REPUBLIK INDONESIA
KEMENTERIAN HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA

SURAT PENCATATAN CIPTAAN

Dalam rangka pelindungan ciptaan di bidang ilmu pengetahuan, seni dan sastra berdasarkan Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta, dengan ini menerangkan:

Nomor dan tanggal permohonan	:	EC00201852218, 1 November 2018
Pencipta		
Nama	:	**Ismah, Arlin Astriyani, , dkk**
Alamat	:	Jl. H. Hasan No. 21A RT. 001 RW. 010 Kelurahan Baru Kecamatan Pasar Rebo , Jakarta Timur, Dki Jakarta, 13780
Kewarganegaraan	:	Indonesia
Pemegang Hak Cipta		
Nama	:	**Ismah , Arlin Astriyani , , dkk**
Alamat	:	Jl. H. Hasan No. 21A RT. 001 RW. 010 Kelurahan Baru Kecamatan Pasar Rebo , Jakarta Timur, Dki Jakarta, 13780
Kewarganegaraan	:	Indonesia
Jenis Ciptaan	:	**Buku**
Judul Ciptaan	:	**Soal-Soal Matematika Dan Penyelesaiannya SMA/SMK Sederajat (KMAP 1)**
Tanggal dan tempat diumumkan untuk pertama kali di wilayah Indonesia atau di luar wilayah Indonesia	:	21 September 2016, di Jakarta
Jangka waktu pelindungan	:	Berlaku selama hidup Pencipta dan terus berlangsung selama 70 (tujuh puluh) tahun setelah Pencipta meninggal dunia, terhitung mulai tanggal 1 Januari tahun berikutnya.
Nomor pencatatan	:	000122897

adalah benar berdasarkan keterangan yang diberikan oleh Pemohon.
Surat Pencatatan Hak Cipta atau produk Hak terkait ini sesuai dengan Pasal 72 Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta.

a.n. MENTERI HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA
DIREKTUR JENDERAL KEKAYAAN INTELEKTUAL

Dr. Freddy Harris, S.H., LL.M., ACCS.
NIP. 196611181994031001

LAMPIRAN PENCIPTA

No	Nama	Alamat
1	Ismah	Jl. H. Hasan No. 21A RT. 001 RW. 010 Kelurahan Baru Kecamatan Pasar Rebo
2	Arlin Astriyani	Dusun Ampel No. 912 RT. 005 RW. 003 Desa Karangtawang Kecamatan Nusawungu
3	Hastri Rosiyanti	Jl. Peta Barat, Gg. Gondang 3. RT. 006 RW. 013. No. 24, Kelurahan Kalideres Kecamatan Kalideres
4	Rahmita Nurul Muthmainah	Griya Kebraon Utama 2 DG-5 RT. 003 RW. 010, Kelurahan Kebraon Kecamatan Karang Pilang
5	Ririn Widiyasari	Perum Green Avenue No.6A Jl. Beringin, RT.002 RW.004 Kelurahan Rawakalong, Kecamatan Gunung Sindur
6	Viarti Eminita	Dusun Adirejo RT. 003 RW. 002 Kelurahan Banarjoyo Kecamatan Batanghari

LAMPIRAN PEMEGANG

No	Nama	Alamat
1	Ismah	Jl. H. Hasan No. 21A RT. 001 RW. 010 Kelurahan Baru Kecamatan Pasar Rebo
2	Arlin Astriyani	Dusun Ampel No. 912 RT. 005 RW. 003 Desa Karangtawang Kecamatan Nusawungu
3	Hastri Rosiyanti	Jl. Peta Barat, Gg. Gondang 3. RT. 006 RW. 013. No. 24, Kelurahan Kalideres Kecamatan Kalideres
4	Rahmita Nurul Muthmainah	Griya Kebraon Utama 2 DG-5 RT. 003 RW. 010, Kelurahan Kebraon Kecamatan Karang Pilang
5	Ririn Widiyasari	Perum Green Avenue No.6A Jl. Beringin, RT.002 RW.004 Kelurahan Rawakalong, Kecamatan Gunung Sindur
6	Viarti Eminita Indonesia	Dusun Adirejo RT. 003 RW. 002 Kelurahan Banarjoyo Kecamatan Batanghari

Buku ini berisi soal-soal matematika, beserta penyelesaiannya, pada kegiatan KMAP (Kompetisi Matematika Antar Pelajar) tingkat SMA/SMK/sederajat yang diselenggarakan oleh Prodi Pendidikan Matematika Fakultas Ilmu Pendidikan Universitas Muhammadiyah Jakarta.

FIP UMJ
Mendidik dengan Profesional & Islami

FAKULTAS ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH JAKARTA

E-mail : fip@umj.ac.id | Website : www.fip.umj.ac.id

ISBN 978-602-74522-5-1

Soal-Soal Matematika SMA/SMK Beserta Penyelesaiannya KMAP-1

Soal-Soal Matematika

Beserta Penyelesaiannya

SMA / SMK Sederajat

KMAP – 1

(Kompetisi Matematika Antar Pelajar)

TIM PENYUSUN :

Ismah
Arlin Astriyani
Hastri Rosiyanti
Rahmita Nurul Muthmainnah
Ririn Widiyasari
Viarti Eminita

Fakultas Ilmu Pendidikan UMJ

Soal-Soal Matematika Beserta Penyelesaiannya Tingkat SMA/MA/SMK sederajat

K M A P - 1

Kompetisi Matematika Antar Pelajar

Ismah

Arlin Astriyani

Hastri Rosiyanti

Rahmita Nurul Muthmainnah

Ririn Widiyasari

Viarti Eminita

Fakultas Ilmu Pendidikan UMJ

Perpustakaan Nasional RI : Katalog Dalam Terbitan (KDT)

Soal-Soal Matematika Beserta Penyelesaiannya
Tingkat SMA/MA/SMK Sederajat
KMAP-1

Penulis :

Ismah
Arlin Astriyani
Hastri Rosiyanti
Rahmita Nurul Muthmainnah
Ririn Widiyasari
Viarti Eminita

Desain Sampul dan Tata Letak :

Rahmita Nurul Muthmainnah

ISBN : 978-602-74522-5-1

Diterbitkan Oleh :

Fakultas Ilmu Pendidikan Universitas Muhammadiyah Jakarta
Jln. K.H. Ahmad Dahlan, Cirendeu, Ciputat
Telp : (021) 7442028 Fax: (021) 7442330
E-mail : fip_umj@yahoo.co.id Website : http://www.fipumj.net

Cetakan Pertama, September 2016

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur kami ucapkan kehadirat Allah SWT, karena atas ijin-Nya jugalah kami dapat menyelesaikan buku KMAP Soal-Soal Matematika Beserta Penyelesaiannya untuk tingkat SMA/MA/SMK sederajat.

KMAP (Kompetisi Matematika Antar Pelajar) merupakan kegiatan rutin tahunan yang diselenggarakan oleh Prodi Pendidikan Matematika, Fakultas Ilmu Pendidikan, Unibersitas Muhammadiyah Jakarta. Dalam pelaksanaan kegiatan KMAP tersebut, terdapat 3 tahapan seleksi (seleksi tahap I, tahap II, dan tahap III) yang mana dalam setiap tahapannya, peserta menyelesaikan soal-soal matematika sebanyak 30 soal.

Buku ini berisi tentang kumpulan soal-soal metematika (dilengkapi dengan pembahasannya) pada kegiatan KMAP tersebut. Materi soal dalam buku ini disusun berdasarkan SK-KD SMA/MA/SMK sederajat. Diharapkan dengan adanya buku ini, siswa dapat berlatih menyelesaikan soal-soal matematika, serta dapat menambah wawasan mereka dalam matematika. Secara khusus bagi siswa/siswi SMA/MA/SMK sederajat yang hendak mengikuti kegiatan KMAP, buku ini dapat digunakan sebagai bahan latihan serta gambaran sebelum mengikuti kompetisi.

Akhir kata dengan segala kerendahan hati kami, bila ada kritik serta saran dari pembaca akan kami terima dengan senang hati. Tak lupa kami ucapkan terimakasih kepada semua pihak yang telah membatu hingga terwujudnya buku ini. Mudah-mudahan buku ini dapat bermanfaat bagi para pembaca.

Jakarta, September 2016

Tim Penulis

DAFTAR ISI

SOAL KOMPETISI

SELEKSI I

1. Barisan $P_1, P_2, P_3, ...$ adalah barisan aritmatika dengan suku-suku positif. Jika $P_1 + P_2 + P_3 = 24$ dan ${P_1}^2 = P_3 - 10$ maka $P_4 = \dots$

   A. 25 D. 20

   B. 15 E. 30

   C. 10

2. Dari barisan empat buah bilangan dengan suku pertamanya adalah bilangan positif. Jika jumlah tiga bilangan pertama sama dengan nol dan kuadrat bilangan pertama sama dengan $-\frac{2}{3}$ kali bilangan ketiga. Jika setiap dua bilangan yang berdekatan sama selisihnya, maka bilangan keempat adalah ...

   A. 1 D. $\frac{4}{3}$

   B. $\frac{1}{2}$ E. $-\frac{4}{3}$

C. $-\frac{1}{3}$

3. Deret $(x-1),(x-1)^2,(x-1)^3,...$ konvergen untuk nilai dalam selang ...
   A. $x < 2$
   B. $x < -2$
   C. $-2 < x < 0$
   D. $0 < x < 2$
   E. $x > 2$

4. Jumlah semua bilangan asli antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3 tetapi tidak habis dibagi 5 adalah ...
   A. 1368
   B. 1542
   C. 1300
   D. 1386
   E. 1524

5. Diketahui $2x^2 + x + q = 0$ dan x_1 dan x_2 merupakan akar-akarnya. Jika x_1, x_2, $\frac{1}{2}(x_1x_2)$ merupakan suku pertama, kedua dan ketiga dari suatu barisan geometri, maka $q = \ldots$

A. -2 D. -1

B. 2 E. 1

C. 0

6. Sebuah bola jatuh dari ketinggian 10 m dan memantul kembali dengan ketinggian ¾ kali tinggi sebelumnya, begitu seterusnya hingga bola berhenti. Jumlah seluruh lintasan bola adalah …

A. 65 m D. 77 m

B. 70 m E. 80 m

C. 75 m

7. Jumlah deret geometri tak hingga adalah 7, sedangkan jumlah suku – suku yang bernomor genap adalah 3. Suku pertama deret tersebut adalah …

A. $^7/_4$ D. $^1/_2$

B. $^3/_4$ E. $^1/_4$

C. $^4/_7$

8. Pada kubus PQRS.TUVW dengan panjang rusuk a satuan, terdapat bola luar dinyatakan B_1 dan bola

dalam dalam dinyatakan B_2. Perbandingan volume bola B_1 dan B_2 adalah …

A. $3\sqrt{3} : 1$

B. $2\sqrt{3} : 1$

C. $\sqrt{3} : 1$

D. $3 : 1$

E. $2 : 1$

9. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk $\sqrt{3}$ cm dan T pada AD dengan panjang AT = 1 cm. Jarak A pada BT adalah … cm.

A. $^1/_2$

B. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

C. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

D. 1

E. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$

10. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 8 cm. M adalah titik tengah rusuk BC. Jarak titik M ke EG adalah … cm.

A. 6

B. $6\sqrt{2}$

C. $6\sqrt{3}$

D. $6\sqrt{6}$

E. 12

11. Prisma segi – 4 beraturan ABCD.EFGH dengan rusuk 6 cm dan tinggi prisma 8 cm. Titik potong diagonal AC dan BD adalah T, jarak titik D ke TH = … cm.

A. $\frac{12}{41}\sqrt{41}$
B. $\frac{24}{41}\sqrt{41}$
C. $\frac{30}{41}\sqrt{41}$
D. $\frac{36}{41}\sqrt{41}$
E. $2\sqrt{41}$

12. Panjang rusuk kubus ABCD.EFGH adalah 6 cm. Jika S adalah titik potong EG dan FH, maka jarak DH ke AS adalah … cm.

A. $2\sqrt{3}$
B. 4
C. $3\sqrt{2}$
D. $2\sqrt{6}$
E. 6

13. Diketahui limas beraturan T.ABCD dengan tinggi $\sqrt{3}$ cm dan panjang AB = 6 cm. Besar sudut antara TAD dan alas adalah …

A. 30^0
B. 45^0
C. 60^0
D. 90^0
E. 120^0

14. Himpunan penyelesaian $2^{2-2x} + 2 > \frac{9}{2^x}$, $x \in \mathbb{R}$ adalah ...

A. $x < 1$ atau $x > 2$

B. $x < -1$ atau $x > 2$

C. $x < -2$ atau $x > 1$

D. $-1 < x < 2$

E. $1 < x < 2$

15. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan $2\log(x-2) \le \log(2x-1)$ adalah ...

A. $2 \le x \le 5$

B. $\frac{1}{2} < x \le 5$

C. $2 < x \le 5$

D. $1 \le x \le 5$

E. $\frac{1}{2} < x \le 2$

16. Jika $\dfrac{^{2}\log a}{^{3}\log b} = m$ dan $\dfrac{^{3}\log a}{^{2}\log b} = n, a > 1$ dan $b > 1$ maka $\dfrac{m}{n} = \ldots$

A. 1

B. $^{3}\log\dfrac{3}{2}$

C. $^{2}\log^{2} 3$

D. $^{2}\log 3$

E. $^{2}\log 3 - 1$

17. Nilai x yang memenuhi persamaan $^{2}\log {}^{2}\log\left(2^{x+1}+3\right) = 1 + {}^{2}\log x$ adalah ...

A. $^{3}\log 2$

B. $^{2}\log 3$

C. 1

D. 0

E. $^{2}\log\dfrac{3}{2}$

18. Jumlah semua akar persamaan $10\left(x^2-x-12\right)^{\log\left(x^2-x-12\right)}=\left(x-4\right)^2\left(x+3\right)^2$ adalah ...

A. –1
D. 3
B. 2
E. 1
C. –2

19. Jika $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ dan $g(x) = x^2 - 5x + 4$ maka $f(x) + 2g(x) = \ldots$

A. $2x^2 - 7x + 3$
B. $2x^2 + 7x + 9$
C. $4^2 - 7x + 9$
D. $4x^2 + 7x + 9$
E. $4x^2 - 13x + 9$

20. Jika $f(x) = x + 1$ maka $[f(x)]^2 + 2f(x) = \ldots$

A. $x^2 + 2x + 1$
B. $x^2 + 3x + 3$
C. $x^2 + 4x + 3$
D. $x^2 + 4x + 4$
E. $x^2 + 5x + 4$

21. Diketahui $f : R \rightarrow R$ dan $g : R \rightarrow R$

$f(x) = 3x^2 - 5x + 1$, $g(x) = 2x + 3$, maka $(f \circ g)(x)$ adalah ...

