutan indeks kolom dari hasil kali elementer ke urutan normal (dari kecil ke besar). Jika banyaknya genap maka hasil kali elementer diberi tanda $(+)$ dan jika ganjil maka diberi tanda $(-)$ atau dengan kata lain tandanya adalah $(-1)^t$ dengan t banyaknya transposisi. Perhatikan 6 hasil kali elementer yang telah diperoleh sebelumnya.

a) Hasil kali elementer $a_{1\boxed{1}}a_{2\boxed{2}}a_{3\boxed{3}}$ tidak ada transposisi untuk permutasi $(1{,}2{,}3)$ sampai menjadi permutasi $(1{,}2{,}3)$. Ini artinya

0 transposisi. Karena 0 merupakan bilangan genap maka untuk $a_{1\boxed{1}}a_{2\boxed{2}}a_{3\boxed{3}}$ diberi tanda positif.

b) Hasil kali elementer $a_{1\boxed{1}}a_{2\boxed{3}}a_{3\boxed{2}}$ memiliki satu kali transposisi untuk permutasi $(1,3,2)$ sampai menjadi permutasi $(1,2,3)$. Karena 1 merupakan bilangan ganjil maka untuk $a_{1\boxed{1}}a_{2\boxed{3}}a_{3\boxed{2}}$ diberi tanda negatif.

c) Hasil kali elementer $a_{1\boxed{2}}a_{2\boxed{1}}a_{3\boxed{3}}$ memiliki satu kali transposisi untuk permutasi $(2,1,3)$, yaitu $a_{1\boxed{1}}a_{2\boxed{2}}a_{3\boxed{3}}$. Karena 1 merupakan bilangan ganjil maka untuk $a_{1\boxed{2}}a_{2\boxed{1}}a_{3\boxed{3}}$ diberi tanda negatif.

d) Hasil kali elementer $a_{1\boxed{2}}a_{2\boxed{3}}a_{3\boxed{1}}$ dua kali transposisi untuk permutasi $(2,3,1)$. Karena 2 merupakan bilangan genap maka untuk $a_{1\boxed{2}}a_{2\boxed{3}}a_{3\boxed{1}}$ diberi tanda positif.

e) Hasil kali elementer $a_{1\boxed{3}}a_{2\boxed{1}}a_{3\boxed{2}}$ memiliki dua kali transposisi untuk permutasi $(3,1,2)$. Karena 2 merupakan bilangan genap maka untuk $a_{1\boxed{3}}a_{2\boxed{1}}a_{3\boxed{2}}$ tandanya positif.

f) Hasil kali elementer $a_{1\boxed{3}}a_{2\boxed{2}}a_{3\boxed{1}}$ memiliki satu kali transposisi untuk permutasi $(3,2,1)$. Karena 1 merupakan bilangan ganjil maka untuk $a_{1\boxed{3}}a_{2\boxed{2}}a_{3\boxed{1}}$ tandanya negatif.

Oleh karena dari definisinya, determinan dari matriks A yang berukuran 3×3 adalah:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

5) Matriks Invers

Secara umum, dalam menjawab permasalahan suatu persamaan linier simultan dengan menggunakan matriks, dapat menggunakan OBE untuk mendapatkan matriks dalam bentuk eselon baris dan eselon baris tereduksi dari matriks persamaan linier simultan. Matriks bentuk eselon baris adalah matriks yang memiliki 3 sifat berikut.

a) Entri pertama yang tidak nol pada setiap baris tak nol adalah 1. Entri ini disebut satu utama.

Contoh 5.23

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, matriks A memiliki entri pertama yang tidak nol pada setiap baris adalah 1,

(2) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{3} & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ dimana terdapat entri pertama yang tidak nol pada baris kedua.

b) Satu utama pada baris berikutnya berada lebih kanan dari baris sebelumnya.

Contoh 5.24

(1) Matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ memenuhi sifat bahwa satu utama baris berikutnya berada lebih kanan dari baris sebelumnya.

(2) Matriks $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ memenuhi sifat dimana satu utama baris berikutnya berada lebih kiri dari baris sebelumnya.

c) Jika ada baris nol, maka letaknya di paling bawah.

Contoh 5.25

(1) Matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ memenuhi sifat dimana baris nol berada di paling bawah.

(2) Matriks $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ memiliki baris nol tapi tidak berada di paling bawah

Semua bentuk eselon baris tereduksi merupakan bentuk eselon baris, satu hal yang membedakan eselon baris dengan eselon baris tereduksi adalah entri-entri pada setiap kolom yang memuat satu utama selain satu utama semuanya bernilai 0. Dengan kata lain bagian atas satu utama pada suatu kolom semua bernilai 0.

Contoh 5.26

a) Matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ merupakan eselon baris tereduksi, karena A merupakan matriks eselon baris dan entri di sebelah atas satu utama pada setiap baris nol semua.

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ bukan merupakan eselon baris tereduksi, karena entri di sebelah atas satu utama di baris kedua bukan nol.

Metode eliminasi Gauss adalah melakukan OBE matriks diperbesar sampai menjadi eselon baris. Sedangkan metode eliminasi Gauss Jordan adalah melakukan OBE matriks diperbesar sampai menjadi eselon baris tereduksi. Matriks diperbesar adalah matriks yang terdiri dari matriks koefisien dan matriks konstanta.

Contoh 5.27 Menyelesaikan persamaan linier simultan dengan menggunakan metode eliminasi Gauss Jordan, dapat dilihat sebagai berikut.

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$$
$$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1$$
$$3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10$$

Dari persamaan linier simultan yang diketahui, maka matriks diperbesar dari persamaan – persamaan tersebut adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

Kita akan melakukan metode eliminasi Gauss Jordan, yaitu melakukan OBE pada matriks diperbesar sampai matriks tersebut menjadi eselon baris tereduksi.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} b_2 + b_1 \\ b_3 + (-3)b_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{bmatrix} -b_2$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{bmatrix} \frac{b_3}{-52} \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{bmatrix} b_3 + 10b_2$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} b_1 + (-1)b_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} b_2 + 5b_3$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} b_1 + (-1)7b_3$$

Sehingga diperoleh $x_1 = 3, x_2 = 1$ dan $x_3 = 2$

Metode eliminasi Gauss atau Gauss-Jordan juga dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan linier simultan, untuk m persamaan dan n variabel bebas dengan $m \neq n$. Jadi dua metode ini dapat digunakan untuk menyelesaikan sebarang persamaan linier simultan.

C. Persamaan dan Pertidaksamaan Kuadrat

1. Persamaan Kuadrat

Persamaan kuadrat adalah persamaan dimana kuantitas yang tidak diketahui (variabelnya) memiliki pangkat tertinggi sama dengan 2. Persamaan ini memiliki bentuk umum $ax^2 + bx + c$, dimana $a, b,$ dan c bilangan riil dan $a \neq 0$, serta x adalah kuantitas yang tidak diketahui atau variabel.

Penyelesaian persamaan kuadrat adalah nilai – nilai variabel yang memenuhi persamaan kuadrat dan disebut akar dari persamaan kuadrat. Himpunan penyelesaian (akar – akar) persamaan kuadrat adalah himpunan semua penyelesaian persamaan kuadrat. Ada tiga cara untuk menyelesaikan persaman kuadrat yaitu cara memfaktorkan, cara melengkapkan kuadrat sempurna dan menggunakan rumus.

a. Cara memfaktorkan (Faktorisasi)

Cara ini didasari oleh sifat perkalian dua bilangan riil. Jika a dan b adalah bilangan riil sehingga $ab = 0$ maka $a = 0$ atau $b = 0$. Demikian pula sebaliknya, jika $a = 0$ atau $b = 0$ maka $ab = 0$. Cara memfaktorkan ini dilakukan dengan cara seperti berikut.

1) Mengubah persamaan kuadrat sehingga salah satu ruas sama dengan nol.

2) Mengubah ruas yang lain menjadi perkalian dari dua suku yang masing-masing adalah faktor linier yang berbentuk $(x - a)$ untuk suatu $a \in \mathbb{R}$.

Metode faktorisasi ini dapat dilakukan dengan mudah jika persamaan kuadrat memiliki akar-akar bilangan rasional.

Contoh 5.28 Untuk menyelesaikan persamaan kuadrat $x^2 - 5x - 24 = 0$ dapat kita perhatikan faktor – faktor dari x^2 adalah x dan x. Keduanya diletakkan di dalam tanda kurung sebagai bentuk perkalian suku dua berikut.

$$x^2 - 5x - 24 = 0$$
$$(x \pm \cdots)(x \pm \cdots) = 0$$

Setelah itu perhatikan ada 16 faktor bilangan bulat dari $c = -24$, yaitu $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 8, \pm 12,\ \pm 24$. Faktorkan bilangan -24 kemudian cari dua faktor yang jika dijumlahkan menjadi suku yang ditengah yaitu $b = -5$. Berdasarkan hal ini didapat bahwa $-24 = 3(-8)$ dan $3 + (-8) = -5$. Jadi dua buah faktor tersebut adalah 3 dan -8. Perhatikan bahwa:

$$x^2 - 5x - 24 = 0$$
$$(x + 3)(x - 8) = 0$$

Sehingga diperoleh diperoleh $x + 3 = 0$ atau $x - 8 = 0$, Kita peroleh.

$$x_1 + 3 = 0$$
$$x_1 + 3 - 3 = 0 - 3 \qquad \text{… kedua ruas dikurang } 3$$
$$x_1 = -3$$

Atau

$$x_2 - 8 = 0$$

$x_2 - 8 + 8 = 0 + 8$ … kedua ruas ditambah 8

$x_2 = 8$

b. Cara melengkapkan kuadrat sempurna

Ada beberapa persamaan kuadrat yang sulit untuk menentukan himpunan penyelesaian dengan cara memfaktorkan karena karena akar – akarnya merupakan bilangan irasional. Sehingga dalam menyelesaikan persamaan kuadrat yang sulit diselesaikan dengan cara memfaktorkan dapat kita gunakan dengan cara melengkapkan kuadrat sempurna. Cara melengkapkan kuadrat sempurna ini dilakukan dengan cara seperti berikut.

Misalkan $ax^2 + bx + c = 0$, maka:

1) Pindahkan konstanta c ke ruas kanan.
2) Bagi kedua ruas dengan koefisien suku x^2yaitu a.
3) Hitung $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ dan jumlahkan kedua ruas dengan hasilnya.
4) Faktorkan ruas kanan sebagai $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ dan sederhanakan ruas kanan.
5) Selesaikan dengan menggunakan sifat akar kuadrat dari suatu persamaan.