A. $12x^2 + 10x + 13$

B. $12x^2 + 26x + 4$

C. $12x^2 + 26x + 13$

D. $12x^2 - 10x + 13$

E. $12x^2 - 26x + 4$

22. Jika $f(x) = 4x + 1$, $g(x) = x^2 + 4$ dan $h(x) = \frac{1}{x} + 1$ maka $(f \circ g \circ h)(1) = \ldots$

A. 85

B. 77

C. 65

D. 33

E. 15

23. Diketahui $(f \circ g)(x) = 4^{2x+1}$. Jika $g(x) = 2x - 1$, maka $f(x) = \ldots.$

A. 4^{x+2}

B. 4^{2x+3}.

C. $2^{4x+1} + \frac{1}{2}$

D. $2^{2x+1}+\frac{1}{2}$

E. $2^{2x+1}+1$

24. Diketahui $f(x) = 4x + 1$, $g(x) = 2x - 3$ dan $(g \circ f)(2a + 1) = -9$. Nilai a yang memenuhi adalah ...

A. -2
B. -1
C. 1
D. 2
E. 3

25. Nilai $\int_0^{\pi} \sin 2x.\cos x \text{ dx} = ...$

A. $-\frac{4}{3}$
B. $-\frac{1}{3}$
C. $\frac{1}{3}$
D. $\frac{2}{3}$
E. $\frac{4}{3}$

26. Hasil dari $\int_0^{1} 3x.\sqrt{3x^2+1} \text{ dx} = ...$

A. $\frac{7}{2}$
D. $\frac{4}{3}$

B. $\frac{8}{3}$

E. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{7}{3}$

27. Hasil dari $\int \cos^5 x dx = ...$

A. $-\frac{1}{6}\cos^6 x.\sin x + C$

B. $\frac{1}{6}\cos^6 x.\sin x + C$

C. $-\sin x + \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$

D. $\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$

E. $\sin x + \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$

28. Diketahui $\int_p^3 (3x^2 - 2x + 2)dx = 40$. Nilai $\frac{1}{2}p = ...$

A. 2

D. –2

B. 1

E. –4

C. –1

29. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - \cos^2 x)dx = ...$

A. $-\frac{1}{2}$

B. $-\frac{1}{2}\pi$

C. 0

D. $\frac{1}{2}$

E. $\frac{1}{2}\pi$

30. Hasil $\int x\sqrt{9-x^2}\,dx = ...$

A. $-\frac{1}{3}(9-x^2)\sqrt{9-x^2}+C$

B. $-\frac{2}{3}(9-x^2)\sqrt{9-x^2}+C$

C. $\frac{2}{3}(9-x^2)\sqrt{9-x^2}+C$

D. $\frac{2}{3}(9-x^2)\sqrt{9-x^2}+\frac{2}{9}(9-x^2)\sqrt{9-x^2}+C$

E. $\frac{1}{3}(9-x^2)\sqrt{9-x^2}+\frac{1}{9}\sqrt{9-x^2}+C$

SOAL KOMPETISI

SELEKSI II

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{7x^2 + \sin(3x^3)}{\tan^2 2x} = \ldots$

   A. $\dfrac{5}{2}$ D. $\dfrac{3}{2}$

   B. $\dfrac{1}{2}$ E. $\dfrac{7}{2}$

   C. 1

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2} = \ldots$

   A. $\dfrac{1}{3}$ D. $\dfrac{1}{9}$

   B. 0 E. $\dfrac{1}{6}$

   C. $\dfrac{1}{8}$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x - \cos x \sin^2 x}{x^4} = \ldots$

A. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{3}$

B. 0

E. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{16}$

4. Nilai $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{x-1} = ...$

A. $-\frac{1}{2}$

D. ~

B. $\frac{1}{2}$

E. 1

C. 0

5. Nilai dari $\lim\limits_{x \to \sim} \sqrt{9x^2 - 4x} - 3x - 2$ adalah ...

A. $-\frac{8}{5}$

D. ~

B. $\frac{8}{5}$

E. 0

C. $-\frac{8}{3}$

6. Lingkaran yang sepusat dengan lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 7 = 0$ dan menyinggung garis $3x - 4y + 7 = 0$ adalah ...

A. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$

B. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 9 = 0$

C. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

D. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$

E. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 16 = 0$

7. Persamaan lingkaran dengan pusat $(3,-2)$ dan menyinggung sumbu x adalah ...

A. $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$

B. $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 9 = 0$

C. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 9 = 0$

D. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 5 = 0$

E. $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 5 = 0$

8. Jika $A(1,3)$ dan $B(7,-5)$ maka persamaan lingkaran yang mempunyai diameter AB adalah ...

A. $x^2+y^2-8x+2y-8=0$

B. $x^2+y^2+8x-2y+8=0$

C. $x^2+y^2+8x-2y-8=0$

D. $x^2+y^2-8x-2y-8=0$

E. $x^2+y^2+8x+2y+8=0$

9. Persamaan garis yang menyinggung lingkaran $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ di titik $\mathrm{A}(5,1)$ adalah ...

A. $3x-4y-19=0$

B. $3x+4y+24=0$

C. $3x+4y-24=0$

D. $3x+4y-19=0$

E. $3x+4y+19=0$

10. Persamaan lingkaran yang berpusat di titik $P(2,-3)$ dan menyinggung garis $g: 3x-4y+7=0$ adalah ...

A. $x^2+y^2-4x+6y+12=0$

B. $x^2+y^2-4x+6y-12=0$

C. $x^2+y^2-4x+6y-24=0$

D. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 24 = 0$

E. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 25 = 0$

11. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ yang dapat ditarik dari titik $(7,1)$ adalah ...

A. $4x + 3y = 25$ atau $3x + 4y = 25$

B. $4x - 3y = 25$ atau $3x + 4y = 25$

C. $4x - 3y = 25$ atau $3x - 4y = 25$

D. $4x - 3y = -25$ atau $3x + 4y = 25$

E. $4x - 3y = 25$ atau $3x + 4y = -25$

12. Jarak terdekat antara titik $(-7, 2)$ ke lingkaran $x^2 + y^2 - 10x - 14y - 151 = 0$ adalah ...

A. 4

B. 2

C. 5

D. 6

E. 1

13. Salah satu lingkaran yang melalui titik $(1,5)$ dan titik $(4,1)$ dan menyinggung pula pada sumbu y adalah suatu lingkaran yang berjari-jari ...

A. $\frac{5}{2}$
B. $\frac{7}{2}$
C. 6
D. 9
E. 16

14. Lingkaran $x^2 + y^2 - 2px + q = 0$ yang mempunyai jari-jari 2, akan menyinggung garis $x - y = 0$. Nilai p yang positif adalah ...

A. 3
B. $\sqrt{2}$
C. $3\sqrt{2}$
D. $2\sqrt{2}$
E. 9

15. Kontraposisi dari pernyataan majemuk $p \rightarrow (p \vee \sim q)$ adalah …

A. $(p \vee \sim q) \rightarrow \sim p$
B. $(\sim p \wedge q) \rightarrow \sim p$

C. $(p \vee \sim q) \rightarrow p$

D. $(\sim p \vee q) \rightarrow \sim p$

E. $(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$

16. Penarikan kesimpulan yang sah dari argumentasi berikut :

$\sim p \rightarrow q$

$q \rightarrow r$

$\therefore \ldots$

A. $p \wedge r$

B. $\sim p \vee r$

C. $p \wedge \sim r$

D. $\sim p \wedge r$

E. $p \vee r$

17. Dalam kantong I terdapat 5 kelereng merah dan 3 kelereng putih, dalam kantong II terdapat 4 kelereng merah dan 6 kelereng hitam. Dari setiap kantong diambil satu kelereng secara acak. Peluang terambilnya kelereng putih dari kantong I dan kelereng hitam dari kantong II adalah …

A. ${}^{39}/_{40}$

D. ${}^{9}/_{20}$

B. $^9/_{13}$ E. $^9/_{40}$

C. $^1/_2$

18. A,B,C, dan D akan berfoto secara berdampingan. Peluang A dan B selalu berdampingan adalah …

A. $^1/_{12}$ D. $^1/_2$

B. $^1/_6$ E. $^2/_3$

C. $^1/_3$

19. Dalam suatu populasi keluarga dengan tiga orang anak, peluang keluarga tersebut mempunyai paling sedikit dua anak laki – laki adalah …

A. $^1/_8$ D. $^1/_2$

B. $^1/_3$ E. $^3/_4$

C. $^3/_8$

20. Sebuah dompet berisi uang logam, 5 keping lima ratusan dan 2 keping ratusan rupiah. Dompet yag lain berisi uang logam 1 keping lima ratusan dan 3 keping ratusan rupiah. Jika sebuah uang logam diambil secara

acak dari salah satu dompet, peluang untuk mendapatkan uang logam ratusan rupiah adalah …

A. $^{3}/_{56}$
B. $^{6}/_{28}$
C. $^{8}/_{28}$
D. $^{29}/_{56}$
E. $^{30}/_{56}$

21. Suatu kelas terdiri dari 40 orang. Peluang seorang siswa lulus tes matematika adalah 0,4. Peluang seorang siswa lulus fisika adalah 0,2. Banyaknya siswa yang lulus tes matematika atau fisika adalah … orang.

A. 6
B. 7
C. 14
D. 24
E. 32

22. Banyak garis yang dapat dibuat dari 8 titik yang tersedia, dengan tidak ada 3 titik yang segaris adalah …

A. 336
B. 168
C. 56
D. 28
E. 16

23. Suatu kelas terdiri dari 40 siswa. 25 siswa gemar matematika, 21 siswa gemar IPA, dan 9 siswa gemar matematika dan IPA. Peluang seorang tidak gemar matematika maupun IPA adalah …

A. $^{25}/_{40}$
B. $^{12}/_{40}$
C. $^{9}/_{40}$
D. $^{4}/_{40}$
E. $^{3}/_{40}$

24. Diketahui $5x^2 - 4(m+1)x + 5m = 0$. Supaya kedua akarnya real berbeda dan positif maka nilai m haruslah ...

A. $\frac{1}{4} < m < 4$ atau $m < 0$
B. $\frac{1}{4} < m < 4$
C. $\frac{1}{4} < m < 4$ atau $m < -1$
D. $0 < m < \frac{1}{4}$
E. $0 < m < \frac{1}{4}$ atau $m > 4$

25. Jika jumlah kuadrat akar-akar riil persamaan $x^2 - 2x - p = 0$ sama dengan jumlah kebalikan akar-akar persamaan $x^2 - 8x + (p-1) = 0$ maka nilai $p = ...$

A. 2 D. 5

B. 3 E. 6

C. 4

26. Jika x_1 dan x_2 merupakan akar-akar riil yang berbeda dari persamaan $x^2 + x = \dfrac{4}{x^2 + x + 3}$, maka nilai $x_1 . x_2 = ...$

A. 1 D. -2

B. -1 E. 0

C. 2

27. Akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 6x + p = 0$ adalah x_1 dan x_2. Akar-akar persamaan kuadrat

$x^2 + (x_1 + x_2)^2 x - 4 = 0$ adalah q_1 dan q_2. Jika $q_1 + q_2 = -q_1.q_2$, maka $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 = ...$

A. 64 D. –80

B. –64 E. 40

C. 80

28. Persamaan $p = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{(x-2)^2}$ memiliki akar kembar apabila nilai $p = ...$

A. $\dfrac{4}{3}$ D. $-\dfrac{3}{4}$

B. $-\dfrac{4}{3}$ E. 1

C. $\dfrac{3}{4}$

29. Persamaan $x^2 - px + p - 7 = 0$ memiliki akar-akar yang saling berlawanan maka nilai $p = ...$

A. 1 C. –7 E. 7

B. –1 D. –2

30. Tentukan persamaan kuadrat baru merupakan yang akar-akarnya 3 kali dari akar-akar persamaan $x^2 - 2x + 5 = 0$.

A. $x^2 - 45x + 6 = 0$

B. $x^2 - 6x + 45 = 0$

C. $x^2 - 6x - 45 = 0$

D. $x^2 + 6x + 45 = 0$.

E. $x^2 - 45x - 6 = 0$

SOAL KOMPETISI

SELEKSI III

1. Luas daerah parkir 1.760 m^2. Luas rata – rata untuk mobil kecil 4 m^2 dan mobil besar 20 m^2. Daya tampung maksimum hanya 200 kendaraan, biaya parkir mobil kecil Rp 1.000/jam dan mobil besar Rp 2.000/jam. Jika dalam satu jam terisi penuh dan tidak kendaraan yang pergi dan datang, maka hasil maksimum tempat parkir itu adalah …

   A. Rp 176.000
   B. Rp 200.000
   C. Rp 260.000
   D. Rp 300.000
   E. Rp 340.000

2. Seorang pedagang menjual buah mangga dan pisang dengan menggunakan gerobak. Pedagang tersebut membeli mangga dengan harga Rp 8.000/kg dan pisang Rp 6.000/kg. Modal yang tersedia Rp 1.200.000 dan gerobaknya hanya dapat memuat mangga dan pisang sebanyak 180 kg. Jika harga jual mangga Rp 9.200/kg dan pisang Rp 7.000/kg, maka laba maksimum yang diperoleh adalah …

A. Rp 150.000
B. Rp 180.000
C. Rp 192.000
D. Rp 204.000
E. Rp 216.000

3. Tanah seluas 10.000 m^2 akan dibangun rumah tipe A dan tipe B. Untuk tipe A diperlukan 100 m^2 dan dan tipe B diperlukan 75 m^2. Jumlah rumah yang akan dibangun paling banyak 125 unit. Keuntungan rumah tipe A adalah Rp 6.000.000/unit dan tipe B adalah Rp 4.000.000/unit. Keuntungan maksimum yang dapat diperoleh daru penjualan rumah tersebut adalah …
   A. Rp 550.000.000
   B. Rp 600.000.000
   C. Rp 700.000.000
   D. Rp 800.000.000
   E. Rp 900.000.000

4. Suatu tempat parkir yang luasnya 300 m^2 digunakan untuk memarkir sebuah mobil dengan rata – rata 10 m^2 dan untuk bus rata – rata 20 m^2 dengan daya tampung hanya 24 kendaraan. Biaya parkir untuk mobil Rp 1.000/jam dan untuk bus Rp 3.000/jam. Jika dalam satu jam tempat parkir terisi penuh dan tidak ada

kendaraan yang dating dan pergi, hasil maksimum tempat parkir tersebut adalah …

A. Rp 15.000
B. Rp 30.000
C. Rp 40.000
D. Rp 45.000
E. Rp 60.000

5. Nilai maksimum fungsi obyektif $4x + 2y$ pada himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan : $x + y \geq 4$, $x + y \leq 9$, $-2x + 3y \leq 12$, $3x - 2y \leq 12$ adalah …

A. 16
B. 24
C. 30
D. 36
E. 48

6. Nilai maksimum fungsi sasaran $Z = 6x + 8y$ dari sistem pertidaksamaan $4x + 2y \leq 60, 2x + 4y \leq 48, x \geq 0, y \geq 0$ adalah …

A. 120
B. 118
C. 116
D. 114
E. 112

7. Untuk menambah penghasilan, seorang ibu setiap harinya memproduksi dua jenis kue untuk dijual. Setiap kue jenis I modalnya Rp. 200,00 dengan keuntungan 40%, sedangkan setiap kue jenis II modalnya Rp. 300,00 dengan keuntungan 30%. Jika modal yang tersedia setipa harinya adalah Rp. 100.000,00 dan paling banyak hanya dapat memproduksi 400 kue, maka keuntungan tersbesar yang dapat dicapai ibu tersebut adalah …

A. 30%
B. 35%
C. 34%
D. 36%
E. 40%

8. $x^4 + ax^3 + (b-14)x^2 + 28x - 15 = f(x)(x-1)$

Jika $f(x)$ habis dibagi $x-1$, maka nilai b adalah ...

A. 0
B. 2
C. -2
D. 4
E. -4

9. Jika $f(x)$ dibagi $(x - 2)$ sisanya 24, sedagkan jika $f(x)$ dibagi dengan $(2x - 3)$ sisanya 20. Jika $f(x)$ dibagi dengan $(x - 2)(2x - 3)$ sisanya adalah …

A. $8x + 8$
B. $8x - 8$
C. $-8x + 8$
D. $-8x - 8$
E. $-8x + 6$

10. Sisa pembagian suku banyak $(x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1)$ oleh $(x^2 - x - 2)$ adalah …

A. $-6x + 5$
B. $-6x - 5$
C. $6x + 5$
D. $6x - 5$
E. $6x - 6$

11. Diketahui $(x + 1)$ salah satu faktor dari suku banyak $f(x) = 2x^4 - 2x^3 + px^2 - x - 2$, salah satu faktor yang lain adalah …

A. $x - 2$
B. $x + 2$
C. $x - 1$
D. $x - 3$
E. $x + 3$

12. Diketahui suku banyak $f(x)$ jika dibagi $(x + 1)$ sisanya 8 dan dibagi $(x - 3)$ sisanya 4. Suku banyak $q(x)$ jika dibagi dengan $(x + 1)$ bersisa –9 dan jika dibagi $(x - 3)$ sisanya 15 . Jika $h(x) = f(x).q(x)$, maka sisa pembagian $h(x)$ oleh $x^2 - 2x - 3$ sisanya adalah …

A. $-x + 7$
B. $6x - 3$
C. $-6x - 21$
D. $11x - 13$
E. $33x - 39$

13. Diketahui $\cos(x - y) = 4/5$ dan $\sin x . \sin y = 3/10$. Nilai $\tan x . \tan y =$ ...

A. $-5/3$
B. $-4/3$
C. $-3/5$
D. $3/5$
E. $5/3$

14. Bentuk $\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ ekivalen dengan ...

A. $2 \sin x$
B. $\sin 2x$
C. $2 \cos x$
D. $\cos 2x$
E. $\tan 2x$

15. Nilai minimum dari fungsi $w(\alpha)=\dfrac{1-\tan^2\alpha}{2\sec^2\alpha}$ adalah

A. $-\dfrac{1}{2}$

B. $\dfrac{1}{2}$

C. 0

D. $-\dfrac{1}{4}$

E. $\dfrac{1}{4}$

16. Turunan pertama fungsi $f(x)=\cos^5(4x-2)$ adalah

A. $-5\cos^3(4x-2)\sin(8x-4)$

B. $-10\cos^3(4x-2)\sin(8x-4)$

C. $-10\cos^3(4x-2)\sin(4x-2)$

D. $5\cos^3(4x-2)\sin(8x-4)$

E. $10\cos^3(4x-2)\sin(8x-4)$

17. Jika $\dfrac{1}{2}\log\left(2x^2-x-2\right)=\log(x+2)$ maka nilai maksimum $f(y)=-y^2+4xy+5x^2$ adalah ...

A. 210

B. 444

C. 300

D. 359

E. 324

18. Diketahui segitiga PQR dengan P (0, 1, 4), Q (2, –3, 2), dan R (–1, 0, 2). Besar sudut PRQ = …

A. 120°
B. 90°
C. 60°
D. 45°
E. 30°

19. Diketahui $|\bar{a}| = \sqrt{2}$, $|\bar{b}| = \sqrt{9}$, $|\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{5}$. Besar sudut antara vektor $\bar{a}$ dan vektor $\bar{b}$ adalah …

A. 0°
B. 45°
C. 60°
D. 120°
E. 135°

20. Besar sudut antara $\bar{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ dan $\bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ adalah ….

A. 180°
B. 90°
C. 60°
D. 30°
E. 0°

21. Jika $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$, dan sudut $(\bar{a}, \bar{b})$ = 120°, maka $|3\bar{a} + 2\bar{b}| = ...$

A. 5
B. 6
C. 10
D. 12
E. 13

22. Diketahui $|\bar{a}| = \sqrt{3}$, $|\bar{b}| = 1$, $|\bar{a} - \bar{b}| = 1$. Panjang vektor $\bar{a} + \bar{b} = \ldots$

A. $\sqrt{3}$
B. $\sqrt{5}$
C. $\sqrt{7}$
D. $2\sqrt{2}$
E. 3

23. Diketahui $|\bar{a}| = \sqrt{6}$, $(\bar{a} - \bar{b})(\bar{a} + \bar{b}) = 0$, dan $\bar{a}\ (\bar{a} - \bar{b}) = 3$. Besar sudut antara vektor $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ adalah …

A. $\frac{\pi}{6}$
B. $\frac{\pi}{4}$
C. $\frac{\pi}{3}$
D. $\frac{\pi}{2}$
E. $\frac{2\pi}{3}$

24. Diketahui segitiga ABC, dengan A (0, 0, 0), B (2, 2, 0) dan C (0, 2, 2). Proyeksi orthogonal $\overline{AB}$ pada $\overline{AC}$ adalah …

A. $\bar{j} + \bar{k}$

B. $\bar{i} + \bar{k}$

C. $-\bar{i} + \bar{j}$

D. $\bar{i} + \bar{j} - \frac{1}{2}\bar{k}$

E. $-\frac{1}{2}\bar{i} - \bar{j}$

25. Diketahui vektor $\bar{a} = 3\bar{i} - 4\bar{j} - 4\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$, dan $\bar{c} = 4\bar{i} - 3\bar{j} + 5\bar{k}$. Panjang proyeksi vektor $(\bar{a} + \bar{b})$ pada $\bar{c}$ adalah …

A. $3\sqrt{2}$

B. $4\sqrt{2}$

C. $5\sqrt{2}$

D. $6\sqrt{2}$

E. $7\sqrt{2}$

26. Diketahui dua vektor $\bar{u} = 2\bar{i} - 4\bar{j} - 6\bar{k}$ dan $\bar{v} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + 4\bar{k}$. Proyeksi vektor ortogonal $\bar{u}$ pada $\bar{v}$ adalah …

A. $-4\bar{i} + 8\bar{j} + 12\bar{k}$

B. $-4\bar{i}+4\bar{j}+8\bar{k}$

C. $-2\bar{i}+2\bar{j}-4\bar{k}$

D. $-\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}$

E. $-\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}$

27. Jika $\overline{w}$ adalah vektor proyeksi ortogonal dari vektor $\overline{v}=\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}$ terhadap vektor $\overline{u}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$, maka $\overline{w}=\ldots.$

A. $\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix}-2\\4\\-2\end{pmatrix}$

28. Diketahui vektor $\bar{a} = \underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j} + m\underset{\sim}{k}$ dan $\bar{b} = 2\underset{\sim}{i} - 10\underset{\sim}{j} + 2\underset{\sim}{k}$. Jika nilai $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$, maka nilai m = ...

A. 18
B. 9
C. 6
D. 3
E. –16

29. Jika sudut antara vektor $\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ dan vektor $\bar{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ adalah α, maka besarnya α = ...

A. 180^o
B. 150^o
C. 120^o
D. 90^o
E. 60^o

30. Diketahui A (1, 2, 3), B (3, 3, 1) dan C (7, 5, 3). Jika A, B, dan C segaris (*colinier*) perbandingan AB : BC = ….

A. 1 : 2
B. 2 : 1
C. 2 : 5
D. 5 : 7
E. 7 : 5

KUNCI JAWABAN

Kompetisi Seleksi I

1. D	11. B	21. C
2. E	12. C	22. D
3. D	13. A	23. A
4. A	14. B	24. B
5. D	15. C	25. E
6. B	16. C	26. B
7. A	17. B	27. D
8. A	18. E	28. D
9. C	19. C	29. C
10. B	20. C	30. A

Kompetisi Seleksi II

1. A	11. B	21. D
2. D	12. B	22. D
3. E	13. A	23. E
4. A	14. D	24. E
5. C	15. B	25. A
6. C	16. E	26. B
7. A	17. E	27. D

8. A	18. D	28. C
9. D	19. D	29. B
10. B	20. D	30. B

Kompetisi Seleksi III

1. C	11. A	21. B
2. C	12. E	22. C
3. B	13. D	23. C
4. D	14. B	24. A
5. C	15. A	25. A
6. A	16. B	26. E
7. B	17. E	27. D
8. E	18. B	28. B
9. A	19. A	29. E
10. A	20. B	30. A

PEMBAHASAN SOAL

KOMPETISI SELEKSI I

1. Barisan P_1, P_2, P_3, ...adalah barisan aritmatika dengan suku-suku positif. Jika $P_1 + P_2 + P_3 = 24$ dan ${P_1}^2 = P_3 - 10$ maka $P_4 = \ldots$

Penyelesaian:

$P_1 + P_2 + P_3 = 24$

$P_1 + (P_1 + b) + (P_1 + 2b) = 24$

$3\,P_1 + 3\,b = 24$

$P_1 + b = 24$

$P_1 = 8 - b$

${P_1}^2 = P_3 - 10$

$(8 - b)^2 = (P_1 + 2b) - 10$

$64 - 16b + b^2 = (8 - b + 2b) - 10$

$b^2 - 16b + 64 = b - 2$

$b^2 - 17b + 66 = 0$

$(b - 11)(b - 6) = 0$

$b = 11$ atau $b = 6$

untuk $b = 11$

$P_1 = 8 - b$

$P_1 = 8 - 11$

$P_1 = -3$

untuk $b = 6$

$P_1 = 8 - b$

$P_1 = 8 - 6$

$P_1 = 2$

Dikarenakan barisannya merupakan barisan positif, maka nilai b yang memenuhi adalah $b = 6$

Sehingga,

$P_4 = P_1 + 3b$

$= 2 + 3(6)$

$= 2 + 18 = 20$ **(d)**

2. Dari barisan empat buah bilangan dengan suku pertamanya adalah bilangan positif. Jika jumlah tiga bilangan pertama sama dengan nol dan kuadrat bilangan pertama sama dengan $-\frac{2}{3}$ kali bilangan ketiga. Jika setiap dua bilangan yang berdekatan sama selisihnya, maka bilangan keempat adalah ...

<u>Penyelesaian:</u>

Misalkan bilangan-bilangan tersebut x_1, x_2, x_3, dan x_4. Selisih dua bilangan yang berdekatan sama, artinya membentuk barisan aritmatika.

Jumlah tiga bilangan pertama adalah nol.

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$a + a + b + a + 2b = 0$

$3a + 3b = 0$

$a + b = 0$

$a = -b \ldots (i)$

Kuadrat bilangan yang pertama sama dengan $-\frac{2}{3}$ kali bilangan ketiga.

$$x_1^2 = -\frac{2}{3}x_3$$

$$a^2 = -\frac{2}{3}(a + 2b)$$

$$a^2 + \frac{2}{3}(a - 2b) = 0$$

$$a^2 - \frac{2}{3}a = 0$$

$$a\left(a - \frac{2}{3}\right) = 0$$

$a = 0$ (tidak mungkin, karena bukan bilangan positif) atau $a = \frac{2}{3}$

$$a = \frac{2}{3} \rightarrow b = -\frac{2}{3}$$

$$x_4 = a + 3b = \tfrac{2}{3} + 3\left(-\tfrac{2}{3}\right) = -\tfrac{4}{3}$$ **(e)**

3. Deret $(x-1),(x-1)^2,(x-1)^3,\ldots$ konvergen untuk nilai dalam selang ...

   Penyelesaian:

   $$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)} = (x-1)$$

   konvergen pada selang $-1 < r < 1$

   $-1 < r < 1$

   $-1 < x - 1 < 1$

   $0 < x < 2$ (**d**)

4. Jumlah semua bilangan asli antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3 tetapi tidak habis dibagi 5 adalah ...

   Penyelesaian:

   Semua bilangan asli 1-100 yang habis dibagi 3 adalah antara 3 dan 99.

   $U_n = a + (n-1)$

   $99 = 3 + 3(n-1)$

$99 = 3n$

$n = 33$

Sehingga S_{33} adalah

$S_{33} = \frac{n}{2}(a + U_n)$

$S_{33} = \frac{33}{2}(3 + 99)$

$S_{33} = 1683$

Semua bilangan asli antara 1-100 yang habis dibagi 3 dan 5 adalah antara 15 dan 90

$U_n = a + (n - 1)$

$90 = 15 + 15(n - 1)$

$90 = 15n$

$n = 6$

Sehingga S_6 adalah

$S_6 = \frac{n}{2}(a + U_n)$

$S_6 = \frac{6}{2}(15 + 90)$

$S_6 = 315$

Sehingga jumlah semua bilangan asli antara 1-100 yang habis dibagi 3 tetapi tidak habis dibagi 5 adalah

1683 – 315 = 1368 **(a)**

5. Diketahui $2x^2 + x + q = 0$ dan x_1 dan x_2 merupakan akar-akarnya. Jika $x_1, x_2, \frac{1}{2}(x_1 x_2)$ merupakan suku pertama, kedua dan ketiga dari suatu barisan geometri, maka $q = ...$

Penyelesaian:

$2x^2 + x + q = 0$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}$ $\qquad\qquad$ $x_1 . x_2 = \frac{c}{a} = \frac{q}{2}$

$x_2 = -\frac{1}{2} - x_1$

Karena x_1, x_2 dan x_3 membentuk barisan geometri maka

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\frac{1}{2}(x_1 x_2)}{x_2}$$

$$x_2^2 = \frac{1}{2}(x_1 x_2) . x_1$$

$$2x_2 = x_1^2$$

$$2\left(-x_1 - \frac{1}{2}\right) = x_1^2$$

$$-2x_1 - 1 = x_1^2$$

$$x_1^2 + 2x_1 + 1 = 0$$

$$(x + 1)^2 = 0$$

$$x_1 = -1 \rightarrow x_2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

Perhatikan bahwa:

$$x_1 . x_2 = \frac{q}{2} \rightarrow (-1)\left(\frac{q}{2}\right) = \frac{q}{2} \rightarrow q = -1 \qquad \textbf{(d)}$$

6. Sebuah bola jatuh dari ketinggian 10 m dan memantul kembali dengan ketinggian ¾ kali tinggi sebelumnya, begitu seterusnya hingga bola berhenti. Jumlah seluruh lintasan bola adalah ….

Penyelesaian:

$$S_n = 10 + 2S_\infty = 10 + 2\left(\frac{U_1}{1-r}\right)$$

$$= 10 + 2\left(\frac{\frac{30}{4}}{1-\frac{3}{4}}\right)$$

$$= 10 + 2\left(\frac{30}{4} \times \frac{4}{1}\right) = 10 + 60 = 70$$

atau

$$H = \left(\frac{b+a}{b-a}\right) H_0 = \left(\frac{4+3}{4-3}\right) 10 = \frac{7}{1} \times 10 = 70 \qquad \textbf{(b)}$$

7. Jumlah deret geometri tak hingga adalah 7, sedangkan jumlah suku – suku yang bernomor genap adalah 3. Suku pertama deret tersebut adalah ….

Penyelesaian:

$$\boldsymbol{S_\infty = \frac{a}{1-r}}$$

$$7 = \frac{a}{1-r}$$

$$7 - 7r = a$$

$$r = \frac{7-a}{7}$$

$$\boldsymbol{S_\infty = \frac{a}{1-r}}$$

$$3 = \frac{U_2}{1-r}$$

$$3 = \frac{ar}{1-r^2}$$

$$3 - 3r^2 = ar$$

$$ar + 3r^2 = 3$$

Subsitusi (i) dan (ii)

$$3r^2 + ar = 3$$

$$3\left(\frac{7-a}{7}\right)^2 + a\left(\frac{7-a}{7}\right) = 3$$

$$3\frac{(7-a)^2}{49}+a\frac{7-a}{7}=3$$

$$\frac{3(7-a)^2}{49}+\frac{7a(7-a)}{49}=3$$

$$3(49-14a+a^2)+(49a-7a^2)=3\times 49$$

$$147-42a+3a^2+49a-7a^2=147$$

$$4a^2=7a$$

$$4a=7$$

$a=\frac{7}{4}$ **(a)**

8. Pada kubus PQRS.TUVW dengan panjang rusuk a satuan, terdapat bola luar dinyatakan B1 dan bola dalam dinyatakan B_2. Perbandingan volume bola B_1 dan B_2 adalah ….

Penyelesaian:

Panjang diameter B1 = $a\sqrt{3}$

Panjang diameter B2 = a

Perbandingan volume keduanya:

$$VB1 : VB2$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{4}{3}\pi.(\frac{1}{2}a\sqrt{3})^3: \quad \frac{4}{3}\pi.(\frac{1}{2}a)^3$$

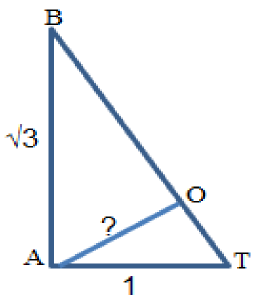
$$(\frac{1}{2}a\sqrt{3})^3: \quad (\frac{1}{2}a)^3$$

$$\frac{1}{8}\ 3\sqrt{3}a^3 : \quad \frac{1}{8}a^3$$

$$3\sqrt{3}: \quad 1$$ **(a)**

9. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk √3 cm dan T pada AD dengan panjang AT = 1 cm. Jarak A pada BT adalah …cm.

Penyelesaian:



$BT^2 = (\sqrt{3})^2 + (1)^1$

$BT^2 = 3 + 1$

$BT^2 = 4$

BT = 2 cm

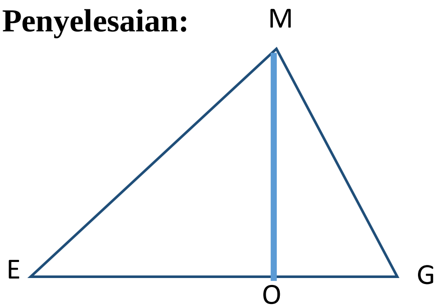
$$\frac{AT}{AO} = \frac{BT}{BA}$$

$$\frac{1}{AO} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$AO = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ **(c)**

10. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 8 cm. M adalah titik tengah rusuk BC. Jarak titik M ke EG adalah … cm.