<u>**Contoh 5.29**</u> Menyelesaikan persamaan kuadrat $x^2 + 2x - 9 = 0$ dengan cara melengkapkan kuadrat sempurna dapat dilihat sebagai berikut.

$x^2 + 2x - 9 = 0$

$x^2 + 2x = 9$ … pindahkan konstanta $c = -9$ ke ruas kanan

$x^2 + 2x + 1 = 9 + 1$ … hitung $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = 1$, jumlahkan di kedua ruas

$(x + 1)^2 = 10$ … faktorkan ruas kiri menjadi bentuk kuadrat

$x + 1 = \pm\sqrt{10}$

$x = \pm\sqrt{10} - 1$

Artinya $x_1 = \sqrt{10} - 1$ atau $x_2 = -\sqrt{10} - 1$

c. Menggunakan rumus

Metode umum untuk menyelesaikan persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah dengan menggunakan rumus kuadrat atau sering disebut rumus abc. Rumus kuadrat diperoleh dengan proses melengkapkan kuadrat sempurna untuk persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$. Proses pembuktian rumus abc dalam menentukan akar – akar persamaan kuadrat dapat dilihat sebagai berikut.

$ax^2 + bx + c = 0$

$ax^2 + bx + c - c = 0 - c$ … kedua ruas dikurang c

$ax^2 + bx = -c$

$\frac{ax^2+bx}{a} = -\frac{c}{a}$ … kedua ruas dibagi a

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ … kedua ruas ditambah $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Uraian di atas membuktikan berlakunya rumus abc. Misalkan a, b, c bilangan riil dan $a \neq 0$ maka akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah sebagai berikut.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

<u>Contoh 5.30</u> Menyelesaikan persamaan kuadrat $2x^2 - 2x - 19 = 0$ dengan cara rumus abc dapat kita perhatikan sebagai berikut.

Karena $a = 2, b = -2$ dan $c = -19$ maka:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(2)(-19)}}{2(2)}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 152}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{156}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(4)(39)}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{39}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{39}$$

Artinya $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{39}$ dan $x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{39}$ adalah akar dari persamaan kuadrat $2x^2 - 2x - 19 = 0$.

Penyelesaian persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan $a \neq 0$ adalah $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Tampak bahwa akar-akarnya ditentukan oleh nilai dari $b^2 - 4ac$ yang disebut dengan diskriminan dan dinotasikan dengan D. Kita simpulkan akibat dari kemungkinan nilai D terhadap akar-akar persamaan kuadrat.

a. Jika $D > 0$ maka persamaan kuadrat memiliki dua akar riil yang berbeda.
   1) Jika D berupa bilangan kuadrat maka akar – akarnya rasional.
   2) Jika D bukan berupa bilangan kuadrat maka akar – akarnya irasional.
b. Jika $D = 0$ maka mempunyai dua akar riil yang sama.
c. Jika $D < 0$ maka mempunyai dua akar imajiner (bukan riil).

Contoh 5.31 Kita dapat menentukan jenis akar – akar dari persamaan $3x^2 - 6x - 11 = 0$, tanpa menyelesaikan persamaannya. Perhatikan bahwa:

$$D = b^2 - 4ac$$
$$D = (-6)^2 - 4(3)(-11)$$
$$D = 36 + 132$$
$$D = 168$$

Karena $D > 0$ dan bukan merupakan bilangan kuadrat maka dua akarnya berbeda dan rasional.

Telah diketahui bahwa akar – akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dengan $a \neq 0$ adalah $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ atau $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Selanjutnya, kita dapat mengetahui jumlah dan hasil kali dari akar-akar persamaan kuadrat dengan memanipulasi aljabar sebagai berikut:

1) Jumlah akar-akar persamaan kuadrat

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= -\frac{2b}{2a}$$

$$= -\frac{b}{a}$$

2) Hasil kali akar-akar persamaan kuadrat

$$x_1 . x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

$$= \frac{b^2 + b\sqrt{b^2 - 4ac} - b\sqrt{b^2 - 4ac} - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{c}{a}$$

<u>Contoh 5.32</u> Kita dapat menentukan penjumlahan akar – akar dan perkalian akar - akar dari persamaan $3x^2 - 6x - 11 = 0$, tanpa menyelesaikan persamaannya, Kita miliki bahwa:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$= -\frac{-6}{3}$$

$$= 2$$

Kita peroleh penjumlahan akar – akarnya adalah 2.

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

$$= -\frac{11}{3}$$

Kita peroleh perkalian akar – akarnya adalah $-\frac{11}{3}$.

2. Pertidaksamaan Kuadrat

Pada bagian ini akan mempelajari cara mendapatkan penyelesaian dari pertidaksamaan kuadrat. Pertidaksamaan kuadrat adalah pertidaksamaan yang memuat sebuah variabel dan pangkat tertinggi variabel tersebut adalah dua. Suatu pertidaksamaan kuadrat dalam variabel x dapat berbentuk salah satu dari bentuk berikut.

a. $ax^2 + bx + c < 0$
b. $ax^2 + bx + c > 0$
c. $ax^2 + bx + c \leq 0$
d. $ax^2 + bx + c \geq 0$
e. $ax^2 + bx + c \neq 0$

Dengan $a, b, c \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$

Himpunan penyelesaian pertidaksamaan kuadrat dalam variabel x dapat ditentukan dengan garis bilangan.

Contoh 5.33 Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $x^2 + 3x - 4 > 0$

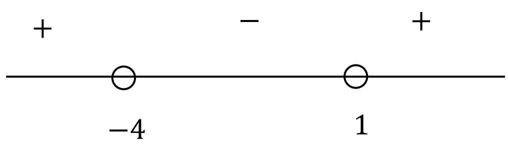
Langkah 1

Tentukan pembuat nol (jika ada) dari bagian ruas kiri pertidaksamaan. Pembuat nol dari ruas kiri ini adalah akar-akar dari persamaan kuadrat.

$x^2 + 3x - 4 = 0$
$(x + 4)(x - 1) = 0$
$x_1 = -4$ atau $x_2 = 1$

Langkah 2

Gambarlah pembuat nol yang diperoleh pada langkah 1 pada garis bilangan dan tentukan tanda dari $x^2 + 3x - 4$ untuk setiap interval yang dibatasi oleh pembuat nol 1 dan -4. Kita peroleh hasilnya sebagai berikut



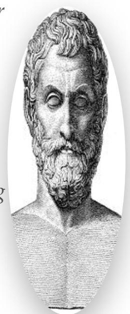
Berdasarkan tanda-tanda interval, maka yang memenuhi pertidaksamaan $x^2 + 3x - 4 > 0$ adalah $x < -4$ atau $x > 1$. Jadi himpunan penyelesaian adalah HP $= \{x | x < -4$ atau $x > 1, x \in \mathbb{R}\}$.

D. Konsep Persamaan Lingkaran

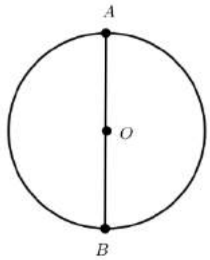
1. Definisi Lingkaran

Math Info

Thales (624-546 SM) lahir di kota Miletus yang merupakan tanah perantauan orang-orang Yunani di Asia Kecil. Di dalam geometri, Thales dikenal karena menyumbangkan apa yang disebut teorema Thales. Salah satu Teorema Thales, yaitu sebuah lingkaran terbagi dua sama besar oleh diameternya.



Lingkaran adalah bentuk kurva yang sering ditemui dalam geometri. Lingkaran sangat terkait dengan konsep trigonometri yang akan dibahas pada materi selanjutnya Kita dapat mendefinisikan lingkaran sebagai tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya terhadap suatu titik selalu konstan. Titik tetap tersebut adalah titik pusat lingkaran dan jarak yang konstan adalah jari-jarinya.



Gambar 5.1 Lingkaran

Pusat lingkaran= O

Jari-jari lingkaran $(r) = OA$ dan OB

Diameter lingkaran $(d) = AB$

2. Persamaan Lingkaran

Bentuk umum persamaan lingkaran dapat ditulis sebagai berikut.

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

titik pusat $(a, b) = \left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right)$ dan jari – jari lingkaran $r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}A\right)^2 + \left(\frac{1}{2}B\right)^2 - C}$.

Contoh 5.34 Menentukan titik pusat dan jari - jari dari persamaan lingkaran $3x^2 + 3y^2 + 9x + 12y + 36 = 0$ dapat diselesaikan sebagai berikut.

Karena koefisien x^2 dan y^2 pada persamaan lingkarannya adalah 3 maka persamaan lingkaran tersebut harus dibagi 3 agar koefisien x^2 dan y^2 sama dengan satu yaitu $x^2 + y^2 + 3x + 4y - 12 = 0$. Sehingga titik pusatnya adalah $\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$ dan jari – jari lingkarannya adalah:

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}A\right)^2 + \left(\frac{1}{2}B\right)^2 - C}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2}(3)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}(4)\right)^2 - (-12)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (2)^2 + 12}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{4} + 4 + 12}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{4} + 8}$$

$$= \sqrt{\frac{9 + 32}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{41}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{41}$$

Pada bentuk umum persamaan lingkaran tersebut dengan syarat koefisien x^2 dan y^2 harus sama dengan satu dan perhatikan bahwa suku xy tidak ada. Selanjutnya terdapat dua jenis khusus dari persamaan lingkaran berdasarkan titik pusatnya.

a. Persamaan lingkaran dengan pusat $(0,0)$ dan jari – jari r adalah:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

b. Persamaan lingkaran dengan pusat (a, b) dan jari-jarinya (r) adalah:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

atau dapat ditulis sebagai

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Contoh 5.35

a. Persamaan lingkaran dengan titik pusat $(0,0)$ dan jari – jari 8 adalah

$$x^2 + y^2 = 8^2$$

atau dapat ditulis juga sebagai

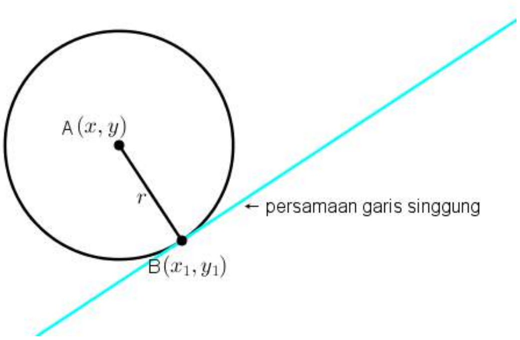
$$x^2 + y^2 = 64$$

b. Persamaan lingkaran dengan titik pusat $(-2,4)$ dan jari – jari 2 adalah

$$x^2 + y^2 - 2(-2)x - 2(4)y + (-2)^2 + (4)^2 - (2)^2 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 4\text{x} - 8y + 4 + 16 - 4 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 4x - 8y + 16 = 0$$

3. Persamaan Garis Singgung Pada Lingkaran

Persamaan garis singgung pada lingkaran merupakan suatu garis yang menyinggung pada suatu lingkaran. Garis singgung pada suatu lingkaran tepat bertemu dengan satu titik yang terletak pada lingkaran. Dari titik pertemuan suatu garis singgung dan lingkaran, dapat ditentukan persamaan garis singgung tersebut.