Penyelesaian:



MG = $\sqrt{CG^2 + CM^2}$

= $\sqrt{8^2 + 4^2}$

MG = $\sqrt{80}$

= $4\sqrt{5}$

EG = $8\sqrt{2}$

EM = $\sqrt{AE^2 + AM^2}$

$= \sqrt{8^2 + 4\sqrt{5}^2} = \sqrt{144} = 12$

Jarak M ke EG adalah MO

MO $= \sqrt{ME^2 - (\frac{ME^2+EG^2-MG^2}{2.EG})^2}$

$= \sqrt{12^2 - (\frac{12^2+8\sqrt{2}^2-4\sqrt{5}^2}{2(8\sqrt{2})})^2}$

$= \sqrt{144 - (\frac{144+128-80}{16\sqrt{2}})^2}$

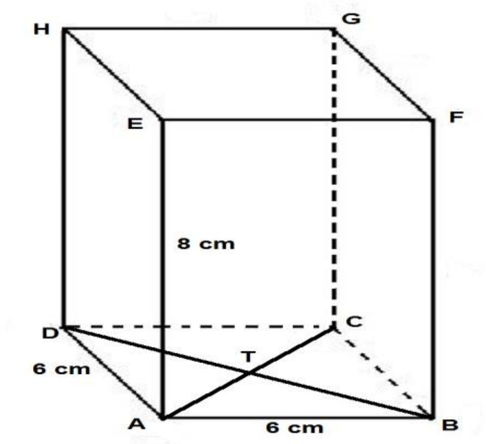
$= \sqrt{144 - \left(\frac{12}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$= \sqrt{144 - 72} = \sqrt{72}$

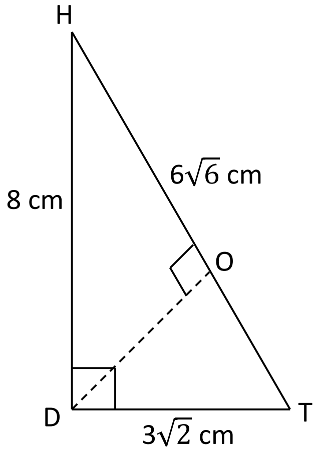
$= 6\sqrt{2}$ **(b)**

11. Prisma segi – 4 beraturan ABCD.EFGH dengan rusuk 6 cm dan tinggi prisma 8 cm. Titik potong diagonal AC dan BD adalah T, jarak titik D ke TH = … cm.

Penyelesaian:



Pertama, buat segitiga DHT terlebih dahulu



$$HT^2 = HD^2 + DT^2$$

$$HT^2 = 3^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2$$

$$= 64 + 18$$

$$= 82$$

$$HT = \sqrt{82} \text{ cm}$$

DO x HT = DT x HD

DO = $\frac{DT \times HD}{HT}$

DO = $\frac{3\sqrt{2} \times 8}{\sqrt{82}}$

$= \frac{24\sqrt{2}}{\sqrt{82}}$

$= \frac{24\sqrt{2}}{\sqrt{82}} \times \frac{\sqrt{82}}{\sqrt{82}} = \frac{24\sqrt{164}}{82} = \frac{12\sqrt{164}}{41}$

$= \frac{24\sqrt{41}}{41} = \frac{24}{41}\sqrt{41}$ cm **(b)**

12. Panjang rusuk kubus ABCD.EFGH adalah 6 cm. Jika S adalah titik potong EG dan FH, maka jarak DH ke AS adalah … cm.

Penyelesaian:

Jarak antara garis DH ke AS adalah garis HS = $\frac{1}{2}a\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$. Sebab, garis HS tegak lurus dengan HD di H, dan garis HS juga tegak lurus dengan AS di S. **(c)**

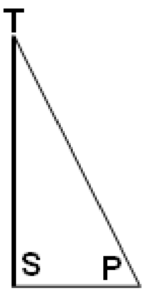
13. Diketahui limas beraturan T.ABCD dengan tinggi √3 cm dan panjang AB = 6 cm. Besar sudut antara TAD dan alas adalah ….

Penyelesaian:

Titik P pertengahan AD

Titik Q pertengahan BC

Titik S pertengahan PQ

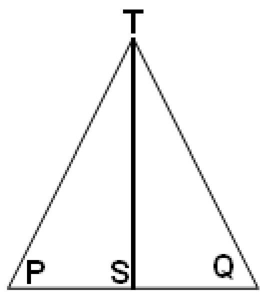


$$TP = \sqrt{TS^2 + PS^2}$$

$$TP = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 3^2}$$

$$TP = \sqrt{3+9}$$

$$TP = \sqrt{12}$$



$$\sin P = \frac{TS}{TP}$$

$$\sin P = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$$

$$\sin P = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$\sin P = \frac{\sqrt{1}}{2}$$

$$P = 30°$$

Jadi, sudut antara TAD dengan bidang alas adalah 30^0 **(a)**

14. Himpunan penyelesaian $2^{2-2x} + 2 > \frac{9}{2^x}$, $x \in$ R adalah ...

Penyelesaian:

$$2^{2-2x} + 2 > \frac{9}{2^x}, x \in \square$$

$$2^{2-2x}+2-\frac{9}{2^x}>0$$

$$4\left(2^{-x}\right)^2+2-9\left(2^{-x}\right)>0$$

Misalkan $2^{-x}=a$ sehingga dapat ditulis

$$4a^2-9a+2>0$$

$$(4a-1)(a-2)>0$$

$$a<\frac{1}{4} \text{ atau } a>2$$

Oleh karena itu,

$a<\frac{1}{4}$	$a>2$
$2^{-x}<2^{-2}$	$2^{-x}>2^{1}$
$-x<-2$	$-x>1$
$x>2$	$x<-1$

Maka himpunan penyelesaiannya adalah $x>2$ atau $x<-1$ **(b)**

15. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan $2\log(x-2)\le\log(2x-1)$ adalah ...

Penyelesaian:

$$2\log(x-2)\le\log(2x-1)$$

$$\log(x-2)^2\le\log(2x-1)$$

$(x-2)^2 \le (2x-1)$

$x^2 - 4x + 4 \le 2x - 1$

$x^2 - 4x - 2x + 4 + 1 \le 0$

$x^2 - 6x + 5 \le 0$

$(x-5)(x-1) \le 0$

$1 \le x \le 5 \ldots (i)$

Syarat:

$x - 2 > 0$ $\qquad$ $2x - 1 > 0$

$x > 2 \ldots (ii)$ $\qquad$ $x > \dfrac{1}{2} \ldots (iii)$

Dari (i), (ii), dan (iii) diperoleh $2 < x \le 5$ **(c)**

16. Jika $\dfrac{{}^2\log a}{{}^3\log b} = m$ dan $\dfrac{{}^3\log a}{{}^2\log b} = n, a > 1$ dan $b > 1$

maka $\dfrac{m}{n} = \ldots$

Penyelesaian:

$\dfrac{{}^2\log a}{{}^3\log b} = m$ dan $\dfrac{{}^3\log a}{{}^2\log b} = n$

$$\frac{m}{n} = \frac{\dfrac{{}^2\log a}{{}^3\log b}}{\dfrac{{}^3\log a}{{}^2\log b}}$$

$$= \frac{{}^{2}\log a}{{}^{3}\log b} \times \frac{{}^{2}\log b}{{}^{3}\log a}$$

$$= \frac{{}^{2}\log a}{{}^{3}\log a} \times \frac{{}^{2}\log b}{{}^{3}\log b}$$

$$= \left({}^{2}\log a \times {}^{a}\log 3\right) \times \left({}^{2}\log b \times {}^{b}\log 3\right)$$

$$= {}^{2}\log 3 \times {}^{2}\log 3 = {}^{2}\log^{2} 3 \quad (\mathbf{c})$$

17. Nilai x yang memenuhi persamaan : ${}^{2}\log {}^{2}\log\left(2^{x+1}+3\right) = 1 + {}^{2}\log x$ adalah ...

Penyelesaian:

$${}^{2}\log {}^{2}\log\left(2^{x+1}+3\right) = 1 + {}^{2}\log x$$

$${}^{2}\log {}^{2}\log\left(2^{x+1}+3\right) = {}^{2}\log 2 + {}^{2}\log x$$

$${}^{2}\log {}^{2}\log\left(2^{x+1}+3\right) = {}^{2}\log 2x$$

$${}^{2}\log\left(2^{x+1}+3\right) = 2x$$

$$2^{2x} = 2^{x+1} + 3$$

$$2^{2x} - 2.2^{x} - 3 = 0$$

Misalkan $2^{x} = a$

$$a^{2} - 2a - 3 = 0$$

$$(a-3)(a+1) = 0$$

$a = 3$ atau $a = -1$ (Tidak memenuhi)

Perhatikan bahwa: $a = 3$

$2^x = 3$

$x = {}^2\log 3 \quad (\mathbf{b})$

18. Jumlah semua akar persamaan $10\left(x^2 - x - 12\right)^{\log\left(x^2 - x - 12\right)} = (x-4)^2 (x+3)^2$ adalah ...

Penyelesaian:

$$10\left(x^2 - x - 12\right)^{\log\left(x^2 - x - 12\right)} = (x-4)^2 (x+3)^2$$

$$\log\left[10\left(x^2 - x - 12\right)^{\log\left(x^2 - x - 12\right)}\right] = \log\left[(x-4)^2 (x+3)^2\right]$$

$$\log 10 + \log\left(x^2 - x - 12\right)^{\log\left(x^2 - x - 12\right)} = \log\left[(x-4)(x+3)\right]^2$$

$$1 + \log\left(x^2 - x - 12\right)\log\left(x^2 - x - 12\right) = 2\log\left[(x-4)(x+3)\right]$$

$$1 + \log^2\left(x^2 - x - 12\right) = 2\log\left(x^2 - x - 12\right)$$

Misalkan $\log\left(x^2 - x - 12\right) = p$

$$p^2 - 2p + 1 = 0$$

$$(p-1)^2 = 0$$

$$p = 1$$

$$\log\left(x^2 - x - 12\right) = 1$$

$$\log\left(x^2 - x - 12\right) = \log 10$$

$$x^2 - x - 22 = 0$$

jumlah akar-akarnya adalah $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 1$ $(\mathbf{e})$

19. Jika $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ dan $g(x) = x^2 - 5x + 4$ maka $f(x) + 2g(x) = \ldots$

Penyelesaian:

$$f(x) + 2g(x) = 2x^2 + 3x + 1 + 2[x^2 - 5x + 4]$$
$$= 2x^2 + 3x + 1 + 2x^2 - 10x + 8$$
$$= 4x^2 - 7x + 9 \quad \textbf{(c)}$$

20. Jika $f(x) = x + 1$ maka $[f(x)]^2 + 2f(x) = \ldots$

Penyelesaian:

$$[f(x)]^2 + 2f(x) = [x + 1]^2 + 2[x + 1]$$
$$= x^2 + 2x + 1 + 2x + 2$$
$$= x^2 + 4x + 3 \quad \textbf{(c)}$$

21. Diketahui $f : R \to R$ dan $g : R \to R, f(x) = 3x^2 - 5x + 1, g(x) = 2x + 3,$ maka $(fog)(x)$ adalah ...

Penyelesaian:

$(f\ o\ g)(x) = f\big(g(x)\big)$

$= f(2x\ +\ 3)$

$= 3(2x+3)^2 - 5(2x+3) +\ 1$

$= 3(4x^2 + 12x + 9) - 10x - 15 + 1$

$= 12x^2 + 36x + 27 - 10x - 15 + 1$

$= 12x^2 + 26x + 13$ **(c)**

22. Jika $f(x)\ =\ 4x\ +\ 1;\ g(x)\ =\ x^2\ +\ 4$ dan $h(x)\ =\ \frac{1}{x}\ +\ 1$ maka $(fogoh)(1)\ = \ldots$

Penyelesaian:

$(f\ o\ g\ o\ h)(1) =\ f\left(g\big(h(1)\big)\right)$

$= f\left(g\left(\frac{1}{x}\ +\ 1\right)\right)$

$= f\big(g(1+\ 1)\big)$

$= f\big(g(2)\big)$

$= f(x^2\ +\ 4)$

$= f(2^2\ +\ 4)$

$= f(8) = 4.8\ +\ 1 = 33$ **(d)**

23. Diketahui $(fog)(x) = 4^{2x+1}$. Jika $g(x) = 2x - 1$, maka $f(x) = \ldots.$

Penyelesaian:

$(f\ o\ g)(x) = f\big(g(x)\big) = 4^{2x+1}$

$f(2x-1) = 4^{2x+1}$

$f(2x-1) = 4^{2x-1+2}$

$f(2x-1) = 4^{(2x-1)+2} \rightarrow f(x) = 4^{x+2}$ **(a)**

24. Diketahui $f(x) = 4x + 1, g(x) = 2x - 3$ dan $(gof)(2a+1) = -9$. Nilai a yang memenuhi adalah ...

Penyelesaian:

$(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = g(4x + 1)$

$= 2(4x + 1) - 3 = 8x + 2 - 3$

$= 8x - 1$

$(gof)(2a+1) = 8(2a+1) - 1 = -9$

$16a + 8 - 1 = -9$

$16a = -9 - 7$

$a = -1$ **(b)**

25. Nilai $\int_0^{\pi} \sin 2x . \cos x \ \mathrm{dx} = \ldots.$

Penyelesaian:

$$\int_0^{\pi} \sin 2x \cos x \, dx = -\frac{2}{3} cos^3(x) + c$$

$$= \left[-\frac{2}{3} cos^3 x\right]_0^{\pi} = \frac{4}{3}$$ **(e)**

26. Hasil dari $\int_0^{1} 3x . \sqrt{3x^2 + 1} \ \mathrm{dx} = \ldots.$

Penyelesaian:

Misalkan:

$u = 3x^2 + 1$

Maka $du = 6x \, dx \Leftrightarrow dx = \frac{du}{6x}$

$$\int_0^1 3x \sqrt{3x^2 + 1} \ dx = \int_0^1 3x \, u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{6x}$$

$$= \int_0^1 \frac{3}{6} u^{\frac{1}{2}} \, du$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} \, du$$

$$= \left[\frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{1}{2} \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{1}{3}(3x^2+1)\sqrt{3x^2+1}\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{3}(3+1)\sqrt{3+1}\right)$$

$$= \frac{1}{3}.4\sqrt{4}$$

$$= \frac{8}{3} \qquad \textbf{(b)}$$

27. Hasil dari $\int \cos^5 x dx = ...$

Penyelesaian:

Ubah ke bentuk yang memungkinkan untuk permisalan dan substitusi

$$\int cos^5 x\ dx \quad = \int \cos x\ (cos^4 x) dx$$

$$= \int \cos x\ (cos^2 x)^2 dx$$

$$= \int \cos x\ (1 - sin^2 x)^2\ dx$$

Misalkan:

$u = \sin x$

$du = \cos x\ dx$

Substitusi

$$\int \cos x\ (1 - sin^2 x)^2\ dx = \int (1 - sin^2 x)^2 \cos x\ dx$$

$$= \int (1 - u^2)^2\ du$$

$$= \int 1 - 2\ u^2 + u^4\ du$$

$$= u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + c$$

$$= \sin x - \frac{2}{3}\ sin^3 x + \frac{1}{5}\ sin^5 x + c$$

$$= \frac{1}{5} sin^5 x - \frac{2}{3} sin^3 x + \sin x + c$$

$$= \sin x - \frac{2}{3} sin^3 x + \frac{1}{5} sin^5 x + c \qquad \textbf{(d)}$$

28. Diketahui $\int_p^3 (3x^2 - 2x + 2)\ dx = 40.$ Nilai $\frac{1}{2}p$ =....

Penyelesaian:

$$\int_p^3 (3x^2 - 2x + 2)dx = 3\int_p^3 (x^2 dx - 2\int x\ dx + \int 2\ dx)$$

$$= \left[\left(\frac{3}{2+1}x^{2+1}\right) - \left(\frac{2}{1+1}x^{1+1}\right) + 2x\right]_p^3$$

$$= [x^3 - x^2 + 2x]_p^3$$

$$40 = (3^3 - 3^2 + 2(3)) - (p^3 - p^2 + 2p)$$

$$40 = (27 - 9 + 6) - (p^3 - p^2 + 2p)$$

$$40 = 24 - (p^3 - p^2 + 2p)$$

$$p^3 - p^2 + 2p = -16$$

$$p^3 - p^2 + 2p + 16 = 0$$

$$(p + 2)(p^2 - 3p + 8) = 0$$

$$p = -2 \qquad \textbf{(d)}$$

29. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - \cos^2 x)dx = ...$

Penyelesaian:

Ingat dua rumus trigonometri berikut:

$$sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

Rumus integral trigonometrinya adalah:

$$\int \cos ax\ dx = \frac{1}{a}\ \sin ax + C$$

$$\int \sin ax\ dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$$

Dengan demikian

$$\int (sin^2 x - cos^2 x)dx = \int \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\right] dx$$

$$= \int -\cos 2x\ dx$$

$$= -\frac{1}{2}\sin 2x + c$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\sin 2\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\sin 2.0\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\sin \pi + \frac{1}{2}\sin 0$$

$$= -\frac{1}{2}.0 + \frac{1}{2}.0$$

$= 0$ **(c)**

30. Hasil $\int x\sqrt{9 - x^2}\,dx = ...$

Penyelesaian:

Misalkan $u = 9 - x^2$, maka $du = -2x\ dx$

$$x\ dx = \frac{du}{-2}$$

$$\int x\sqrt{9 - x^2}\ dx = \int (9 - x^2)^{\frac{1}{2}}\ x\ dx$$

$$= \int u^{\frac{1}{2}} \left[\frac{du}{-2}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\ du$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$

$$= -\frac{1}{2} \times \sqrt[2]{u^3} \times \frac{2}{3} + c$$

$$= -\frac{1}{3}u\sqrt{u} + c$$

$$= \frac{1}{3}(9 - x^2)\sqrt{9 - x^2} + c$$

Jadi $\int x\sqrt{9 - x^2}\ dx = -\frac{1}{3}(9 - x^2)\sqrt{9 - x^2} + c$ **(a)**

PEMBAHASAN SOAL

KOMPETISI SELEKSI II

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{7x^2+\sin\left(3x^3\right)}{\tan^2 2x}=\dots$$

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x^2+\sin\left(3x^3\right)}{\tan^2 2x}=\frac{0}{0}$$

Sehingga

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x^2+\sin\left(3x^3\right)}{\tan^2 2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{7x^2}{\tan^2 2x}+\frac{\sin\left(3x^2\right)}{\tan^2 2x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{7}{2^2}.\frac{x^2}{\tan^2 x}+\lim_{x\to 0}\frac{3}{2^2}.\frac{\sin x^2}{\tan^2 x}$$

$$=\frac{7}{4}.1+\frac{3}{4}.1=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}\qquad \textbf{(a)}$$

2. $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{\left(x-1\right)^2}=\dots$$

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{\left(x-1\right)^2}=\frac{0}{0}$$

Sehingga, misalkan $x^{1/3} = a$, jika $x \to 1$ maka $p \to 1$

$$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2} \qquad = \lim_{p\to1} \frac{p^2 - 2p + 1}{(p^3 - 1)^2}$$

$$= \lim_{p\to1} \frac{(p-1)^2}{\left((p-1)(p^2+p+1)\right)^2}$$

$$= \lim_{p\to1} \frac{1}{(p^2+p+1)^2}$$

$$= \frac{1}{9} \qquad \textbf{(d)}$$

3. $$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos^2 x - \cos x \sin^2 x}{x^4} = \ldots$$

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos^2 x - \cos x \sin^2 x}{x^4} \qquad = \lim_{x\to0} \frac{\sin^2 x - \cos x \sin^2 x}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\sin^2 x (1-\cos x)}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\sin^2 x}{x^2} . \lim_{x\to0} \frac{(1-\cos x)}{x^2}$$

$$= 1. \lim_{x\to0} \frac{2\sin^2 \frac{1}{2} x}{x^2}$$

$$= 2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad \textbf{(e)}$$

4. Nilai $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{x-1} = \ldots$

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x+3)-(3x+1)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-2(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}}$$

$$= \frac{-2}{2+2} = -\frac{1}{2} \quad \textbf{(a)}$$

5. Nilai dari $\lim\limits_{x\to \sim} \sqrt{9x^2 - 4x} - 3x - 2$ adalah ...

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to \sim} \sqrt{9x^2 - 4x} - 3x - 2 = \lim_{x\to \sim} \sqrt{9x^2 - 4x} - \sqrt{(3x+2)^2}$$

$$= \lim_{x \to \sim} \sqrt{9x^2 - 4x} - \sqrt{9x^2 + 12x + 4}$$

$$= \frac{-4-12}{2.3} = -\frac{16}{6} = -\frac{8}{3} \quad \textbf{(c)}$$

6. Lingkaran yang sepusat dengan lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 7 = 0$ dan menyinggung garis $3x - 4y + 7 = 0$ adalah ...

Penyelesaian:

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 7 = 0$

$(a,b) = (2,-3) \rightarrow$ titik pusat

Jari-jari lingkaran yang pusatnya di titik (2,3) dan menyinggung garis $3x - 4y + 7 = 0$

$$r = \left| \frac{(3)(2)+(-4)(-3)-(-7)}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = \left| \frac{6+12+7}{5} \right| = 5$$

Sehingga:

$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 5^2$

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0 \qquad (\mathbf{c})$

7. Persamaan lingkaran dengan pusat $(3,-2)$ dan menyinggung sumbu x adalah ...

Penyelesaian:

pusat lingkaran $= (a, b) = (3, -2)$

Menyinggung sumbu x artinya $r = b = -2$

Oleh karena itu,

$r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

$(-2)^2 = 3^2 + (-2)^2 - c$

$4 = 9 + 4 - c$

$c = 9$

Jika $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

Maka $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$ (**a**)

8. Jika $A(1,3), B(7,-5)$ maka persamaan lingkaran yang mempunyai diameter AB adalah ...

Penyelesaian:

Misalkan persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ dengan (a, b) titik pusat.

Jika $A(1,3), B(7,-5)$ maka titik pusatnya

$$\left(1 + \left(\left|\frac{1-7}{2}\right|\right), -5 + \left(\left|\frac{3-(-5)}{2}\right|\right)\right) = (4, -1)$$

$r = \sqrt{(4-1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+16} = 5$

karena $r = 5$ maka nilai c adalah

$r=\sqrt{a^2+b^2-c}$

$5^2=16+1-c$

$c=-25+17=-8$

Sehingga

$x^2+y^2-8x+2y-8=0$ $\qquad$ $(\mathbf{a})$

9. Persamaan garis yang menyinggung lingkaran $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ di titik $\mathrm{A}(5,1)$ adalah ...

Penyelesaian:

$x^2+y^2-4x+6y-12=0$

Titik pusatnya $(a,b)=(2,-3)$

Jari-jarinya $r=\sqrt{a^2+b^2-c}=\sqrt{4+9-(-12)}=5$

Persamaan garis yang menyinggung di titik $(x_1,y_1)=(5,1)$

$(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=r^2$

$(x-2)(5-2)+(y+3)(1+3)=25$

$3(x-2)+4(y+3)=25$

$3x-6+4y+12-25=0$

$$3x+4y-19=0 \qquad (\mathbf{d})$$

10. Persamaan lingkaran yang berpusat di titik $P(2,-3)$ dan menyinggung garis $g: 3x-4y+7=0$ adalah ...

Penyelesaian:

Persamaan lingkaran:

$$(x-2)^2+(y+3)^2=r^2$$

$$x^2+y^2-4x+6y+13=r^2$$

Persamaan garis g

$$3x-4y+7=0$$

$$x=\frac{4y-7}{3}$$

Sehingga

$$x^2+y^2-4x+6y+13=r^2$$

$$\left(\frac{4y-7}{3}\right)^2+y^2-4\left(\frac{4y-7}{3}\right)+6y+13=r^2$$

$$25y^2-50y+250-9r^2=0$$

Syarat menyinggung $D = 0$

$b^2 - 4ac = 0$

$(-50)^2 - 4(25)(250 - 9r^2) = 0$

$2500 - 100(250 - 9r^2) = 0$

$2500 - 25000 + 9r^2 = 0$

$r = 5$

Oleh karena itu, persamaan garis singgung lingkarannya adalah

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ $(\mathbf{b})$

11. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ yang dapat ditarik dari titik $(7,1)$ adalah ...

Penyelesaian:

Misalkan persamaan garis $y = mx + c$

melalui titik $(7,1) \rightarrow 1 = 7m + c \rightarrow c = 1 - 7m$

Perhatikan di bawah ini:

$x^2 + y^2 = 25$

$x^2 + (mx + c)^2 = 25$

$x^2 + m^2x^2 + 2mxc + c^2 = 25$

$(1 + m^2)x^2 (2mc)x + c^2 - 25 = 0$

Syarat bersinggungan: $D=0$

$b^2-4ac=0$

$100m^2-4c^2+100=0$

$100m^2-4(1-7m)^2+100=0$

$12m^2-7m-12=0$

$(3m-4)(4m+3)=0$

$m_1=\dfrac{4}{3}$ atau $m_2=-\dfrac{3}{4}$

Untuk $m=\dfrac{4}{3}$

$y=mx+c$

$y=\dfrac{4}{3}x+\left(1-7\left(\dfrac{4}{3}\right)\right)$

$4x-3y=25$

Untuk $m=\dfrac{-3}{4}$

$y=mx+c$

$y=\dfrac{-3}{4}x+\left(1-7\left(\dfrac{-3}{4}\right)\right)$

$3x+4y=25$ (**b**)

12. Jarak terdekat antara titik $(-7,2)$ kelingkaran $x^2+y^2-10x-14y-151=0$ adalah ...

Penyelesaian:

Titik pusat $(a,b)=(5,7)$

Jari-jari $r=\sqrt{a^2+b^2-c}=\sqrt{25+49+151}=15$

Jarak titik pusat dengan $(-7,2)$ maka

$d=\sqrt{(5+7)^2+(7-2)^2}=\sqrt{144+25}=13$

Jarak terdekat $|13-15|=2$ $(\mathbf{b})$

13. Salah satu lingkaran ynag melalui titik $(1,5)$ dan titik $(4,1)$ dan menyinggung pula pada sumbu y adalah suatu lingkaran yang berjari-jari ...

Penyelesaian:

Misalkan titik pusat (a,b).

Persamaan lingkaran yang menyinggung sumbu y artinya $r = a$.

Sehingga

$$\left(x-r\right)^2+\left(y-b\right)^2=r^2$$

Lingkaran melalui $\left(1,5\right)$:

$$\left(1-r^2\right)+\left(5-b\right)^2=r^2$$

$$r=\frac{26-10b+b^2}{2}...\left(i\right)$$

Lingkaran melalui $\left(4,1\right)$:

$$\left(4-r\right)^2+\left(1-b\right)^2=r^2$$

$$r=\frac{17-2b+b^2}{8}...\left(ii\right)$$

Dari $\left(i\right)$ dan $\left(ii\right)$ diperoleh:

$$\frac{26-10b+b^2}{2}=\frac{17-2b+b^2}{8}$$

$$3b^2-38b+87=0$$

$$\left(b-3\right)\left(3b-29\right)=0$$

$$b=3 \text{ atau } b=\frac{29}{3}$$

$$b=3\rightarrow r=\frac{5}{2} \qquad \left(\mathbf{a}\right)$$

14. Lingkaran $x^2+y^2-2px+q=0$ yang mempunyai jari-jari 2, akan menyinggung garis $x-y=0$. Nilai p yang positif adalah ...

Penyelesaian:

Misalkan titik pusat $\left(a,b\right)=\left(p,0\right)$

Karena $x-y=0\rightarrow x=y$ maka

$x^2+y^2-2px+q=0$

$y^2+y^2-2py+q=0$

$2y^2-2py+q=0$

Syarat menyinggung: $D=0$

$b^2-4ac=0$

$\left(-2p\right)^2-4\left(2\right)\left(q\right)=0$

$4p^2-8q=0...\left(i\right)$

Karena jari-jarinya 2 maka

$r=\sqrt{a^2+b^2-c}$

$2^2=p^2-q$

$q=p^2-4...\left(ii\right)$

Dari $\left(i\right)$ dan $\left(ii\right)$ diperoleh

$4p^2-8\left(p^2-4\right)=0$

$-4p^2=-32$

$p^2=8$

$p=\pm2\sqrt{2}$

Karena p positif maka $p=2\sqrt{2}$ **(d)**

15. Kontraposisi dari pernyataan majemuk $p \to (p \vee \sim q)$ adalah ….

Penyelesaian:

$p \to (p \vee \sim q)$

Kontraposisi :

$\sim(p \vee \sim q) \to \sim p$

$(\sim p \wedge q) \to \sim p$ **(b)**

16. Penarikan kesimpulan yang sah dari argumentasi berikut :

~p → q

q → r

∴ …

Penyelesaian:

$\sim p \to q$

$\underline{q \to r}$

$\therefore \sim p \to r$ (Sillogisme)

$\boldsymbol{p \to q \equiv \sim p \vee q}$

$\sim p \to r \equiv p \vee r$ **(e)**

17. Dalam kantong I terdapat 5 kelereng merah dan 3 kelereng putih, dalam kantong II terdapat 4 kelereng merah dan 6 kelereng hitam. Dari setiap kantong diambil satu kelereng secara acak. Peluang terambilnya kelereng putih dari kantong I dan kelereng hitam dari kantong II adalah ….

Penyelesaian:

P [A = terambil 1 kelereng putih dari kantong I] =

$$\frac{C_0^5 C_1^3}{C_1^8} = \frac{1.3}{8} = \frac{3}{8}$$

P [B = terambil 1 kelereng hitam dari kantong II] =

$$\frac{C_0^4 C_1^6}{C_1^{10}} = \frac{1.6}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

P [A∩B] = $\frac{3}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{40}$ **(e)**

18. A, B, C, dan D akan berfoto secara berdampingan. Peluang A dan B selalu berdampingan adalah ….

Penyelesaian:

N = Banyak cara menyusun A, B, C, dan D berfoto berdampingan = 4x3x2x1 = 24 cara

4	3	2	1	= 24 cara

A = Banyak cara menyusun A dan B selalu berdampingan = $2[3 \times 2 \times 1] = 2 \times 6 = 12$

AB	3	2	1	= 6 cara
BA	3	2	1	= 6 cara

Sehingga,

P [A dan B selalu berdampingan] = $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$ **(d)**

19. Dalam suatu populasi keluarga dengan tiga orang anak, peluang keluarga tersebut mempunyai paling sedikit dua anak laki – laki adalah ….

Penyelesaian:

Misal: Perempuan = P dan Laki-laki = L

Kemungkinan 3 anak yang terlahir dalam suatu keluarga:

LLL, **LLP**, LPP, PPP, PPL, **PLL**, PLP, **LPL**

N = 2^3 = 8

A = banyaknya kemungkinan keluarga tersebut mempunyai paling sedikit dua anak laki – laki = 4

Sehingga,

P [keluarga tersebut mempunyai paling sedikit dua anak laki – laki] = $^{A}/_{N} = {}^{4}/_{8} = {}^{1}/_{2}$ **(d)**

20. Sebuah dompet berisi uang logam, 5 keping lima ratusan dan 2 keping ratusan rupiah. Dompet yag lain berisi uang logam 1 keping lima ratusan dan 3 keping ratusan rupiah. Jika sebuah uang logam diambil secara acak dari salah satu dompet, peluang untuk mendapatkan uang logam ratusan rupiah adalah ….

Penyelesaian:

- Peluang pemilihan Dompet

  $2C_1 = 2$

- Peluang pemilihan Logam Ratusan

Dompet I

$$7C_1 = \frac{7!}{6!\,1!} = 7$$

$2C_1 = 2$

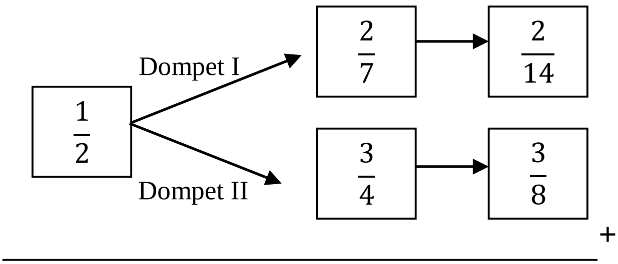
Peluang terambilnya logam ratusan di dompet I $\frac{2}{7}$

Dompet II

$4C_1 = 4$

$3C_1 = 3$

Peluang terambilnya logam ratusan di dompet II $\frac{3}{4}$



$$\frac{8+21}{56} = \frac{29}{56}$$

(d)

21. Suatu kelas terdiri dari 40 orang. Peluang seorang siswa lulus tes matematika adalah 0,4. Peluang seorang siswa lulus fisika adalah 0,2. Banyaknya siswa yang lulus tes matematika atau fisika adalah … orang.