Gambar 5.2 Persamaan Garis Singgung Lingkaran

Persamaan garis singgung lingkaran yang melalui satu titik yaitu $B(x_1, y_1)$ dapat ditentukan berdasarkan bentuk persamaan lingkaran, dapat dilihat sebagai berikut.

a. Persamaan garis singgung lingkaran yang bentuk persamaan lingkarannya $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ adalah $xx_1 + yy_1 + \frac{1}{2}A(x + x_1) + \frac{1}{2}B(y + y_1) + C = 0$.
b. Persamaan garis singgung lingkaran yang bentuk persamaan lingkarannya $x^2 + y^2 = r^2$ adalah $xx_1 + yy_1 = r^2$.
c. Persamaan garis singgung lingkaran yang bentuk persamaan lingkarannya $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ adalah $(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$

<u>Contoh 5.36</u>

a. Misalkan lingkaran $x^2 + y^2 + 2x - 3y - 7 = 0$, untuk menentukan persamaan garis singgung lingkaran di titik $(1,1)$ dapat dilihat sebagai berikut.

$$xx_1 + yy_1 + \frac{1}{2}A(x + x_1) + \frac{1}{2}B(y + y_1) + C = 0$$

$$x(1) + y(1) + \frac{1}{2}(2)(x + 1) + \frac{1}{2}(-3)(y + 1) - 7 = 0$$

$$x + y + (x + 1) - \frac{3}{2}(y + 1) - 7 = 0$$

$$x + y + x + 1 - \frac{3}{2}y - \frac{3}{2} - 7 = 0$$

$$x + x + y - \frac{3}{2}y + 1 - 7 - \frac{3}{2} = 0$$

$$2x - \frac{1}{2}y - \frac{15}{2} = 0$$

$$-\frac{1}{2}y = -2x + \frac{15}{2}$$

$$y = 4x - 15$$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah $y = 4x - 15$

b. Misalkan lingkaran $x^2 + y^2 = 8$, untuk menentukan persamaan garis singgung lingkaran di titik $(1,1)$ dapat dilihat sebagai berikut.

$$xx_1 + yy_1 = r^2$$
$$x(1) + y(1) = 8$$
$$x + y = 8$$
$$y = 8 - x$$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah $y = 8 - x$

c. Misalkan lingkaran $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 12$, untuk menentukan persamaan garis singgung lingkaran di titik $(1,1)$ dapat dilihat sebagai berikut.

$$(x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = r^2$$
$$(x-3)(1-3) + (y+2)(1+2) = 12$$
$$(x-1)(-2) + (y+2)(3) = 12$$
$$-2(x-1) + 3(y+2) = 12$$
$$-2x + 2 + 3y + 6 = 12$$
$$-2x + 3y + 2 + 6 - 12 = 0$$
$$-2x + 3y - 4 = 0$$
$$3y = 2x + 4$$
$$y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$.

Selanjutnya jika diketahui persamaan garis singgung lingkaran memiliki gradien m maka persamaan garis singgungnya dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut.

a. Persamaan garis singgung lingkaran yang bentuk persamaan lingkarannya $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ adalah $y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1 + m^2}$ dengan titik pusat $(a, b) = \left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right)$ dan jari – jari lingkaran $r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}A\right)^2 + \left(\frac{1}{2}B\right)^2 - C}$.

b. Persamaan garis singgung lingkaran yang bentuk persamaan lingkarannya $x^2 + y^2 = r^2$ adalah $y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$.

c. Persamaan garis singgung lingkaran yang bentuk persamaan lingkarannya $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ adalah $y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1 + m^2}$

Contoh 5.37

a. Misalkan lingkaran $x^2 + y^2 + 2x - 3y - 7 = 0$, untuk menentukan persamaan garis singgung lingkaran yang tegak lurus dengan $y - 2x = 4$, terlebih dahulu kita tentukan titik pusatnya (a, b) dan jari – jari lingkaran r yang dapat dilihat sebagai berikut.

$$(a, b) = \left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right)$$
$$= \left(-1, \frac{3}{2}\right)$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}A\right)^2 + \left(\frac{1}{2}B\right)^2 - C}$$
$$= \sqrt{(1)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 7}$$
$$= \sqrt{1 + \frac{9}{4} + 7}$$

$$= \sqrt{\frac{41}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{41}$$

Sehingga titik pusatnya adalah $\left(-1.\frac{3}{2}\right)$ dan jari – jarinya adalah $\frac{1}{2}\sqrt{41}$. Karena persamaan garis singgung lingkaran tegak lurus dengan $y - 2x = 4$ maka kita dapat tentukan nilai gradien dari persamaan garis singgung. Karena $y = 2x + 4$ maka gradien garis ini adalah $m_1 = 2$, karena persamaan garis singgung lingkarannya tegak lurus maka gradiennya adalah $m_2 = -\frac{1}{2}$ (karena $m_1 m_2 = -1$, untuk dua garis tegak lurus). Sehingga untuk menentukan persamaan singgungnya dapat dilihat sebagai berikut.

$$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

$$y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\left(x - (-1)\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{41}\sqrt{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x + 1) \pm \frac{1}{2}\sqrt{41\left(1 + \frac{1}{4}\right)}$$

$$y - 3 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \pm \sqrt{41\left(\frac{5}{4}\right)}$$

$$y - 3 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{205}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 3 - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{205}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{205}$$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{205}$ atau $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{205}$.

b. Misalkan lingkaran $x^2 + y^2 = 8$, untuk menentukan persamaan garis singgung lingkaran yang sejajar dengan $y - 2x = 4$, terlebih dahulu kita tentukan nilai gradien dari garis ini. Karena $y = 2x + 4$ maka gradien garis ini adalah $m_1 = 2$, karena persamaan garis singgung lingkarannya sejajar dengan garis $y = 2x + 4$ maka gradien garis singgungnya adalah $m_2 = 2$. Sehingga untuk menentukan persamaan singgungnya dapat dilihat sebagai berikut.

$$y = m_2 x \pm r\sqrt{1 + m_2^2}$$

$$y = 2x \pm \sqrt{8}\sqrt{1 + (2)^2}$$

$$y = 2x \pm \sqrt{8(5)}$$

$$y = 2x \pm \sqrt{40}$$

$$y = 2x \pm 2\sqrt{10}$$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah $y = 2x \pm 2\sqrt{10}$.

c. Misalkan lingkaran $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 12$, untuk menentukan persamaan garis singgung lingkaran yang tegak lurus dengan $2y - x + 4 = 0$, terlebih dahulu kita tentukan nilai gradien garis ini. Karena $y = \frac{1}{2}x - 4$ maka gradiennya adalah $m_1 = \frac{1}{2}$, karena persamaan garis singgung lingkarannya tegak lurus dengan garis $y = \frac{1}{2}x - 4$ maka gradien garis singgungnya adalah $m_2 = -2$ (karena $m_1 . m_2 = -1$, untuk dua garis tegak lurus). Sehingga untuk menentukan persamaan singgungnya dapat dilihat sebagai berikut.

$$y - b = m_2(x - a) \pm r\sqrt{1 + m_2^2}$$

$$y - (-2) = -2(x - 3) \pm \sqrt{12}\sqrt{1 + (-2)^2}$$

$$y + 2 = -2x + 6 \pm \sqrt{12(5)}$$

$$y = -2x + 6 - 2 \pm \sqrt{60}$$

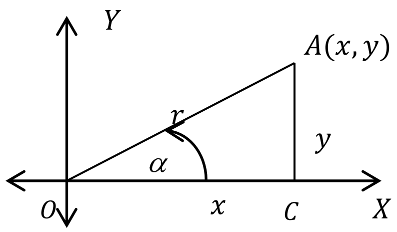
$y = -2x + 4 \pm 2\sqrt{15}$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah $y = -2x + 4 + 2\sqrt{15}$ atau $y = -2x + 4 - 2\sqrt{15}$.

E. Persamaan dan Pertidaksamaan Trigonometri

1. Perbandingan Trigonometri Pada Segitiga Siku-Siku

Misalkan $A(x, y)$ adalah suatu titik yang berjarak r dengan titik asal O seperti pada gambar di bawah ini. Kita gambarkan segitiga siku-siku dengan titik sudut sikunya di $C(x, 0)$. Misalkan α besar sudut pada titik O maka panjang sisi di hadapan sudut O adalah y, panjang sisi di hadapan sudut A adalah x dan panjang sisi di hadapan sudut C adalah r. Selain itu kita miliki hubungan berikut



$OA = \sqrt{x^2 + y^2} = r \text{ dan } r > 0$

Gambar 5.3 Perbandingan Trigonometri Pada Segitiga Siku - Siku

Math Info

Abu Nashr Mansur bin Ali *(sekitar 1707–1783) merupakan matematikawan dari Khawarazm. Ia banyak dikenal untuk penemuannya tentang hukum sinus. Dalam matematikawan ia memiliki banyak tulisan penting pada trigonometri, yang dikembangkan dari tulisan Ptolomeus.*