Penyelesaian:

Lulus tes matemtika = 0,4 x 40 = 16

Lulus tes fisika = 0,2 x 40 = 8

Banyaknya siswa yang lulus tes matematika atau fisika adalah 16 + 8 = 24 **(d)**

22. Banyak garis yang dapat dibuat dari 8 titik yang tersedia, dengan tidak ada 3 titik yang segaris adalah ….

Penyelesaian:

Untuk membuat sebuah garis diperlukan minimal 2 titik, dengan syarat maka tidak ada 3 titik yang segaris, maka banyak garis yang dapat dibuat dari 8 titik yang tersedia, yaitu:

$C_2^8 = \frac{8!}{(8-2)!2!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6! \times 2 \times 1} = \frac{56}{2} = 28$ **(d)**

23. Suatu kelas terdiri dari 40 siswa. 25 siswa gemar matematika, 21 siswa gemar IPA, dan 9 siswa gemar matematika dan IPA. Peluang seorang tidak gemar matematika maupun IPA adalah ….

Penyelesaian:

Semesta (N) = 40

Yang hanya suka matematika saja n(A) = 25 – 9 = 16

Yang hanya suka IPA saja n(B) = 21 – 9 = 12

Semesta (N) = matematika saja + IPA saja + kedua-duanya + tidak kedua+duanya

40 = 16 + 12 + 9 + tidak kedua-duanya

40 = 37 + tidak kedua-duanya

3 = tidak kedua-duanya

Jadi peluang seorang tidak gemar kedua-duanya adalah 3/40 **(e)**

24. Diketahui $5x^2 - 4(m+1)x + 5m = 0$. Supaya kedua akarnya real berbeda dan positif maka nilai m haruslah ...

Penyelesaian:

$5x^2 - 4(m+1)x + 5m = 0$

$a = 5, \quad b = -4(m+1), \; c = 5m$

Tahap pertama, kedua akar rill berbeda, artinya D > 0

$D > 0$

$b^2 - 4ac > 0$

$(-4(m+1))^2 - 4(5)(5m) > 0$

$16m^2 + 32m + 16 - 100m > 0$

$$16m^2 - 68m + 16 > 0$$
$$4m^2 - 17m + 4 > 0$$
$$\frac{1}{4}(4m-16)(4m-1) > 0$$
$$m_1 = 4, m_2 = \frac{1}{4}$$

Sehingga $m < \frac{1}{4}$ atau $m > 4$

Tahap kedua, kedua akar positif, artinya

$x_1.x_2 = \frac{c}{a} > 0$ dan $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$

$$\frac{c}{a} > 0 \qquad -\frac{b}{a} > 0$$
$$\frac{5m}{5} > 0 \qquad \frac{4m+4}{5} > 0$$
$$m > 0 \qquad m > -1$$

Maka dari tahap pertama dan kedua diperoleh

$0 < m < \frac{1}{4}$ atau $m > 4$ **(e)**

25. Jika jumlah kuadrat akar-akar riil persamaan $x^2 - 2x - p = 0$ sama dengan jumlah kebalikan akar-akar persamaan $x^2 - 8x + (p-1) = 0$ maka nilai $p = ...$

Penyelesaian:

Misalkan akar-akar rill persamaan kuadrat dari

$x^2 - 2x - p = 0$ adalah x_1 dan x_2.

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -4 \qquad x_1.x_2 = \frac{c}{a} = -p$

Karena akar-akarnya riil maka $D \geq 0$ $D \geq 0$ $b^2 - 4ac \geq 0$ $4 + 4p \geq 0$ $p \geq -1$

Misalkan akar-akar rill persamaan kuadrat dari

$x^2 - 8x + (p-1) = 0$ adalah x_3 dan x_4.

$x_3 + x_4 = -\frac{b}{a} = 8 \qquad x_3.x_4 = \frac{c}{a} = p - 1$

Perhatikan bahwa:

$$\mathrm{x}_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{x_4 + x_3}{x_3.x_4}$$

$$4-2(-p)=\frac{8}{p-1}$$

$$4+2p=\frac{8}{p-1}$$

$$(p-1)(4+2p)-8=0$$

$$4p+2p^2-4-2p-8=0$$

$$2p^2+2p-12=0$$

$$p^2+p-6=0$$

$$(p+3)(p-2)=0$$

$$p=-3 \qquad\qquad p=2$$

Karena $p \geq -1$ maka nilai p yang memenuhi adalah

$p=2$ **(a)**

26. Jika x_1 dan x_2 merupakan akar-akar riil yang berbeda dari persamaan $x^2+x=\dfrac{4}{x^2+x+3}$, maka nilai $x_1.x_2=\ldots$

Penyelesaian:

Misalkan $x^2+x=p$, maka persamaannya dapat ditulis:

$$x^2 + x = \frac{4}{x^2 + x + 3}$$

$$p = \frac{4}{p+3}, \quad p \neq -3$$

$$p^2 + 3p - 4 = 0$$

$$(p+4)(p-1) = 0$$

$$p_1 = -4 \; p_2 = 1$$

Untuk $p = -4$ diperoleh:

$x^2 + x = -4$

$x^2 + x + 4 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 1 - 16 = -17 < 0$

(Merupakan akar-akar tidak riil)

Untuk $p = 1$

$x^2 + x = 1$

$x^2 + x - 1 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 1 + 4 = 5 \geq 0$

(merupakan akar-akar riil)

Sehingga haruslah $x^2 + x - 1 = 0$.

$x_1.x_2 = \frac{c}{a} = -1$ **(b)**

27. Akar-akar persamaan kuadrat $x^2+6x+p=0$ adalah x_1 dan x_2. Akar-akar persamaan kuadrat $x^2+(x_1+x_2)^2x-4=0$ adalah q_1 dan q_2. Jika $q_1+q_2=-q_1.q_2$, maka $x_1^3x_2+x_1x_2^3=...$

Penyelesaian:

$x^2+6x+p=0$

$a=1 \quad b=6 \quad c=p$

$x_1+x_2=-6$ dan $x_1.x_2=p$

$x^2+(x_1^2+x_2^2)x-4=0$

$a=1 \quad b=x_1^2+x_2^2 \quad c=-4$

Sehingga $q_1+q_2=-(x_1^2+x_2^2)$ dan $q_1.q_2=-4$

Perhatikan:

$q_1+q_2=-q_1q_2$

$-(x_1^2+x_2^2)=4$

$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=-4$

$36-2p=-4$

$-2p=-40$

$p=20$

Sehingga persamaan kuadratnya adalah $x^2+6x+20=0$

$x_1+x_2=-6$ dan $x_1.x_2=20$, akibatnya

$$x_1^{\,3}x_2 + x_1x_2^{\,3} = (x_1x_2)\left(x_1^{\,2} + x_1^{\,2}\right) = (20)(-4) = -80 \qquad \textbf{(d)}$$

28. Persamaan $p = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{(x-2)^2}$ memiliki akar kembar apabila nilai $p = \ldots$

Penyelesaian:

$$p = \frac{x^2 - 2x + 4}{(x-2)^2}$$

$$p = \frac{(x-2)^2 + 2x}{(x-2)^2}$$

$$(x-2)^2\,p - (x-2)^2 - 2x = 0$$

$$(x-2)^2\,(p-1) - 2x = 0$$

$$\left(x^2 - 4x + 4\right)(p-1) - 2x = 0$$

$$px^2 - x^2 - 4px + 4x + 4p - 4 - 2x = 0$$

$$(p-1)x^2 + (2-4p)x + (4p-4) = 0$$

$$D = 0$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$(2-4p)^2 - 4(p-1)(4p-4) = 0$$

$$4 - 16p + 16p^2 - 4\left(4p^2 - 4p - 4p + 4\right) = 0$$

$$4 - 16p + 16p^2 - 16p^2 + 32p - 16 = 0$$

$16p = 12$

$p = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ **(c)**

29. Persamaan $x^2 - px + p - 7 = 0$ memiliki akar-akar yang saling berlawanan maka nilai $p = ...$

Penyelesaian:

$x^2 - (p+1)x + p - 7 = 0$

Akar-akar berlawanan adalah $b = 0$ sehingga $-p - 1 = 0 \rightarrow p = -1$ **(b)**

30. Tentukan persamaan kuadrat baru merupakan yang akar-akarnya 3 kali dari akar-akar persamaan $x^2 - 2x + 5 = 0$!

Penyelesaian:

$x^2 - 2x + 5 = 0$

$a = 1 \quad b = -2 \quad c = 5$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2 \qquad x_1 . x_2 = 5$

Akar-akar persamaan kuadrat baru adalah $3x_1$ dan $3x_2$, sehingga **:**

$$3x_1+3x_2=3(x_1+x_2)=3(2)=6$$

$$3x_1.3x_2=9x_1.x_2=9(5)=45$$

$$x^2-(3x_1+3x_2)x+3x_13x_2=0$$

$$x^2-6x+45=0 \qquad \textbf{(b)}$$

PEMBAHASAN SOAL

KOMPETISI SELEKSI III

1. Luas daerah parkir 1.760 m^2. Luas rata – rata untuk mobil kecil 4 m^2 dan mobil besar 20 m^2. Daya tampung maksimum hanya 200 kendaraan, biaya parkir mobil kecil Rp. 1.000,00/jam dan mobil besar Rp. 2.000,00/jam. Jika dalam satu jam terisi penuh dan tidak kendaraan yang pergi dan datang, maka hasil maksimum tempat parkir itu adalah ….

Penyelesaian:

Terlebih dahulu terjemahkan permasalahan tersebut ke dalam model matematika dengan cara membuat tabel seperti berikut

	Mobil kecil (x)	Mobil besar (y)	Maksimal
Luas daerah parkir	4 m^2	20 m^2	1.760
Daya tampung	1	1	200
Biaya parkir	1000	2000	

Misalkan banyak mobil kecil adalah x dan banyak mobil besar adalah y. Dari tabel di atas dapat dibuat model matematika berikut. Fungsi objektif memaksimumkan $z = 1.000\ x + 2.000\ y$

Kendala:

$4x + 20y \leq 1.760$ atau $x + 5y \leq 440$

$x + y \leq 200$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$x,y \in C$

Tentukan titik potong $x + 5y = 440$ dan $x + y = 200$ dengan sumbu koordinat cartesius.

X	0	440
Y	88	0
(x,y)	(0,88)	(440,0)
X	0	200
Y	200	0
(x,y)	(0,200)	(200,0)

Buat daerah himpunan penyelesaian kendala-kendala dalam bidang cartesius.

Tentukan titik potong antara dua garis dengan eliminasi

$x + 5y = 440$

$x + y = 200$ -

$4y = 240$

$y = 60$

dengan mensubtitusikan $y = 60$ ke salah satu persamaan, diperoleh $x = 140$. Jadi titik potong kedua garis tersebut adalah (140,60). Daerah penyelesainnya mempunyai empat titik sudut, yaitu O(0,0), A(200,0), B(140,60) dan C(0,88). Selanjutnya kita selidiki nilai objektif $z = 1000x + 2000y$ untuk masing-masing titik sudut.

Titik	O(0,0)	A(200,0)	B(140,60)	C(0,88)
X	0	200	140	0
Y	0	0	60	88
Z = 1000x + 2000y	0	200.000	260.000	176.000

Dari tabel di atas terlihat nilai maksimumnya adalah z = 260.000, yaitu x = 140 dan y = 60.

Jadi, hasil maksimum tempat parkir, yaitu Rp 260.000,00 jika ia dapat menerima parkir mobil kecil 140 buah dan mobil besar 60 buah. **(c)**

2. Seorang pedagang menjual buah mangga dan pisang dengan menggunakan gerobak. Pedagang tersebut membeli mangga dengan harga Rp. 8.000,00/kg dan pisang Rp. 6.000,00/kg. Modal yang tersedia Rp. 1.200.000,00 dan gerobaknya hanya dapat memuat mangga dan pisang sebanyak 180 kg. Jika harga jual mangga Rp. 9.200,00/kg dan pisang Rp. 7.000,00/kg, maka laba maksimum yang diperoleh adalah ….

Penyelesaian:

Terlebih dahulu terjemahkan permasalahan tersebut ke dalam model matematika dengan cara membuat tabel seperti berikut

	mangga (x)	pisang (y)	Maksimal
Harga beli	8000	6000	1.200.000
Daya tampung gerobak	1	1	180
Laba	1200	1000	

Misalkan banyak mangga adalah x dan banyak pisang adalah y. Dari tabel di atas dapat dibuat model matematika berikut. Fungsi objektif memaksimumkan z = 1200x + 1.000 y

Kendala:

$8000x + 6000y \leq 1.200.000$ atau $4x + 3y \leq 600$

$x + y \leq 180$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$x, y \in C$

Tentukan titik potong $4x + 3y = 600$ dan $x + y = 180$ dengan sumbu koordinat cartesius.

X	0	150
Y	200	0
(x,y)	(0,200)	(150,0)
X	0	180
Y	180	0
(x,y)	(0,180)	(180,0)

Buat daerah himpunan penyelesaian kendala-kendala dalam bidang cartesius.

Tentukan titik potong antara dua garis dengan eliminasi

$4x + 3y = 600$

$4x + 4y = 720$ -

$-y = -120$

$y = 120$

dengan mensubtitusikan $y = 120$ ke salah satu persamaan, diperoleh $x = 60$. Jadi titik potong kedua garis tersebut adalah (60,120). Daerah penyelesainnya mempunyai empat titik sudut, yaitu O(0,0), A(150,0), B(60,120) dan C(0,180). Selanjutnya kita selidiki nilai objektif $z = 12000x + 1000y$ untuk masing-masing titik sudut.

Titik	O(0,0)	A(150,0)	B(60,120)	C(0,180)
X	0	150	60	0
Y	0	0	120	180
Z = 1200x + 1000y	0	180.000	192.000	180.000

Dari tabel di atas terlihat nilai maksimumnya adalah $z = 192.000$, yaitu $x = 60$ dan $y = 120$.

Jadi,hasil maksimum tempat parkir, yaitu Rp 192.000,00 jika ia dapat menjual mangga 60 kg dan pisang 120 kg. **(c)**

3. Tanah seluas 10.000 m^2 akan dibangun rumah tipe A dan tipe B. Untuk tipe A diperlukan 100 m^2 dan dan tipe B diperlukan 75 m^2. Jumlah rumah yang akan dibangun paling banyak 125 unit. Keuntungan rumah tipe A adalah Rp. 6.000.000,00/unit dan tipe B adalah Rp. 4.000.000,00/unit. Keuntungan maksimum yang dapat diperoleh daru penjualan rumah tersebut adalah

Penyelesaian:

Terlebih dahulu terjemahkan permasalahan tersebut ke dalam model matematika dengan cara membuat tabel seperti berikut

	Tipe A (x)	Tipe B (y)	Maksimal
Luas lahan	100m^2	75m^2	10.000 m^2
Jumlah rumah dibangun	1	1	125
Keuntungan	6.000.000	4.000.000	

Misalkan banyak Tipe A adalah x dan banyak Tipe B adalah y. Dari tabel di atas dapat dibuat model matematika berikut. Fungsi objektif memaksimumkan z = 6.000.000x + 4.000.000 y

Kendala:

$100x + 75y \leq 10.000$ atau $4x + 3y \leq 400$

$x + y \leq 125$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$x, y \in C$

Tentukan titik potong 4x + 3y = 400 dan x + y=125 dengan sumbu koordinat cartesius.

X	0	100
Y	133	0
(x,y)	(0,133)	(100,0)

X	0	125
Y	125	0
(x,y)	(0,125)	(125,0)

Buat daerah himpunan penyelesaian kendala-kendala dalam bidang cartesius.