Untuk selanjutnya sisi y disebut sisi siku-siku di depan sudut α. Sisi x disebut sisi siku-siku di dekat (berimpit) sudutα, dan sisi r disebut hipotenusa (sisi miring). Dari segitiga ini didefinisikan 6 (enam) perbandingan trigonometri terhadap sudut α sebagai berikut:

a. $\sin \alpha = \frac{y}{r}$

b. $\cos \alpha = \frac{x}{r}$

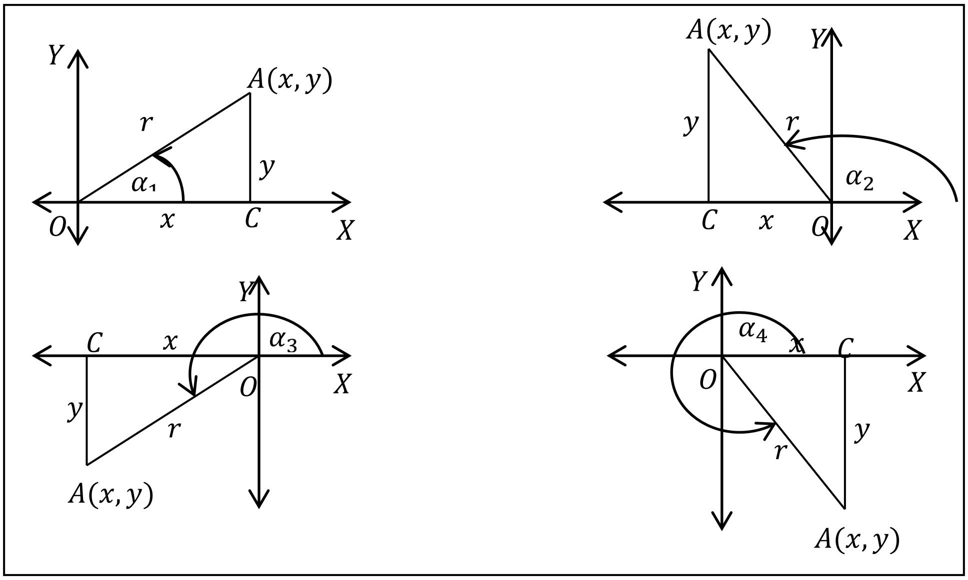
c. $\tan \alpha = \frac{y}{x}$

d. $\csc \alpha = \frac{r}{y}$

e. $\sec a = \frac{r}{x}$

f. $\cot a = \frac{x}{y}$

Pada gambar sebelumnya kita lihat bahwa titik A adalah sembarang titik di kuadran I dengan koordinat (x, y). Jadi OA adalah garis yang dapat diputar terhadap titik asal O dalam koordinat kartesius, sehingga $\angle XOA$ bernilai 0° sampai dengan 90°. Perlu diketahui bahwa Dengan memutar garis OA lebih jauh lagi maka $\angle XOA = \alpha$ dapat terletak di kuadran I, kuadran II, kuadran III atau kuadran IV. Untuk itu kita definisikan perbandingan trigonometri pada kasus titik A berada di kuadran kuadran II, kuadran III atau kuadran IV menggunakan gambar segitiga berikut dengan cara yang sama seperti segitiga sebelumnya.

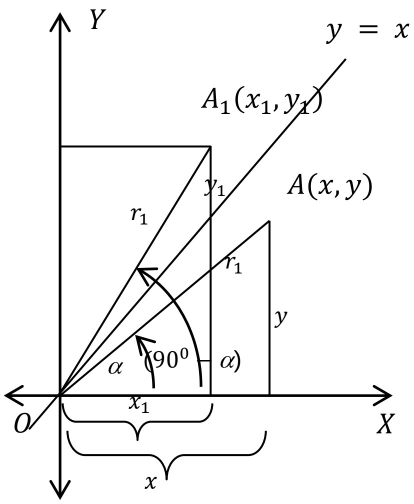


Gambar 5.4 Titik di berbagai kuadran

2. Rumus Perbandingan Trigonometri Sudut Berelasi

Sudut – sudut yang berelasi dengan sudut α adalah sudut $(90^0 \pm \alpha)$, $(180^0 \pm \alpha)$, $(360^0 \pm \alpha)$, dan $-a^0$. Dua buah sudut yang berelasi ada yang diberi nama khusus, misalnya penyiku (komplemen) dari $\alpha < 90^0$ adalah $(90^0 - \alpha)$ dan pelurus (suplemen) untuk sudut $\alpha < 180^0$ adalah $(180^0 - \alpha)$. Sebagai contoh penyiku sudut 50^0adalah 40^0, pelurus sudut 110^0adalah 70^0.

a. Hubungan perbandingan trigonometri untuk sudut α dengan $(90^0 - \alpha)$



Gambar 5.5 Perbandingan Trigonometri sudut $(90^0 - \alpha)$

Dari gambar di atas titik $A_1(x_1, y_1)$ adalah bayangan dari $A(x, y)$ akibat pencerminan garis $y = x$, sehingga diperoleh:

1) $\angle XOA = \alpha$ dan $\angle XOA_1 = 90° - \alpha$
2) $x_1 = y$, $y_1 = x$ dan $r_1 = r$

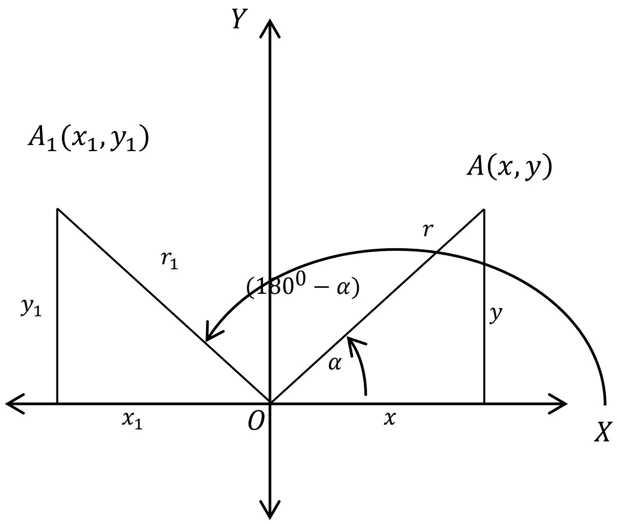
Dengan menggunakan hubungan di atas dapat diperoleh sebagai berikut.

1) $\sin(90^0 - \alpha) = \frac{y_1}{r_1} = \frac{x}{r} = \cos\alpha$

2) $\cos(90^0 - \alpha) = \frac{x_1}{r_1} = \frac{y}{r} = \sin\alpha$

3) $\tan(90^0 - \alpha) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{x}{y} = \cot\alpha$

b. Hubungan perbandingan trigonometri untuk sudut α dengan $(180^0 - \alpha)$



Gambar 5.6 Trigonometri sudut $(180^0 - \alpha)$

Dari gambar di atas titik $A_1(x_1, y_1)$ adalah bayangan dari $A(x, y)$ akibat pencerminan sumbu y sehingga diperoleh:

1) $\angle XOA = \alpha$ dan $\angle XOA_1 = 180° - \alpha$
2) $x_1 = -x$, $y_1 = y$ dan $r_1 = r$

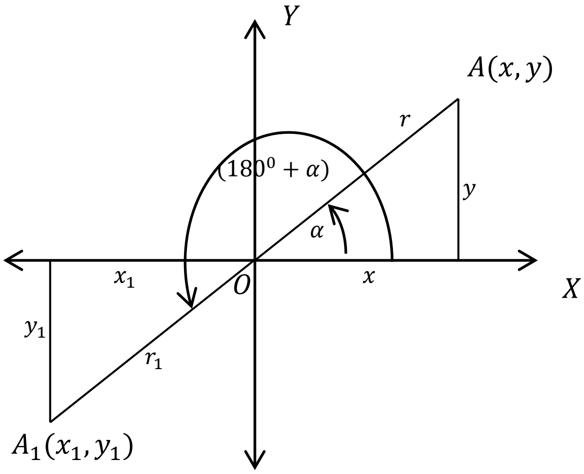
Dengan menggunakan hubungan di atas dapat diperoleh sebagai berikut.

1) $\sin(180^0 - \alpha) = \frac{y_1}{r_1} = \frac{y}{r} = \sin\alpha$

2) $\cos(180^0 - \alpha) = \frac{x_1}{r_1} = \frac{-x}{r} = -\cos\alpha$

3) $\tan(180^0 - \alpha) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y}{-x} = -\tan\alpha$

c. Hubungan perbandingan trigonometri untuk sudut α dengan $(180^0 + \alpha)$



Gambar 5.7 Trigonometri sudut $(\mathbf{180^0} + \boldsymbol{\alpha})$

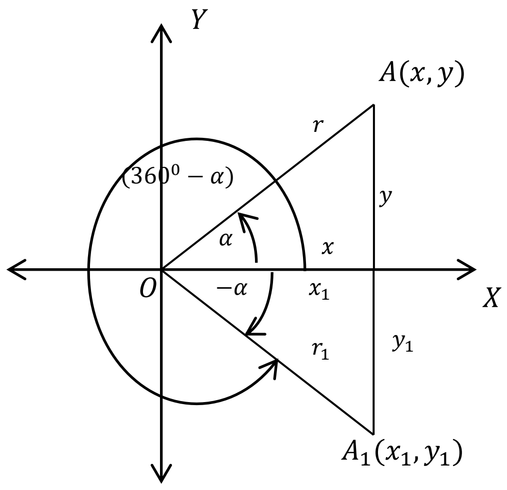
Dari gambar di atas titik $A_1(x_1, y_1)$ adalah bayangan dari $A(x, y)$ akibat pencerminan sumbu $y = -x$ sehingga diperoleh:

1) $\angle XOA = \alpha$ dan $\angle XOA_1 = 180° + \alpha$
2) $x_1 = -x$, $y_1 = -y$ dan $r_1 = r$

Dengan menggunakan hubungan di atas dapat diperoleh sebagai berikut.

1) $\sin(180^0 + \alpha) = \frac{y_1}{r_1} = \frac{-y}{r} = -\sin\alpha$
2) $cos(180^0 + \alpha) = \frac{x_1}{r_1} = \frac{-x}{r} = -cos\,\alpha$
3) $\tan(180^0 - \alpha) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \tan\alpha$

d. Hubungan perbandingan trigonometri untuk sudut α dengan $(-\alpha)$



Gambar 5.8 Trigonometri sudut $(-\alpha)$

Dari gambar di atas titik $A_1(x_1, y_1)$ adalah bayangan dari $A(x, y)$ akibat pencerminan sumbu x sehingga diperoleh

1) $\angle XOA = \alpha$ dan $\angle XOA_1 = -\alpha$
2) $x_1 = x$, $y_1 = -y$ dan $r_1 = r$

Dengan menggunakan hubungan di atas dapat diperoleh sebagai berikut.

1) $\sin(-\alpha) = \frac{y_1}{r_1} = \frac{-y}{r} = -\sin\alpha$
2) $cos(-\alpha) = \frac{x_1}{r_1} = \frac{x}{r} = cos\,\alpha$
3) $\tan(-\alpha) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{-y}{x} = -\tan\alpha$

3. Rumus – Rumus Trigonometri

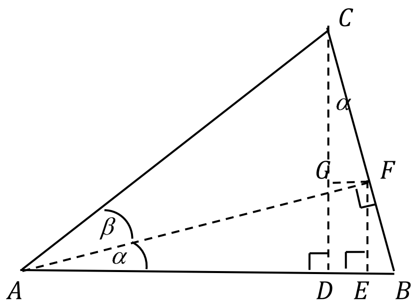
Dalam menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan trigonometri, terlebih dahulu kita pelajari rumus – rumus dalam trigonometri seperti identitas trigonometri, jumlah dan selisih dua sudut, sudut rangkap, rumus perkalian $\sin$ dan $\cos$, dan rumus pertambahan dan pengurangan $\sin$ dan $\cos$.

a. Identitas Trigonometri

Misalkan $\sin\alpha = \frac{y}{r}$, $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ dan $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ maka:

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2}\\ &= \frac{x^2 + y^2}{r^2}\\ &= 1\end{aligned}$$

b. Jumlah dan Selisih Dua Sudut



Gambar 5.9 Jumlah dan Selisih Dua Sudut

Perhatikan gambar di atas, misalkan garis CD dan garis AF adalah garis tinggi dari segitiga ABC.