Tentukan titik potong antara dua garis dengan eliminasi

$4x + 3y = 400$

$4x + 4y = 500$ -

$-y = -100$

$y = 100$

dengan mensubtitusikan y = 100 ke salah satu persamaan, diperoleh x = 25. Jadi titik potong kedua garis tersebut adalah (25,100). Daerah penyelesainnya mempunyai empat titik sudut, yaitu O(0,0), A(100,0), B(25,100) dan C(0,125). Selanjutnya kita selidiki nilai objektif z = 6.000.000x + 4.000.000y untuk masing-masing titik sudut.

Titik	O (0,0)	A (100,0)	B (25,100)	C (0,125)
X	0	100	25	0
Y	0	0	100	125
Z = 6.000.000x + 4.000.000y	0	600.000.000	550.000.000	500.000.000

Dari tabel di atas terlihat nilai maksimumnya adalah z = 600.000, yaitu x = 100 dan y = 0.

Jadi, keuntungan maksimum penjualan rumah, yaitu Rp 600.000.000,00 jika ia dapat menjual tipe A 100 unit dan tipe B 0 unit. **(b)**

4. Suatu tempat parkir yang luasnya 300 m^2 digunakan untuk memarkir sebuah mobil dengan rata – rata 10 m^2 dan untuk bus rata – rata 20 m^2 dengan daya tampung hanya 24 kendaraan. Biaya parkir untuk mobil Rp. 1.000,00/jam dan untuk bus Rp. 3.000,00/jam. Jika dalam satu jam tempat parkir terisi penuh dan tidak ada kendaraan yang datang dan pergi, hasil maksimum tempat parkir itu adalah ….

Penyelesaian:

Terlebih dahulu terjemahkan permasalahan tersebut ke dalam model matematika dengan cara membuat tabel seperti berikut

	Mobil (x)	Bus (y)	Maksimal
Luas daerah parkir	10 m^2	20 m^2	300
Daya tampung	1	1	24
Biaya parkir	1000	3000	

Misalkan banyak mobil adalah x dan banyak bus adalah y. Dari tabel di atas dapat dibuat model matematika berikut. Fungsi objektif memaksimumkan z = 1.000 x + 3.000 y

Kendala:

$10x + 20y \leq 300$ atau $x + 2y \leq 30$

$x + y \leq 24$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$x, y \in C$

Tentukan titik potong x + 2y = 30 dan x + y = 24 dengan sumbu koordinat cartesius.

X	0	30
Y	15	0
(x,y)	(0,15)	(30,0)

X	0	24
Y	24	0
(x,y)	(0,24)	(24,0)

Buat daerah himpunan penyelesaian kendala-kendala dalam bidang cartesius.

Tentukan titik potong antara dua garis dengan eliminasi

$x + 2y = 30$

$x + y = 24$ -

$y = 6$

dengan mensubtitusikan y = 6 ke salah satu persamaan, diperoleh x = 18. Jadi titik potong kedua garis tersebut adalah (18,6). Daerah penyelesainnya mempunyai empat titik sudut, yaitu O(0,0), A(24,0), B(18,6) dan C(0,15). Selanjutnya kita selidiki nilai objektif z = 1000x + 3000y untuk masing-masing titik sudut.

Titik	O(0,0)	A(24,0)	B(18,6)	C(0,15)
X	0	24	18	0
Y	0	0	6	15
Z = 1000x + 3000y	0	24.000	36.000	45.000

Dari tabel di atas terlihat nilai maksimumnya adalah z = 45.000, yaitu x = 0 dan y = 15.

Jadi,hasil maksimum tempat parkir, yaitu Rp 45.000,00 jika ia dapat menerima parkir mobil 0 buah dan bus 15 buah. **(d)**

5. Nilai maksimum fungsi obyektif $4x + 2y$ pada himpunan penyelesaian system pertidaksamaan $x + y \geq 4, x + y \leq 9, -2x + 3y \leq 12, 3x - 2y \leq 12$ adalah ….

Penyelesaian:

Fungsi objektif memaksimumkan z = 4 x + 2 y

Kendala:

$x + y \geq 4$

$x + y \leq 9$

$-2x + 3y \leq 12$

$3x - 2y \leq 12$

titik potong x + y = 4

X	0	4
Y	4	0
(x,y)	(0,4)	(4,0)

titik potong x + y = 9

X	0	9
Y	9	0
(x,y)	(0,9)	(9,0)

titik potong $-2x + 3y = 12$

X	0	-6
Y	4	0
(x,y)	(0,4)	(-6,0)

titik potong $3x - 2y = 12$

X	0	4
Y	-6	0
(x,y)	(0,-6)	(4,0)

Buat daerah himpunan penyelesaian kendala-kendala dalam bidang cartesius.

Tentukan titik potong antara dua garis dengan eliminasi

$-2x + 3y = 12$

$\underline{2x + 2y = 18}$ -

$5y = 30$

$y = 6$

dengan mensubtitusikan $y = 6$ ke salah satu persamaan, diperoleh $x = 3$. Jadi titik potong kedua garis tersebut adalah (3,6)

Tentukan titik potong antara dua garis dengan eliminasi

$$3x - 2y = 12$$
$$\underline{2x + 2y = 18} \quad -$$
$$5x = 30$$
$$x = 6$$

dengan mensubtitusikan x = 6 ke salah satu persamaan, diperoleh y = 3. Jadi titik potong kedua garis tersebut adalah (6,3). Daerah penyelesainnya mempunyai empat titik sudut, yaitu A(4,0), B(6,3), C(3,6) dan D(0,4). Selanjutnya kita selidiki nilai objektif z = 4x + 2y untuk masing-masing titik sudut.

Titik	A(4,0)	B(6,3)	C(3,6)	D(0,4)
X	4	6	3	0
Y	0	3	6	4
Z = 4x + 2y	16	30	24	8

Dari tabel di atas terlihat nilai maksimumnya adalah z = 30, yaitu x = 6 dan y = 3. **(c)**

6. Nilai maksimum fungsi sasaran $Z = 6x + 8y$ dari sistem pertidaksamaan $4x + 2y \leq 60, 2x + 4y \leq 48, x \geq 0, y \geq 0$ adalah ….

Penyelesaian:

Fungsi objektif memaksimumkan z = 6 x + 8 y

Kendala:

$4x + 2y \leq 60$ atau $2x + y \leq 30$

$2x + 4y \leq 48$ atau $x + 2y \leq 24$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

titik potong $2x + y = 30$

X	0	15
Y	30	0
(x,y)	(0,30)	(15,0)

titik potong $x + 2y = 24$

X	0	24
Y	12	0
(x,y)	(0,12)	(24,0)

Buat daerah himpunan penyelesaian kendala-kendala dalam bidang cartesius.

Tentukan titik potong antara dua garis dengan eliminasi

$$\begin{array}{l} 2x + y = 30 \\ \underline{2x + 4y = 48} \quad - \\ -3y = -18 \end{array}$$

y = 6

dengan mensubtitusikan y = 6 ke salah satu persamaan, diperoleh x = 12. Jadi titik potong kedua garis tersebut adalah (12,6). Daerah penyelesainnya mempunyai empat titik sudut, yaitu O(0,0), A(15,0), B(12,6) dan C(0,12). Selanjutnya kita selidiki nilai objektif z = 6x + 8y untuk masing-masing titik sudut.

Titik	O(0,0)	A(15,0)	B(12,6)	C(0,12)
X	0	15	12	0
Y	0	0	6	12
Z = 6x + 8y	0	90	120	96

Dari tabel di atas terlihat nilai maksimumnya adalah z = 120, yaitu x = 12 dan y = 6. **(a)**

7. Untuk menambah penghasilan, seorang ibu setiap harinya memproduksi dua jenis kue untuk dijual. Setiap kue jenis I modalnya Rp. 200 dengan keuntungan 40%, sedangkan setiap kue jenis II modalnya Rp. 300 dengan keuntungan 30%. Jika modal yang tersedia setipa harinya adalah Rp. 100.000 dan paling banyak hanya dapat

memproduksi 400 kue, maka keuntungan tersbesar yang dapat dicapai ibu tersebut adalah ….

Penyelesaian:

Terlebih dahulu terjemahkan permasalahan tersebut ke dalam model matematika dengan cara membuat tabel seperti berikut

	Tipe A (x)	Tipe B (y)	Maksimal
Produksi kue	200	300	100.000
Jumlah produksi kue	1	1	400
Keuntungan	40%	30%	

Misalkan banyak Tipe A adalah x dan banyak Tipe B adalah y. Dari tabel di atas dapat dibuat model matematika berikut. Fungsi objektif memaksimumkan $z = 80x + 90y$

Kendala:

$200x + 300y \leq 100.000$ atau $2x + 3y \leq 1.000$

$x + y \leq 400$

$x \geq 0$

$y \geq 0$ $\quad x, y \in C$

Tentukan titik potong $2x + 3y = 1.000$ dan $x + y = 400$ dengan sumbu koordinat cartesius.

X	0	500
Y	333	0
(x,y)	(0,333)	(500,0)

X	0	400
Y	400	0
(x,y)	(0,400)	(400,0)

Buat daerah himpunan penyelesaian kendala-kendala dalam bidang cartesius.

Tentukan titik potong antara dua garis dengan eliminasi

$$
\begin{array}{l}
2x + 3y = 1.000 \\
\underline{2x + 2y = 800} \quad - \\
y = 200
\end{array}
$$

dengan mensubtitusikan y = 200 ke salah satu persamaan, diperoleh x = 300. Jadi titik potong kedua garis tersebut adalah (300,200). Daerah penyelesainnya mempunyai empat titik sudut, yaitu O(0,0), A(400,0), B(300,200) dan C(0,333).

Selanjutnya kita selidiki nilai objektif z = 80x + 90y untuk masing-masing titik sudut.

Titik	O(0,0)	A(400,0)	B(300,200)	C(0,333)
X	0	400	300	0
Y	0	0	200	333
Z = 80x + 90y	0	32.000	42.000	13.320

Dari tabel di atas terlihat nilai maksimumnya adalah z = 42.000. Karena modalnya adalah (200)(300)+(300)(200)=120.000. Sehingga persentasi keuntungannya adalah $\frac{42.000}{120.000} = 35\%$ **(b)**

8. Jika $x^4 + ax^3 + (b-14)x^2 + 28x - 15 = f(x)(x-1)$ dengan $f(x)$ habis dibagi $x-1$, maka nilai b adalah ...

Penyelesaian:

Karena $f(x)$ habis dibagi $(x-1)$ artinya $f(1) = 0$, sehingga:

$x^4 + ax^3 + (b-14)x^2 + 28x - 15 = f(x)(x-1)$

$1 + a + b - 14 + 28 - 15 = 0$

$a + b = 0$

$a = -b$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & a & b-14 & 28 & -15 \\
1 & & 1 & a+1 & a+b-13 & a+b+15 \\
\hline
 & 1 & a+1 & a+b-13 & a+b+15 & a+b
\end{array}
$$

Dari di atas diperoleh bahwa $a+b=0 \to a=-b$.

Sehingga:

$$(x-1)\left(x^3+(a+1)x^2+(a+b-13)x+(a+b+15)\right)=(x-1)\,f(x)$$

artinya

$$f(x)=x^3+(a+1)x^2+(a+b-13)x+(a+b+15)$$

$$0=1+a+1+a+b-13+a+b+15$$

$$-4=3a+2b$$

$$-4=-3b+2b$$

$$-4=b \qquad \textbf{(e)}$$

9. Jika $f(x)$ dibagi $(x-2)$ sisanya 24, sedagkan jika $f(x)$ dibagi dengan $(2x-3)$ sisanya 20. Jika $f(x)$ dibagi dengan $(x-2)(2x-3)$ sisanya adalah …

Penyelesaian:

Berdasarkan teorema sisa, suatu suku banyak dapat ditulis sebagai berikut :

$f(x) = h(x) . g(x) + s(x)$

dengan :

$f(x)$ = suku banyak

$h(x)$ = hasil bagi

$g(x)$ = pembagi

$s(x)$ = sisa pembagian

Dengan demikian, maka suku banyak dalam soal dapat ditulis sebagai berikut :

$f(x) = h(x)\ (x - 2) + 24$

$f(x) = h(x)\ (2x - 3) + 20$

Selanjutnya, masih berdasarkan konsep teorema sisa bila suatu suku banyak $P(x)$ dibagi oleh $(ax - b)$, maka sisanya adalah :

$s(x) = f(-b/a)$

dengan :

$s(x)$ = sisa bagi

$-b/a$ diambil dari $(ax - b)$

Berdasarkan konsep tersebut maka diperoleh :

Dibagi dengan $(x - 2) \rightarrow -b/a = 2$

$f(2) = 24$

Dibagi dengan $(2x - 3) \rightarrow -b/a = 3/2$

$f(3/2) = 20$

Karena ditanya sisa bagi jika dibagi dengan $(x - 2)(2x - 3)$, maka kita dapat memisalkan sisa baginya dengan $(ax + b)$. Dengan demikian maka diperoleh :

Dibagi dengan $(x - 2) \rightarrow -b/a = 2$

$f(2) = ax + b$

$f(2) = a(2) + b$

$f(2) = 2a + b$

$f(2) = 24 \rightarrow$ karena dari soal diketahui $f(2) = 24$

maka $2a + b = 24$

Dibagi dengan $(2x - 3) \rightarrow -b/a = 3/2$

$f(3/2) = ax + b$

$f(3/2) = a(3/2) + b$

$f(3/2) = (3/2)a + b$

$f(3/2) = 20 \rightarrow$ karena dari soal diketahui $f(3/2) = 20$

maka $(3/2)a + b = 20$

Selanjutnya kita dapat menentukan nilai a dan b dengan cara substitusi sebagai berikut :

2a + b = 24 → b = 24 - 2a → substitusi ke

persamaan (3/2)a + b = 20

(3/2)a + b = 20

(3/2)a + (24 - 2a) = 20

(3/2 - 2)a = -4

-½ a = -4

a = 8

Karena a = 8, maka diperoleh

b = 24 - 2a

b = 24 - 2(8)

b = 24 - 16

b = 8

Jadi sisa bagi suku banyak tersebut jika dibagi

dengan (x - 2)(2x - 3) adalah :

s(x) = ax + b = 8x + 8 **(a)**

10. Sisa pembagian suku banyak ($x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$) oleh ($x^2 - x - 2$) adalah ….

Penyelesaian:

Cari akar – akar dari persamaan $x^2 - x - 2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x - 2)(x + 1) = 0$

$x - 2 = 0$ atau $x + 1 = 0$

$x = 2$ atau $x = -1$

Substitusikan kedua nilai pada $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ untuk medapatkan sisa pembagian

$f(2) = 2^4 - 4(2)^3 + 3(2)^2 - 2(2) + 1 = 16 - 32 + 12 - 4 + 1 = -7$

$f(-1) = -1^4 - 4(-1)^3 + 3(-1)^2 - 2(-1) + 1 = 1 + 4 + 3 + 2 + 1 = 11$

Masukkan nilai $f(2) = -7$ dan $f(-1) = 11$ pada persamaan $f(x) = (x-2)(x+1)H(x) + (ax+b)$ maka diperoleh

$f(2) = (2-2)(2+1)H(2) + (2a+b) = -7$

$2a + b = -7 \ldots$ (1)

$f(-1) = (-1-2)(-1+1)H(-1) + (-a+b) = 11$

$-a + b = 11 \ldots$ (2)

Jika persamaan (1) dan (2) dieliminasi maka

$3a = -18$

$a = -6$

kemudian nilai $a = -6$ disubstitusi ke persamaan (2) diperoleh $-(-6) + b = 11, b = 5$

Sehingga sisa dari pembagiannya adalah

$ax + b = -6x + 5$ **(a)**

11. Diketahui $(x + 1)$ salah satu faktor dari suku banyak $f(x) = 2x^4 - 2x^3 + px^2 - x - 2$, salah satu faktor yang lain adalah ….

Penyelesaian:

Substitusikana harga pembuat nol (x + 1) pada f(x) $= 2x^4 - 2x^3 + px^2 - x - 2$ untuk mendapatkan nilai p.