Perhatikan segitiga siku –siku ADC

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{AD}{AC}$$

$$AD = AC\cos(\alpha + \beta)$$

Perhatikan segitiga siku – siku CGF, kita miliki.

$$\sin\alpha = \frac{GF}{CF}$$

$$GF = CF\sin\alpha \ldots (1)$$

Perhatikan segitiga siku – siku AFC, kita miliki.

$$\sin\beta = \frac{CF}{AC}$$

$$CF = AC\ sin\,\beta \ldots (2)$$

$$cos\,\beta = \frac{AF}{AC}$$

$$AF = AC\cos\beta \ldots (3)$$

Perhatikan segitiga siku – siku AEF, kita miliki.

$$\cos\alpha = \frac{AE}{AF}$$

$$AE = AF\cos\alpha \ldots (4)$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh $GF = AC\sin\alpha\sin\beta$. Karena $GF = DE$ maka $DE = AC\sin\alpha\sin\beta$.

Dari persamaan (3) dan (4) diperoleh $AE = AC\cos\alpha\cos\beta$. Karena $AD = AE - DE$ maka perhatikan bahwa:

$$AD = AE - DE$$

$$AC\cos\ (\alpha+\beta) = AC\cos\alpha\cos\beta - AC\sin\alpha\sin\beta$$

$$\boxed{\cos\ (\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

Dari hasil di atas jika mengganti β dengan $-\beta$, diperoleh:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= cos\big(\alpha+(-\beta)\big)\\ &= \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta)\end{aligned}$$

$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\,(-\sin\beta)$$

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\big(90^0 - (\alpha+\beta\ )\big)$$

$$= \cos\big((90^0 - \alpha) - \beta\big)$$

$$= \cos(90^0 - \alpha)\cos\ \beta + \sin(90^0 - \alpha)\sin\ \beta$$

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\ \alpha\ \cos\ \beta + \cos\ \alpha\sin\ \beta}$$

Dari hasil di atas jika mengganti β dengan $-\beta$, diperoleh:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\big(\alpha + (-\beta)\big)$$

$$= \sin\ \alpha\ \cos(-\ \beta) + \cos\ \alpha\sin\ (-\beta)$$

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta) = \sin\ \alpha\ \cos\ \beta - \cos\ \alpha\sin\ \beta}$$

$\boxed{\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\ \alpha\pm\tan\ \beta}{1\mp\tan\ \alpha\tan\beta}}$ (buktikan!)

c. Sudut Rangkap

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha)$$

$$= \sin\alpha\cos\ \alpha + \cos\ \alpha\sin\ \alpha$$

$$\boxed{\sin\ 2\alpha = 2\sin\ \alpha\cos\alpha}$$

Dengan menggunakan persamaan di atas, diperoleh:

$\boxed{\begin{array}{l}\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2 a \\ \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \\ \cos 2\alpha \quad = 1 - 2\sin^2\alpha\end{array}}$ (buktikan !)

d. Perkalian $\sin$ dan $\cos$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\ \alpha\cos\beta - \sin\ \alpha\sin\beta$$

$$\underline{\cos(\alpha-\beta) = \cos\ \alpha\cos\beta + \sin\ \alpha\sin\beta} +$$

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\ \alpha\cos\beta}$$

Dengan cara yang sama dapat diperoleh:

$$\boxed{\begin{array}{c}\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\,\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\,\alpha\cos\beta\\ \sin(\alpha+\beta)-\sin\,(\alpha-\beta)=2\cos\,\alpha\sin\beta\end{array}}$$ (buktikan!)

e. Pertambahan dan pengurangan $\sin$ dan $\cos$

Misalkan $\alpha+\beta=A$ dan $\alpha-\beta=B$ maka:

$\alpha+\beta=A$	$\alpha+\beta=A$
$\underline{\alpha-\beta=B}\,+$	$\underline{\alpha-\beta=B}\,-$
$2\alpha=A+B$	$2\beta=A-B$
$\alpha=\frac{1}{2}(A+B)$	$\beta=\frac{1}{2}(A-B)$

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\,\alpha\cos\beta$$

$$\boxed{\cos\,A+\cos\,B=2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}$$

Kita miliki juga

$$\boxed{\begin{array}{c}\cos\,A-\cos\,B=-2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)\\ \sin\,A+\sin\,B=2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)\\ \sin\,A-\,\sin\,B=2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)\end{array}}$$ (buktikan!)

4. Persamaan Trigonometri

Dalam menyelesaikan persamaan trigonometri dengan sudut derajat (dari 0^0 sampai 360^0) dapat digunakan sifat – sifat pada berikut.

a. Jika $\sin x=\sin p^0$ maka $x=p^0+k.360^0$ atau

$$x=(180^0-p^0)+k.360^0$$

b. Jika $\cos x=\cos p^0$ maka $x=p^0+k.360^0$ atau

$$x = (360^0 - p^0) + 360^0 k$$

c. Jika $\tan x = \tan p^0$maka $x = p + 180^0 k$ atau

$$x = (180^0 + p) + 360^0 k$$

Dalam menyelesaikan persamaan trigonometri bentuk $a \sin x + b \cos x = c$ dapat digunakan dengan cara mengubah bentuk $a \sin x + b \cos x = c$ menjadi $k \cos(x - \alpha) = c$, dengan $k = \sqrt{a^2 + b^2}$ dan $\tan \alpha = \frac{a}{b}$.

Contoh 5.38

a. Menentukan nilai x dari persamaan $\cos 2x - \sin x - 1 = 0$ dapat dilihat sebagai berikut.

$\cos 2x - \sin x - 1 = 0$

$1 - 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$2\sin^2 x + \sin x = 0$

Misalkan $\sin x = y$ maka:

$2y^2 + y = 0$

$y(2y + 1) = 0$

Sehingga diperoleh:

$y = 0$	$y = -\frac{1}{2}$
$sin\, x = 0$	$sin\, x = -\frac{1}{2}$
$x = 0^0$ dan $x = 180^0$	$x = 210^0$ dan $x = 330^0$

Jadi himpunan penyelesainnya adalah $HP = \{0^0, 180^0, 210^0, 330^0\}$).

b. Menentukan himpunan penyelesaian dari $-2\cos x - 2\sin x = -2$ dapat dilihat sebagai berikut.

$\tan\alpha = \frac{-2}{-2} = 1$ (di kuadran IV)

$\alpha = 45^0$ (tidak dipakai) atau $\alpha = 225^0$

$k.\cos(x - \alpha) = c$

$\sqrt{4+4}\cos(x - 225^0) = -2$

$2\sqrt{2}\cos(x - 225^0) = -2$

$cos(x - 225^0) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$cos(x - 225^0) = \cos 135^0$ atau $\cos(x - 225^0) = \cos 225^0$

$x = 360^0 = 0^0$atau $x = 450^0$ karena $0^0 \leq x \leq 360^0$ maka kita peroleh

$x = 360^0 = 0^0$atau $x = 90^0$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $HP = \{0^0, 90^0, 360^0\}$.

5. Pertidaksamaan Trigonometri

Penyelesaian pertidaksamaan trigonometri sama seperti penyelesaian pada pertidaksamaan linier atau persamaan kuadrat. Sehingga dalam menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan trigonometri terlebih dahulu kita menentukan titik pembuat nol. Kita ubah pertidaksamaan ini menjadi persamaan trigonometri untuk mendapatkan pembuat nol, selanjutnya berikan tanda – tanda (+ atau –) dalam interval untuk menentukan himpunan penyelesaian.

Contoh 5.39 Menentukan himpunan penyelesaian dari $\sin x + \sqrt{3}\cos x < \sqrt{2}$ dapat dilihat sebagai berikut.

$\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ Jika α terletak di kuadran I maka:

$\alpha = 30^0$

Akibatnya,

$k.cos(x-\alpha)=c$

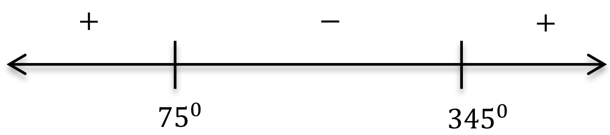
$\sqrt{4}\ cos(x-30^0)=\sqrt{2}$

$2\ cos(x-30^0)=\sqrt{2}$

$cos(x-30^0)=\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$cos(x-30^0)=\cos 45^0$ atau $\cos(x-30^0)=\cos 315^0$

$x=75^0$ atau $x=345^0$



Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $HP=\{x|x<75^0$atau $x>345^0\}$.

F. Pertidaksamaan Rasional

Telah dipaparkan sebelumnya di bab 3, bahwa himpunan semua bilangan rasional dinotasikan dengan $\mathbb{Q}$, yang anggotanya dapat dilihat sebagai berikut.

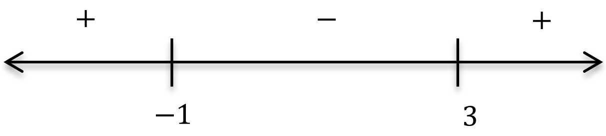
$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q}\middle|p\in \text{bilangan bulat}, q\in \text{bilangan asli, dan } FPB(p,q)=1\right\}$$

Sama halnya dengan bilangan rasional, bentuk pertidaksamaan rasional $\frac{f(x)}{g(x)}>0$. Tandanya selain $>$ bisa juga $<, \geq, \leq,$ atau $\neq$. Cara menyelesaikan pertidaksamaan $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ dilakukan dengan mengalikan dengan $\left(g(x)\right)^2$ pada dua ruas. Karena $\left(g(x)\right)^2$adalah positif maka tidak mengubah tanda pertidaksamaan. Sehingga, jika $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ dan $g(x)\neq 0$ maka $f(x)g(x)>0$.