$x + 1 = 0$

$x = -1$

$f(-1) = 2(-1)^4 - 2(-1)^3 + p(-1)^2 - (-1) - 2 = 0$

$2 + 2 + p + 1 - 2 = 0$

Didapat :

$3 + p = 0$

P = – 3, sehingga fungsinya menjadi $f(x) = 2x^4 - 2x^3 - 3x^2 - x - 2$

Langkah 2

Faktor lainnya dapat dicari dengan menggunakan cara Horner.

Ambil koefisien pada suku banyak. $f(x) = 2x^4 - 2x^3 - 3x^2 - x - 2$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 2 & -2 & -3 & -1 & -2 \\ & & -2 & 4 & -1 & 2 \\ \hline & 2 & -4 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

f(x) = (x + 1) ($2x^3 - 4x^2 + x - 2$) , cari akar dari

f(x) = $2x^3 - 4x^2 + x - 2$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & -4 & 1 & -2 \\ & & 4 & 0 & 2 \\ \hline & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$f(x) = 2x^4 - 2x^3 - 3x^2 - x - 2$$

$$= (x + 1)(x - 2)(2x^2 + 1)$$

sehingga faktor lainnya adalah $x - 2$ **(a)**

12. Diketahui suku banyak $f(x)$ jika dibagi $(x + 1)$ sisanya 8 dan dibagi $(x - 3)$ sisanya 4. Suku banyak $q(x)$ jika dibagi dengan $(x + 1)$ bersisa –9 dan jika dibagi $(x - 3)$ sisanya 15 . Jika $h(x) = f(x).q(x)$, maka sisa pembagian $h(x)$ oleh $x^2 - 2x - 3$ sisanya adalah ….

Penyelesaian:

Diketahui f(–1) = 8, f(3) = 4, q(–1) = –9, q(3) = 15

$h(x) = f(x).q(x) = P(x).\ H(x) + S(x)$

$h(x) = f(x).q(x) = (x + 1) (x – 3).\ H(x) + ax + b$

substitusi nilai yang diketahui :

$h(–1) = f(–1).q(–1) = (–1 + 1) (–1 – 3).\ H(–1) +$

$a(–1) + b$

$h(–1) = 8 \text{ x } (–9) = 0 \text{ x } (–4) + (–a) + b$

$–a + b = –72 \ldots (1)$

$h(3) = f(3).q(3) = (3 + 1) (3 – 3).\ H(3) + a(3) + b$

$h(3) = 4 \text{ x } 15 = 0 \text{ x } (–4) + 3a + b$

$3a + b = 60 \ldots (2)$

eliminasi persamaan 1 dan 2

$–a + b = –72 \ldots (1)$

$3a + b = 60 \ldots (2)$

--------------- --

$–4a = –132$

$a = 33$

substitusi nilai pada persmaan 1 atau 2

$–a + b = –72 \ldots (1)$

$–33 + b = –72$

$b = –72 + 33$

$b = –39$

Sehingga hasil pembagiannya adalah :

$ax + b = 33x - 39$ **(e)**

13. Diketahui cos $(x - y) = 4/5$ dan $sin\ x . sin\ y = 3/10$. Nilai $tan\ x . tan\ y$ = ...

Penyelesaian:

$$\cos(x - y) = \frac{4}{5}$$

$$\sin x \sin y = \frac{3}{10}$$

$$\tan x \tan y = \cdots ?$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\frac{4}{5} = \cos x \cos y + \frac{3}{10}$$

$$\cos x \cos y = \frac{4}{5} - \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\tan x \tan y = \frac{\sin x}{\cos x} \frac{\sin y}{\cos y}$$

$$= \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}$$

$$= \frac{3/10}{1/2} = \frac{3}{5}$$ **(d)**

14. Bentuk $\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ ekivalen dengan ....

Penyelesaian:

$$\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{2\ \frac{\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{2\ \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{2\ \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$= 2\frac{\sin x}{\cos x}\frac{\cos^2 x}{1}$$

$$= 2\sin x\cos x$$

$$= \sin 2x$$ **(b)**

15. Nilai minimum dari fungsi $w(\alpha) = \frac{1-\tan^2\alpha}{2\sec^2\alpha}$ adalah ...

Penyelesaian:

$$w(\alpha) = \frac{1-\tan^2\alpha}{2\sec^2\alpha}$$

$$= \frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{2}{\cos^2\alpha}}$$

$$= \frac{\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{2}{\cos^2\alpha}}$$

$$= \frac{\cos 2\alpha}{2}$$

Nilai minimum dari fungsi cosinus adalah -1, jadi nilai minimum dari fungsi $w(\alpha)$ adalah

$$w(\alpha)_{\min} = \frac{1}{2}.(-1) = -\frac{1}{2} \qquad (\mathbf{a})$$

16. Turunan pertama fungsi $f(x)=\cos^5(4x-2)$ adalah

Penyelesaian:

$$f'(x) = 5\cos^4(4x-2).(-\sin(4x-2))(4)'(x')$$

$$f'(x) = -10.2\cos^4(4x-2)\sin(4x-2)$$

$$f'(x) = -10.\cos^3(4x-2)(2\cos(4x-2)\sin(4x-2))$$

$$f'(x) = -10\cos^3(4x-2)\sin 2(4x-2)$$

$$f'(x) = -10\cos^3(4x-2)\sin(8x-4) \qquad (\mathbf{b})$$

17. Jika $\frac{1}{2}\log\left(2x^2-x-2\right)=\log\left(x+2\right)$ maka nilai maksimum $f\left(y\right)=-y^2+4xy+5x^2$ adalah ...

Penyelesaian:

$$\frac{1}{2}\log\left(2x^2-x-2\right)=\log\left(x+2\right)$$

$$\left(2x^2-x-2\right)=\left(x+2\right)^2$$

$$2x^2-x-2-x^2-4x-4=0$$

$$x^2-5x-6=0$$

$$\left(x-6\right)\left(x+1\right)=0$$

$x_1=6$ atau $x_2=-1$

Untuk $x=6$

$$f\left(y\right)=-y^2+24y+180$$

$$f_{maks}=\frac{-D}{4a}=\frac{576+720}{4}=324$$

Untuk $x=1$

$$f\left(y\right)=-y^2+4y+5$$

$$f_{\min}=\frac{-D}{4a}=\frac{16+20}{4}=9$$

Jadi nilai maksimumnya adalah 324 $\quad(\mathbf{e})$

18. Diketahui segitiga PQR dengan P(0, 1, 4), Q(2, –3, 2), dan R(–1, 0, 2). Besar sudut PRQ = ….

Penyelesaian:

Diketahui:P(0, 1, 4), Q(2, –3, 2), dan R(–1, 0, 2)

$$\cos\theta = \frac{\overline{PR}.\overline{RQ}}{\left|\overline{PR}\right|.\left|\overline{RQ}\right|}$$

$$= \frac{(-1-0,0-1,2-4).(2-(-1),-3-0,2-2)}{\left(\sqrt{(-1-0)^2+(0-1)^2+(2-4)^2}\right)\left(\sqrt{(2-(-1))^2+(-3-0)^2+(2-2)^2}\right)}$$

$$= \frac{(-1,-1,-2).(3,-3,0)}{(6.18)}$$

$$= \frac{-3+3+0}{(6.18)}$$

= 0

Θ =arc cos 0 = 90° **(b)**

19. Diketahui $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{2}$, $\left|\overline{b}\right| = \sqrt{9}$, $\left|\overline{a}+\overline{b}\right| = \sqrt{5}$. Besar sudut antara vector $\overline{a}$ dan vector $\overline{b}$ adalah ….

Penyelesaian:

$$\left|\left|\overline{a}\right| + \left|\overline{b}\right|\right| = \sqrt{\left|\overline{a}\right|^2 + \left|\overline{b}\right|^2 + 2\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos\theta}$$

$$\left|\sqrt{2}+\sqrt{9}\right| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{9}\right)^2 + 2\left(\sqrt{2}.\sqrt{9}\right)\cos\theta}$$

$$\left|\sqrt{2}+\sqrt{9}\right|^2=\left(\sqrt{11+2\left(3\sqrt{2}\right)\cos\theta}\right)^2$$

$$11+6\sqrt{2}=11+6\sqrt{2}\cos\theta$$

$$\cos\theta=1$$

Θ=arc cos 1

= 0 **(a)**

20. Besar sudut antara $\bar{a}=\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}$ dan $\bar{b}=\begin{pmatrix}2\\3\\-3\end{pmatrix}$ adalah ….

Penyelesaian:

$$\cos\theta=\frac{\bar{a}.\bar{b}}{\left|\bar{a}\right|.\left|\bar{b}\right|}=\frac{\left(3.2+2.3+4.(-3)\right)}{\sqrt{3^2+2^2+4^2}.\sqrt{2^2+3^2+(-3)^2}}$$

$$\cos\theta=\frac{6+6+(-12)}{\sqrt{29}.\sqrt{22}}$$

$$\cos\theta=0$$

θ = 90° **(b)**

21. Jika $\left|\bar{a}\right|=2$, $\left|\bar{b}\right|=3$, dan sudut ($\bar{a},\bar{b}$) = 120°, maka $\left|3\bar{a}+2\bar{b}\right|=....$

Penyelesaian:

Diketahui

$|a| = 2$

$|b| = 3$

$\alpha = 120^o$

$3a = 3\,|a| = 3\times2 = 6$ satuan

$2b = 2\,|b| = 2\times3 = 6$ satuan

perkalian vektor dengan skalar tidak mengubah sudut apit antara a dan b, Jadi

$$|3a + 2b|^2 = |3a|^2 + |2b|^2 + 2\,|3a|\,|2b| \cos 120^o$$
$$= 6^2 + 6^2 + 2\,(6)\,(6)\,(-\tfrac{1}{2})$$
$$=36$$

$|3a + 2b| = \sqrt{36} = 6$ satuan **(b)**

22. Diketahui $\left|\bar{a}\right| = \sqrt{3}$, $\left|\bar{b}\right| = 1$, $\left|\bar{a} - \bar{b}\right| = 1$. Panjang vector $\bar{a} + \bar{b} = \ldots.$

Penyelesaian:

$$|\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2|\bar{a}||\bar{b}| \cos\alpha}$$

$$= \sqrt{2(a^2 + b^2) - \left|\bar{a} - \bar{b}\right|^2}$$

$= \sqrt{2(3+1)-1^2}$

$= \sqrt{7}$ **(c)**

23. Diketahui $|\bar{a}| = \sqrt{6}$, $(\bar{a} - \bar{b})(\bar{a} + \bar{b}) = 0$, dan $\bar{a}$ $(\bar{a} - \bar{b})$=3. Besar sudut antara vector $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ adalah ….

Penyelesaian:

$$(\bar{a} - \bar{b})(\bar{a} + \bar{b}) = 0$$

$$\bar{a} - \bar{b} \cdot \bar{a} + \bar{b} = 0$$

$$|\bar{a}|^2 - |\bar{b}|^2 = 0$$

$$6 - |\bar{b}|^2 = 0$$

$$|\bar{b}|^2 = \sqrt{6}$$

$$\bar{a}(\bar{a} - \bar{b}) = 3$$

$$\bar{a} \cdot \bar{a} - \bar{a}\bar{b}\cos\alpha = 3$$

$$\bar{a}\bar{b}\cos\alpha = \bar{a} \cdot \bar{a} - 3$$

$$\cos\alpha = \frac{\bar{a} \cdot \bar{a} - 3}{\bar{a}\bar{b}}$$

$$\cos\alpha = \frac{6-3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 60^o = \frac{180^o}{3} = \frac{\pi}{3}$$ **(c)**

24. Diketahui segitiga ABC, dengan A(0, 0, 0), B(2, 2, 0) dan C(0, 2, 2). Proyeksi orthogonal $\overline{AB}$ pada $\overline{AC}$ adalah ….

Penyelesaian:

Diketahui:

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \bar{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \bar{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{AB} = \bar{b} - \bar{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \overline{AC} = \bar{c} - \bar{a}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Sehingga proyeksi orthogonal $\overline{AB}$ pada $\overline{AC}$ adalah

$$\bar{d} = \frac{\overline{AB}.\overline{AC}}{|\overline{AC}|^2} \cdot \overline{AC} = \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}{\sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2}^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{4}{8} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot 0\right) \bar{\imath} + \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right) \bar{\jmath} + \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right) \bar{k}$$

$$= \bar{\jmath} + \bar{k}$$ **(a)**

25. Diketaui vector $\bar{a} = 3\bar{i} - 4\bar{j} - 4\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$, dan $\bar{c} = 4\bar{i} - 3\bar{j} + 5\bar{k}$. Panjang proyeksi vector $(\bar{a} + \bar{b})$ pada $\bar{c}$ adalah ….

Penyelesaian:

Diketahui:

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}; \bar{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}; \bar{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{a} + \bar{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Maka Panjang proyeksi vector $(\bar{a} + \bar{b})$ pada $\bar{c}$ adalah:

$$|\bar{d}| = \frac{(\bar{a} + \bar{b}).\bar{c}}{|\bar{c}|} = \frac{\begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}}{\sqrt{4^2 + (-3)^2 + 5^2}}$$

$$= \frac{20+15-5}{5\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \qquad \textbf{(a)}$$

26. Diketahui vektor $\bar{u} = 2\bar{i} - 4\bar{j} - 6\bar{k}$ dan $\bar{v} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + 4\bar{k}$. Proyeksi vector orthogonal $\bar{u}$ pada $\bar{v}$ adalah ….

Penyelesaian:

Diketahui:

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}; \bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Maka Proyeksi vektororthogonal $\bar{u}$ pada $\bar{v}$ adalah

$$\bar{d} = \frac{\bar{u}.\bar{v}}{|\bar{v}|^2} \cdot \bar{v} = \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 4^2}^2} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-12}{24} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} \cdot 2\right) \bar{\imath} + \left(-\frac{1}{2} \cdot -2\right) \bar{\jmath} + \left(-\frac{1}{2} \cdot 4\right) \bar{k}$$

$$= -\bar{\imath} + \bar{\jmath} - 2\bar{k} \qquad (\mathbf{e})$$

27. Jika $\overline{\mathrm{w}}$ adalah vector proyeksi orthogonal dari vector $\overline{\mathrm{v}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ terhadap vector $\overline{\mathrm{u}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, maka $\overline{\mathrm{w}} = \ldots.$

Penyelesaian:

Proyeksi vektor v pada u adalah

$$w = \left(\frac{v.u}{|u|^2} \right) u$$

$$= \left(\frac{2.-1 + -3.2 + 4.-1}{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} \right) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{-2 + -6 + -4}{1 + 4 + 1} \right) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-12}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= -2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(d)}$$

28. Diketahui vektor $\bar{a} = \underset{\cdot}{i} + 2\underset{-}{j} + m\underset{-}{k}$ dan $\bar{b} = 2\underset{\cdot}{i} - 10\underset{-}{j} + 2\underset{-}{k}$. Jika nilai $\bar{a} \,.\, \bar{b} = 0$, maka nilai m = ...

Penyelesaian:

$\bar{a} \,.\, \bar{b} = a_1 \,.\, b_1 + a_2 \,.\, b_2 + a_3 \,.\, b_3 = 0$

$= \quad 1 . 2 + 2 . (-10) + m . 2 = 0$

$2 - 20 + 2m = 0$

$-18 + 2m = 0$

$2m = 18$

$m = 9$ **(b)**

29. Jika sudut antara vektor $\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ dan vektor $\bar{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ adalah α, maka besarnya α = ...

Penyelesaian:

$$\cos \alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2} \times \sqrt{(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{2.(-1) + 1.3 + (-3).(-2)}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-3)^2} \times \sqrt{(-1)^2 + (3)^2 + (-2)^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{-2 + 3 + 6}{\sqrt{4 + 1 + 9} \times \sqrt{1 + 9 + 4}}$$

$$\cos \alpha = \frac{7}{\sqrt{14} \times \sqrt{14}}$$

$$\cos \alpha = \frac{7}{14}$$

$\cos\alpha = \frac{1}{2}$, maka α = 60° karena cos α = $\frac{1}{2}$ **(e)**

30. Diketahui A(1, 2, 3), B(3, 3, 1) dan C (7, 5, 3). Jika A, B, dan C segaris (koliner) perbandingan AB : BC = ….

Penyelesaian:

DiketahuiA(1, 2, 3), B(3, 3, 1) dan C (7, 5, 3)

$$AB : BC = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 3-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 7-3 \\ 5-3 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

= 1 : 2 **(a)**