<u>**Contoh 5.40**</u> Menentukan himpunan penyelesaian dari $\frac{x+1}{x-3}<0$ dapat dilihat sebagai berikut.

$$\frac{x+1}{x-3} < 0$$

$$(x+1)(x-3) < 0$$



Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $HP = \{x | -1 < x < 3, x \in \mathbb{R}\}$.

G.Latihan Soal Bab 5

1. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linier dua variabel dan dua persamsaan dari $2x + y = 5$ dan $-3x + 2y = -1$!

   Penyelesaian:

   Mengeliminasi variabel y dengan cara

   $$4x + 2y = 10$$
   $$\underline{-3x + 2y = -1} \; -$$
   $$7x = 11$$
   $$x = \frac{11}{7}$$

   Substitusi $x = \frac{11}{7}$ ke persamaan $2x + y = 5$ menjadi $y = \frac{13}{7}$

2. Ubahlah persamaan linier simultan berikut menjadi persamaan matriks!

$$-2x_3 + 5x_1 - 7x_2 = 9$$
$$x_2 - x_4 + 2x_1 = -8$$
$$3x_1 - x_4 = -1$$
$$x_1 - 2x_2 + 7 = x_2 - 1$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 5 & -7 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -8 \\ -1 \\ -8 \end{bmatrix}$$

3. Tentukan solusi persamaan linier simultan berikut menggunakan metode eliminasi Gauss Jordan!

$$3x_1 - 2x_3 + x_2 = 1$$

$$-4x_2 - 5x_1 + x_3 = -4$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ -5 & -4 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} b_3 \sim b_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ -5 & -4 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} b_2 + 5b_1 \\ b_3 + (-3b_1) \end{matrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 18 & 1 \\ 0 & 0 & 25 & 0 \end{bmatrix} \frac{b_3}{25} \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 18 & 1 \\ 0 & -2 & -11 & -2 \end{bmatrix} b_3 + 2b_2$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 18 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} b_2 + (-18)b_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} b_1 + (-b_2)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} b_1 + (-3b_3)$$

Sehingga diperoleh $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ dan $x_2 = 1$.

4. Tentukan akar – akar dari persamaan kuadrat dari $3x^2 - 4x - 4 = 0$ dengan cara memfaktor!

Penyelesaian:

$3x^2 - 4x - 4 = 0$

$\frac{1}{3} \cdot 3(3x^2 - 4x - 4) = 0$

$\frac{1}{3}(9x^2 - 12x - 12) = 0$

$\frac{1}{3}(3x - 6)(3x + 2) = 0$

$(x - 2)(3x + 2) = 0$

Jadi akar-akarnya adalah $x_1 = 2$ atau $x_2 = -\frac{2}{3}$

5. Tentukan akar – akar dari persamaan kuadrat dari $3x^2 - 4x - 9 = 0$ dengan cara melengkapkan kuadrat sempurna!

Penyelesaian:

$3x^2 - 4x - 9 = 0$

$3x^2 - 4x = 9$

$x^2 - \frac{4}{3}x = 3$

$x^2 - \frac{4}{3}x + \left(-\frac{4}{2(3)}\right)^2 = 3 + \left(-\frac{4}{2(3)}\right)^2$

$x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{16}{36} = 3 + \frac{4}{9}$

$x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{16}{36} = \frac{31}{9}$

$\left(x - \frac{4}{6}\right)^2 = \frac{31}{9}$

$x - \frac{2}{3} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{31}$

$x = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{31}$

Jadi akar – akarnya adalah $x_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{31}$ atau $x_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{31}$.

6. Tentukan jenis akar – akar dari persamaan kuadrat dari $2x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} = 0$!

Penyelesaian:

$2x^2 - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{4} = 0$

Diskriminan dari persamaan kuadrat di atas adalah:

$D = b^2 - 4ac$

$\quad = \dfrac{9}{4} - 2$

$\quad = \dfrac{1}{4}$

Jadi akar-akarnya adalah dua akar riil berlainan dan irasional.

7. Tentukan akar – akar dari persamaan kuadrat dari $3x^2 - 9x > 0$!

Penyelesaian:

$3x^2 - 9x > 0$

Ubah ke bentuk persamaan

$3x(x - 3) = 0$

Karena pembuat nolnya adalah $x_1 = 0$ atau $x_2 = 3,$ maka $x < 0$ atau $x > 3$

8. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 20$ di titik $(0,4)$!

Penyelesaian:

$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$

$(x + 4)(0 - 3) + (y - 1)(1 - 2) = 20$

$-3x - 12 + 1 - y = 20$

$-y - 3x = 31$

$y = -3x - 31$

9. Tentukan himpunan penyelesaian dari $\cos 2x - 19 \cos x + 10 < 0$, untuk $0^0 < x < 360^0$!

Penyelesaian :

$cos\ 2x - 19\ cos\ x + 10 < 0$

$2\ cos^2\ x\ - 1 - 19\ cos\ x + 10 < 0$

$2\ cos^2\ x - 19\ cos\ x + 9 < 0$

Misalkan $\cos x = y$ maka

$2y^2 - 19y + 9 < 0$

$\frac{1}{2}(2y - 18)(y - 1) < 0$

$(y - 9)(y - 1) < 0$

$y_1 = 9$ atau $y = 1$

$cos\ x = 9$ atau $cos\ x = 1$

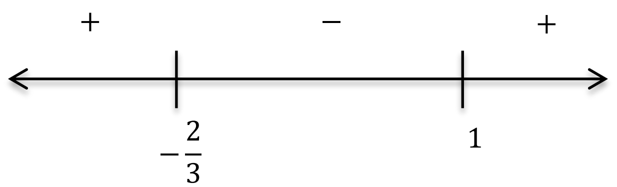
x tidak memenuhi atau $x = 0^0$ atau $x = 180^0$

10. Tentukan himpunan penyelesaian dari $\frac{3x+2}{x-1} < 0$!

Penyelesaian:

$\frac{3x + 2}{x - 1} < 0$

$(3x + 2)(x - 1) < 0$



Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $HP = \left\{x \middle| -\frac{2}{3} < x < 1, x \in \mathbb{R}\right\}$.

H. Rangkuman Bab 5

1. Persamaan adalah adalah kalimat terbuka yang menggunakan relasi sama dengan $(=)$.
2. Pertidaksamaan adalah kalimat terbuka yang ruas kiri dan ruas kanan kalimat tersebut dihubungkan dengan tanda "$<$", "$>$", "$\leq$", "$\geq$" dan $\neq$.
3. Gradien suatu garis adalah perbandingan antara selisih koordinat y dan koodinat x dari dua titik yang terletak pada garis itu.
4. Bentuk umum dari persamaan garis yang dapat ditulis $y - y_1 = m(x - x_1)$ dengan m adalah gradien dari suatu persamaan garis dan (x_1, y_1) adalah koordinat dari suatu titik yang berada di garis.
5. Metode yang dapat digunakan untuk menentukan penyelesaian persamaan linier simultan dua variabel dan dua persamaan adalah metode grafik, metode substitusi, metode eliminasi, dan metode eliminasi substitusi.
6. Persamaan linier simultan dapat dinyatakan sebagai persamaan matriks.
7. Ada tiga tipe dalam operasi baris elementer diantaranya, (1) Menukar baris ke i dengan baris ke j dari matriks, (2) Mengalikan baris ke i dengan bilangan riil $k \neq 0$, dan (3) Mengalikan baris ke j dengan bilangan riil $k \neq 0$, kemudian hasilnya ditambahkan dengan baris ke i.
8. Tiga cara untuk menyelesaikan persamaan kuadrat yaitu cara memfaktorkan, cara melengkapkan kuadrat sempurna dan menggunakan rumus abc.
9. Menentukan jenis akar – akar dari persamaan kuadrat dapat dilakukan dengan menghitung diskriminan $D = b^2 - 4ac$.
   a. Jika $D > 0$ maka mempunyai dua akar riil yang berbeda.
      1) Jika D berupa bilangan kuadrat maka akar – akarnya rasional.
      2) Jika D bukan berupa bilangan kuadrat maka akar – akarnya irasional.
   b. Jika $D = 0$ maka mempunyai dua akar riil yang sama.
   c. Jika $D < 0$ maka mempunyai dua akar imajiner (bukan riil).

10. Misalkan $ax^2 + bx + c = 0$ dengan $a \neq 0$, maka $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ dan $x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$.
11. Diberikan persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ maka titik pusatnya adalah $(a, b) = \left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right)$ dan jari – jari lingkarannya adalah $r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}A\right)^2 + \left(\frac{1}{2}B\right)^2 - C}$.
12. Persamaan garis singgung lingkaran yang bentuk persamaan lingkarannya $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ adalah $xx_1 + yy_1 + \frac{1}{2}A(x + x_1) + \frac{1}{2}B(y + y_1) + C = 0$.
13. Persamaan garis singgung lingkaran yang bentuk persamaan lingkarannya $x^2 + y^2 = r^2$ adalah $xx_1 + yy_1 = r^2$.
14. Persamaan garis singgung lingkaran dengan gradien m untuk persamaan lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ adalah $(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$
15. Persamaan garis singgung lingkaran dengan gradien m untuk persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ atau $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ adalah $y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1 + m^2}$
16. Persamaan garis singgung lingkaran dengan gradien m untuk persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ adalah $y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$
17. Rumus – rumus trigonometri.
    a. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
    b. $\cos\ (\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
    c. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\ \alpha\ \cos\ \beta \pm \cos\ \alpha \sin\ \beta$
    d. $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\ \alpha \pm \tan\ \beta}{1 \mp \tan\ \alpha \tan \beta}$
    e. $\sin\ 2\alpha = 2 \sin\ \alpha \cos \alpha$
    f. $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
    g. $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
    h. $\cos 2\alpha \quad = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

Tes Formatif 5

1. Tentukan himpunan penyelesaian persaman linier dua variabel dari $-2x + 3y = 5$ dan $-x + y = -1$!
2. Ubahlah persamaan linier simultan berikut menjadi persamaan matriks!

$$2x_4 + x_1 - 7x_2 = 9 - x_3$$
$$x_2 + x_4 + 2x_1 = -8 - x_1$$
$$3x_1 - x_4 = x_4 - 1$$
$$x_1 - 2x_2 - 7x_4 = x_2 - 1$$

3. Tentukan solusi persamaan linier simultan berikut menggunakan metode eliminasi Gauss Jordan!

$$3x_1 - 2x_3 + x_2 = 3$$
$$-4x_2 - 5x_1 + x_3 = -5$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$$

4. Tentukan akar – akar dari persamaan kuadrat dari $4x^2 + 11x + 6 = 0$ dengan cara memfaktor!
5. Tentukan akar – akar dari persamaan kuadrat dari $4x^2 + 2x - 11 = 0$ dengan cara melengkapkan kuadrat sempurna!
6. Tentukan jenis akar – akar dari persamaan kuadrat $3x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{5}{3} = 0$!
7. Tentukan akar – akar dari persamaan kuadrat $3x^2 + 13x + 14 \leq 0$!
8. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $3x^2 + 3y^2 = -6x + 9y + 12$ yang sejajar dengan garis $3x = y$!
9. Tentukan himpunan penyelesaian dari $\cos x - \sin x > \frac{1}{2}$!
10. Tentukan himpunan penyelesaian dari $\frac{2x-1}{x+2} > 0$!

Cocokanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 5 yang terdapat dibagian akhir bab ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi persamaan dan pertidaksamaan.

$$\text{Tingkat penguasaan}(x) = \frac{\text{Jumlah jawaban yang benar}}{\text{Jumlah pertanyaan}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan :

$100\% \leq x < 90\%$ baik sekali

$90\% \leq x < 80\%$ baik

$80\% \leq x \leq 70\%$ cukup

$x < 70\%$ kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat mengikuti **Ujian Akhir Semester (UAS)**.**Selamat Ya!** Jika masih di bawah 80% Anda harus mengulangi materi bab 5, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif 5

1. Mengeliminasi variabel y, sehingga:

   $$-2x + 3y = 5$$
   $$\underline{-2x + 2y = -2} \; -$$
   $$y = 7$$

   Substitusi $y = 7$ ke persamaan $-x + y = -1$ diperoleh $x = 8$. Jadi solusinya adalah $x = 8$ dan $y = 7$.

2. $$\begin{bmatrix} 1 & -7 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -8 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3. $$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 3 \\ -5 & -4 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} b_3 \sim b_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ -5 & -4 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} b_2 + 5b_1 \\ b_3 + (-3b_1) \end{matrix}$$
   $$\downarrow$$
   $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 0 \end{bmatrix} \frac{b_3}{21} \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 16 & 0 \\ 0 & -2 & -11 & 0 \end{bmatrix} b_3 + 2b_2$$
   $$\downarrow$$
   $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} b_2 + (-16)b_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} b_1 + (-b_2)$$
   $$\downarrow$$
   $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} b_1 + (-3b_3)$$

   Sehingga diperoleh $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ dan $x_3 = 0$.

4. $4x^2 + 11x + 6 = 0$

$\frac{1}{4} \cdot 4(4x^2 + 11x + 6) = 0$

$\frac{1}{4}(16x^2 + 44x + 24) = 0$

$\frac{1}{4}(4x + 8)(4x + 3) = 0$

$(x + 2)(4x + 3) = 0$

Jadi akar-akarnya adalah $x_1 = -2$ atau $x_2 = -\frac{3}{4}$.

5. $4x^2 + 2x - 11 = 0$

$4x^2 + 2x = 11$

$x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{11}{4}$

$x^2 + \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 11 + \left(\frac{1}{4}\right)^2$

$x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = 11 + \frac{1}{16}$

$x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = \frac{177}{16}$

$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{177}{16}$

$x + \frac{1}{4} = \pm\frac{1}{4}\sqrt{177}$

$x = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{177}$

Jadi akar – akarnya adalah $x_1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{177}$ atau $x_2 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{177}$.

6. $3x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{5}{3} = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$= \frac{16}{9} + 20$

$$= \frac{196}{9}$$

Karena $D > 0$ maka persamaan kuadrat ini memiliki dua akar riil berlainan dan irasional.

7. $3x^2 + 13x + 14 \leq 0$

   Ubah ke bentuk persamaan

   $3x^2 + 13x + 14 = 0$

   $\frac{1}{3} \cdot 3(3x^2 + 13x + 14) = 0$

   $\frac{1}{3}(9x^2 + 39x + 42) = 0$

   $\frac{1}{3}(3x + 6)(3x + 7) = 0$

   $(x + 2)(3x + 7) = 0$

   $x_1 = -2$ atau $x_2 = -\frac{7}{3}$

   Karena pembuat nolnya adalah $x_1 = -2$ atau $x_2 = -\frac{7}{3}$, maka $-\frac{7}{3} \leq x \leq -2$.

8. Garis $3x = y$ memiliki gradien $m_1 = 3$ karena garis ini sejajar dengan garis singgung lingkaran maka gradien garis singgung lingkaran adalah $m_2 = 3$. Perhatikan bahwa:

   $x^2 + y^2 = -2x + 3y + 4$

   $x^2 + y^2 + 2x - 3y - 4 = 0$

   Diperoleh titik pusatnya adalah $\left(-1.\frac{3}{2}\right)$ dan jari – jarinya adalah $= \frac{1}{2}\sqrt{29}$.

   $y - b = m_2(x - a) \pm r\sqrt{1 + m^2}$

   $y - \frac{3}{2} = 3(x + 1) \pm \frac{1}{2}\sqrt{29(10)}$

$$y = 3x + 3 + \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{290}$$

$$y = 3x + \frac{9}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{290}$$

9. $\tan\alpha = \frac{-1}{1} = -1$, jika α terletak di kuadran II maka:

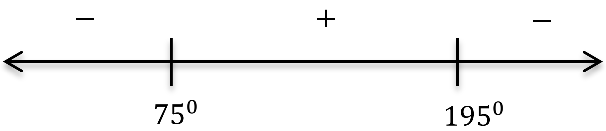
$\alpha = 135^0$

$k.\cos(x - \alpha) = c$

$$\cos(x - 135^0) = \frac{1}{2}$$

$\cos(x - 135^0) = \cos 60^0$ atau $\cos(x - 135^0) = \cos 330^0$

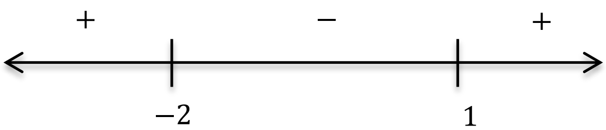
$x = 195^0$atau $x = 75^0$



Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $HP = \{x|x < 75^0$ atau $x > 195^0\}$.

10. $\frac{2x-2}{x+2} < 0$

$(2x - 2)(x + 2) < 0$



Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $HP = \{x|-2 < x < 1, x \in \mathbb{R}\}$.

Daftar Pustaka

Bartle, Robert G. dan Donald R. Sherbert. 2000.*Introduction Real Analysis*. New York: John Wiley&Sons, Incorporated.

Durbin, John R. 2009. *Modern Algebra An Instroduction*. New York: John Wley& Sons, Incorporated

Jeffrey, Alan. 2010.*Matrix Operations for Engineers and Scientists*. New York: Springer

Kolman, Bernard. dan Hill, David R.2005. *Introductory Linear Algebra*. United States Of America: Pearson Prentice Hall

https://id.wikipedia.org/wiki/Abu_Nashr_Mansur

https://id.wikipedia.org/wiki/Aristoteles

https://id.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor

https://id.wikipedia.org/wiki/John_Venn

https://id.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

https://en.wikipedia.org/wiki/Richard_Dedekind

https://id.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes

https://en.wikipedia.org/wiki/Thales_of_Miletus

Gambar

https://lh3.googleusercontent.com/rkm2B9EpgRXQGM5szcMybQas1pJBfEQVS6Zx21upUxqScgtwQadF2X7tDCL_41RhwYcK=s85

Rencana Pembelajaran Semester

UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH JAKARTA
FAKULTAS ILMU PENDIDIKAN
PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

<table>
<tr><th colspan="5">RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER</th></tr>
<tr><th>MATA KULIAH</th><th>KODE</th><th>Bobot (sks)</th><th>SEMESTER</th><th>Tgl Penyusunan</th></tr>
<tr><td>Matematika Dasar</td><td>MAT 837</td><td>3</td><td>1</td><td>03 Oktober 2016</td></tr>
<tr><td rowspan="2">OTORISASI</td><td>Dosen Pengembang RPS</td><td colspan="2">Unit Kendala Mutu</td><td>Ka Prodi</td></tr>
<tr><td>Hastri Rosiyanti, M.PMat</td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td>Capaian Pembelajaran (CP)</td><td colspan="4">PP2
Menguasai konsep matematika yang meliputi logika matematika dan himpunan, aljabar, geometri, teori peluang dan statistika, matematika diskrit, pemodelan matematika, program linear, kalkulus, persamaan diferensial, metode numerik, dan analisis yang mendukung pembelajaran matematika di pendidikan dasar dan menengah serta untuk studi lanjut.</td></tr>
<tr><td>CPMK</td><td colspan="4">1. Memahami konsep dasar Logika Matematika, termasuk diantaranya proposisi, proposisi majemuk, serta menentukan nilai kebenaran suatu proposisi majemuk atau Kalimat Logika Proposisi (KLP)
2. Membuat dan mengidentifikasi suatu tabel kebenaran dari suatu KLP
3. Menentukan validitas suatu proposisi majemuk dengan tabel kebenaran, pohon semantik, dan strategi pembalikan.
4. Melakukan penalaran dari beberapa proposisi menjadi argumen serta membuktikan validitas argumen tersebut dengan aturan penyimpulan, pertukaran, serta metode deduksi.
5. Mengenal simbol logika predikat, kuantifikasi universal dan eksistensi, serta ekspresi logika predikat
6. Menyatakan suatu himpunan ke bentuk deskriptif dan terdaftar, mengidentifikasi bentuk dan jenis-jenis himpunan, menentukan kesamaan dan hubungan antar himpunan, serta menggambarkan himpunan dalam suatu diagram
7. Memahami operasi dan sifat-sifat himpunan
8. Membuktikan kalimat himpunan serta mengimplementasikan permasalahan himpunan pada dunia nyata
9. Mengidentifikasi sifat aljabar bilangan riil
10. Mengidentifikasi sifat urutan bilangan riil
11. Mengidentifikasi nilai mutlak
12. Menyatakan suatu relasi, mengidentifikasi relasi dan relasi invers, sifat-sifat relasi, serta penutup relasi
13. Membedakan antara relasi dan fungsi, mengidentifikasi macam-macam dan sifat fungsi, serta menentukan fungsi komposisi dan komposisi invers
14. Membuat persamaan garis</td></tr>
</table>

	15. Membentuk dan menyelesaikan persmaan kuadrat 16. Menyelesaikan permasalahan mengenai persamaan lingkaran 17. Menyelesaikan permasalahan mengenai persamaan trigonometri 18. Menyelesaikan sistem persamaan linier dua variabel dan tiga variable 19. Menyelesaikan pertidaksamaan linier, kuadrat, polinom, trigonometri dan rasional
Deskripsi Singkat MK	Matakuliah ini dimaksudkan untuk memberikan pengetahuan dan pemahaman konsep dasar matematika yaitu: himpunan; diagram venn; relasi himpunan; operasi pada himpunan; sistem bilangan real; nilai mutlak; persamaan dan pertidaksamaan aljabar maupun trigonometri; determinan dan invers matriks; serta fungsi, fungsi invers dan fungsi komposisi.
Materi Pembelajaran/Pokok Bahasan	1. Logika 2. Himpunan 3. Sistem Bilangan Real 4. Fungsi 5. Persamaan dan Pertidaksamaan
Pustaka	**Utama :** H, Kenneth Rossen. (2005). *Elementary Number Theory and Its Applicaations (Fifth Edition)*. Boston: PEARSON **Pendukung :** Yahya, Y., Suryadi, Agus. (2004). *Matematika Dasar untuk Perguruan Tinggi*. Jakarta:Ghalia Indonesia. Karso,(1997). *Logika Elementer*. Universitas Terbuka Seymor Lipschutz, dan Pantur Silaban. (1995). *Teori Himpunan*. Penerbit Erlangga
Media Pembelajaran	**Perangkat lunak :** Power Point **Perangkat keras :** LCD&Proyektor
Team Teaching	-
Matakuliah Syarat	-

Mg Ke -	**Sub-CP-MK (sbg kemampuan akhir yg diharapkan**	**Kriteria & Bentuk Penilaian**	**Metode Pembelajaran**	**[Estimasi Waktu]**	**Materi Pembelajaran [Pustaka]**	**Bobot Penilaian (%)**
(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**	**(6)**	**(7)**
1,2 ,3	1.1. Membedakan antara proposisi, bukan proposisi, dan kalimat terbuka 1.2. Mengkonversi kalimat ke dalam simbol matematika atau sebaliknya 1.3. Menentukan nilai kebenaran suatu suatu proposisi majemuk/kalimat logika proposisi	**Kriteria:** Sikap, Penguasaan dan ketrampilan **Bentuk non-test:** Penilaian berdasarkan keaktifan di kelas.	• Ceramah dan Diskusi, drill	• Kuliah **[TM: 3x(3x50')]** • Tugas 1: Menentukan nilai kebenaran suatu suatu proposisi majemuk/kalimat logika proposisi, menentukan validitas KLP, serta mengkonversi kalimat yang berkuantor dalam simbol-	Logika	**22**

Mg Ke -	Sub-CP-MK (sbg kemampuan akhir yg diharapkan	Kriteria & Bentuk Penilaian	Metode Pembelajaran	[Estimasi Waktu]	Materi Pembelajaran [Pustaka]	Bobot Penilaian (%)
(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**	**(6)**	**(7)**
	2.1. Membuat tabel kebenaran 2.2. Mengidentifikasi tabel-tabel kebenaran yang ekuivalen, tautologi, kontingensi, maupun kontingen 3.1. Menentukan validitas KLP dengan tabel kebenaran 3.2. Menentukan validitas KLP dengan pohon semantik 3.3. Menentukan validitas KLP dengan strategi pembalikan 4.1. Membuktikan validitas argumen dengan metode deduksi 5.1. Mengkonversi kalimat yang berkuantor dalam simbol-simbol logika predikat dan sebaliknya			simbol logika Predikat dan sebaliknya **[BT+BM:(3+3) x(3x60')]**		
4,5	6.1. Mengidentifikasi bentuk dan jenis himpunan 6.2. Menentukan kesamaan dan hubungan antar himpunan 6.3. Menggambarkan himpunan dalam bentuk diagram. 6.4. Menentukan himpunan kuasa antar himpunan 7.1. Membentuk rumusan dan	**Kriteria:** Sikap, Penguasaan dan ketrampilan **Bentuk non-test:** Penilaian berdasarkan keaktifan di kelas.	• Ceramah dan Diskusi, drill	• Kuliah **[TM: 2x(3x50')]** • Tugas 2: Menggambarkan himpunan dalam bentuk diagram serta membentuk rumusan dan hubungan antar himpunan dari bentuk-bentuk operasi himpunan **[BT+BM:(1+1) x(3x60')]**	Himpunan	**14**

Mg Ke -	Sub-CP-MK (sbg kemampuan akhir yg diharapkan	Kriteria & Bentuk Penilaian	Metode Pembelajaran	[Estimasi Waktu]	Materi Pembelajaran [Pustaka]	Bobot Penilaian (%)
(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**	**(6)**	**(7)**
	hubungan antar himpunan dari bentuk-bentuk operasi himpunan 7.2. Mengidentifikasi sifat himpunan 8.1. Membuktikan sifat dan pernyataan pada himpunan 8.2. Menerapkan ilmu himpunan dalam kasus realitas					
6,7	9.1. Mengidentifikasi sifat bilangan 9.2. Membedakan bilangan rasional dengan irrasional 10.1. Mendefinisikan sifat urutan bilangan riil 10.2. Mengidentifikasi sifat trikotomi 10.3. Membuktikan teorema additive, transitif dan multiplikatif 11.1. Menyebutkan definisi nilai mutlak 11.2. Menyebutkan sifat-sifat nilai mutlak 11.3. Membuktikan ketaksamaan segitiga 11.4. Meyelesaikan solusi pertidaksamaan yang melibatkan	**Kriteria:** Sikap, Penguasaan dan ketrampilan **Bentuk non-test:** Penilaian berdasarkan keaktifan di kelas.	•	• Kuliah **[TM: 2x(3x50')]** • Tugas 3 : Meyelesaikan solusi pertidaksamaan yang melibatkan nilai mutlak **[BT+BM:(2+2) x(3x60')]**	Sistem Bilangan Riil	**14**

Mg Ke -	Sub-CP-MK (sbg kemampuan akhir yg diharapkan	Kriteria & Bentuk Penilaian	Metode Pembelajaran	[Estimasi Waktu]	Materi Pembelajaran [Pustaka]	Bobot Penilaian (%)
(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**	**(6)**	**(7)**
	nilai mutlak					
8	**Evaluasi Tengah Semester: Melakukan validasi hasil penilaian, evaluasi dan perbaikan proses pembelajaran berikutnya**					
9, 10, 11	12.1.Mengidentifikasikan suatu relasi dan relasi invers dari suatu himpunan 12.2. Mengidentifikasi sifat-sifat relasi 12.3. Membentuk relasi tertentu dengan suatu relasi 13.1. Membedakan antara relasi dan fungsi 13.2. Mengidentifikasi macam-macam dan sifat fungsi 13.3 Mengidentifikasi operasi pada fungsi 13.4. Menentukan fungsi komposisi dan fungsi komposisi invers	**Kriteria:** Sikap, Penguasaan dan ketrampilan **Bentuk non-test:** Penilaian berdasarkan keaktifan di kelas.	• Ceramah dan Diskusi, drill	• Kuliah **[TM: 3x(3x50')]** • Tugas 4: Membedakan antara relasi dan fungsi serta mengidentifikasi macam-macam dan sifat fungsi **[BT+BM:(1+1) x(3x60')]** • Tugas 5: menentukan fungsi komposisi dan fungsi komposisi invers **[BT+BM:(2+2) x(3x60')]**	Fungsi	**22**
12, 13, 14, 15	14.1. Mendefinisikan bentuk umum persamaan garis 14.2 Menentukan gradien garis 15.1 Mendefinisikan bentuk umum persamaan kuadrat 15.2. Menyelesaikan persamaan kuadrat 16.1.Mendefinisikan lingkaran 16.2. Mengidentifikasikan bentuk umum	**Kriteria:** Sikap, Penguasaan dan ketrampilan **Bentuk non-test:** Penilaian berdasarkan keaktifan di kelas.	• Ceramah dan Diskusi, drill	• Kuliah **[TM: 4x(3x50')]** • Tugas 6 : Menyelesaikan persamaan kuadrat, lingkaran, dan trigonometri **[BT+BM:(1+1) x(3x60')]** • Tugas 7 : Menyelesaikan sistem persamaan linier dua variabel dan tiga variabel dengan matriks **[BT+BM:(1+1) x(3x60')]**	Persamaan dan Pertidaksamaan	**28**

Mg Ke -	Sub-CP-MK (sbg kemampuan akhir yg diharapkan	Kriteria & Bentuk Penilaian	Metode Pembelajaran	[Estimasi Waktu]	Materi Pembelajaran [Pustaka]	Bobot Penilaian (%)
(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**	**(6)**	**(7)**
	persamaan lingkaran 16.3. Menentukan garis singgug pada lingkaran 17.1. Memahami konsep trigonometri 17.2 Menyelesaikan persamaan trigonometri 18.1. Mendefinisikan persamaan dan pertidaksamaan 18.2. Merubah bentuk persamaan ke bentuk matriks 18.3. Menentukan determinan matriks 18.4. Menentukan invers matriks 18.5. Menyelesaikan sistem persamaan linier dua variabel dan tiga variabel dengan matriks 19.1. Menyelesaikan pertidaksamaan linier, kuadrat, polinom, trigonometri, dan rasional			• Tugas 8 : Menyelesaikan pertidaksamaan linier, kuadrat, polinom, trigonometri, dan rasional **[BT+BM:(2+2) x(3x60')]**		
16	**Evaluasi Akhir Semester: Melakukan validasi penilaian akhir dan menentukan kelulusan mahasiswa**					

Indeks

F

K

L

M

N

O

P

Biografi Penulis

Hastri Rosiyanti, M.PMat. Penulis merupakan anak ketiga dari tiga bersaudara yang lahir di Jakarta, 14 Desember 1987. Pada tahun 2010 penulis lulus S1 di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Islam Negeri (UIN) Syarif Hidayatullah Jakarta dengan predikat Cum laude. Lanjut kuliah S2 dengan Beasiswa Unggulan (BU) Dikti, penulis belajar selama 2 tahun di Program Studi Pengajaran Matematika Institut Teknologi Bandung (ITB) dan lulus pada tahun 2013 dengan predikat cum laude. Sejak lulus penulis mengajar di Prodi Pendidikan Matematika FIP UMJ dan diangkat menjadi dosen tetap pada tahun 2014.

Penulis telah membuat buku olimpiade SMP tahun 2014, dan sejak 2014 pula penulis menjadi Juri olimpiade matematika MA Olimpiade Matematika (OPTIKA) UIN Jakarta hingga sekarang. Dalam pengabdian masyarakat, penulis melakukan pelatihan mengenai software GeoGebra dan Scratch untuk guru - guru sekolah. Sejak menjadi dosen, penulis telah melakukan beberapa penelitian. Sumber dana penelitian yang penulis dapatkan diantaranya dari LPPM UMJ dan dari DIKTI.