UM JAKARTA PRESS

Modul **Matematika** Dasar
Berbasis **Case Method**

ISBN 978-623-5523-11-8

9 786235 523118

Program Studi PGSD
FIP Universitas Muhammadiyah Jakarta

AKREDITASI A

Kampus Merdeka
INDONESIA JAYA

TUT WURI HANDAYANI
KEMENTRIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN

Modul **Matematika** Dasar Berbasis **Case Method**

Penyusun :
Nurbaiti Widyasari, M.Pd. - Linda Astriani, M.Pd,
Hastri Rosiyanti, M.PMat, - Rahmita Nurul Muthmainnah, M.Pd. M.Sc

MODUL **MATEMATIKA** DASAR BERBASIS **CASE METHOD**

Disusun oleh:

Nurbaiti Widyasari, M.Pd.
Linda Astriani, M.Pd.
Hastri Rosiyanti, M.Pd. Mat,
Rahmita Nurul Muthmainnah, M.Pd. M.Sc

UM JAKARTA PRESS

Modul Matematika Dasar Berbasis **Case Method**

i - x + 214 hlm

Penulis :
Nurbaiti Widyasari, M.Pd.
Linda Astriani, M.Pd.
Hastri Rosiyanti, M.Pd. Mat,
Rahmita Nurul Muthmainnah, M.Pd. M.Sc

Editor :
Ismah, M.Si

Desain sampul :
Raimond Well

Tata letak :
Agoes.joa

ISBN :
978-623-5523-11-8

Diterbitkan oleh :
UM Jakarta Press
Anggota IKAPI (053/Banten/2021)
University of Muhammadiyah Jakarta Press
Jl. KH. Ahmad Dahlan, Cirendeu, Ciputat
Tangerang Selatan 15419
Telp. : 021-7492862, 7401894
e-mail: umjakarta.press@gmail.com

Cetakan I : Oktober 2021

KATA PENGANTAR

Alhamduillah, puji syukur penulis panjatkan atas rahmat Allah Subhanahu wata'ala, modul Pendidikan Lingkungan Hidup berbasis Case Method telah berhasil penulis selesaikan. Modul ini disusun untuk dapat dipergunakan oleh mahasiswa dalam kegiatan perkuliahan.

Modul ini berisikan informasi penting untuk calon guru, guru dan praktisi pendidikan dalam proses pembelajaran Matematika Dasar yang akan menunjang pengetahuan dan keterampilan guru SD atas mata pelajaran Matematika. Modul ini disajikan dengan sederhana bersama kegiatan-kegiatan yang dapat mengasah kemampuan mahasiswa atau calon guru. Struktur modul ini terbagi menjadi 10 pembahasan yang terkait, yaitu Hakikat Matematika; Himpunan; Logika dan Penalaran; Relasi, Fungsi, dan Persamaan Linier; Persamaan, Fungsi, dan Grafik Fungsi Kuadrat; Pemecahan Masalah Matematika; Permutasi, Kombinasi, dan Peluang; Barisan, Deret, dan Pola Bilanga; Eksponen, Penarikan Akar, dan Logaritma; dan Trigonometri.

Ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset dan Teknologi yang telah memberikan dana hibah Program Kompetisi Kampus Merdeka (PKKM) Tahun 2021. Selain itu penulis juga mengucapkan terima kasih kepada:

1. Rektor Universitas Muhammadiyah Jakarta, Dr. Ma'mun Murod, M.Si. yang telah memberikan motivasi dalam penyusunan modul;
2. Ketua LP3 UMJ, Dr. Herwina Bahar, MA., yang telah memberikan arahan dan bimbingan dalam proses pelaksanaan PKKM prodi PGSD FIP UMJ;
3. Dekan Ilmu Pendidikan, Dr. Iswan, M.Si., yang telah memberikan dukungan dalam penyusunan modul;
4. Rekan sejawat Fakultas Ilmu Pendidikan, yang senantiasa memberikan dukungan, teman berdiskusi selama penyususnan modul ini.

Kesempurnaan hanya milik Allah Subhanahu wata'ala, penulis yakini modul ini masih memiliki kekurangan. Untuk itu kami mohon masukan yang membangun dalam melengkapi modul ini. Semoga modul ini memberikan banyak manfaat bagi mahasiswa PGSD, calon guru, guru dan praktisi pendidikan dalam memberikan pembelajaran Matematika di Sekolah Dasar.

Jakarta, Juli 2021

Tim Penulis

DAFTAR **ISI**

PEMBELAJARAN BERBASIS CASE METHOD (Suatu Pengantar)

Pembelajaran berbasis case method merupakan pembelajaran yang dilaksanakan berbasis pada ***kasus***. Pembelajaran ini merupakan bentuk aktif dari instruksional yang berfokus pada kasus dan melibatkan anda sebagai mahasiswa dalam **learning by doing**. Kasus yang diberikan dalam modul ini adalah berupa cerita nyata atau buatan yang mencakupi "*pesan pendidikan*" atau menceritakan peristiwa, masalah, dilema, masalah teoritis atau konseptual yang membutuhkan analisi dan atau pengambilan keputusan.

Pembelajaran berbasis kasus mensimulasikan dunia nyata dan meminta anda sebagai mahasiswa untuk secara aktif "bergulat" dengan masalah yang kompleks. Pembelajaran ini menggunakan lintas disiplin ilmu. Tujuan dari pembelajaran berbasis kasus, adalah anda sebagai mahasiswa dapat:

1. Melatih penerapan teori ke dalam kehidupan nyata
2. Melatih kemampuan kognitif tingkat tinggi (HOTS)
3. Melatih kemampuan abad 21
4. Mendorong dan melatih kebiasaan belajar aktif dan mandiri

Diharapkan paparan singkat mengenai pembelajaran berbasis kasus ini menjadi panduan mahasiswa untuk memahami tujuan atas modul ini.

BAHAN BELAJAR 1

HAKIKAT MATEMATIKA

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat Materi

Sebelum kita masuk pada materi, maka kita terlebih dahulu berpikir "Apa itu matematika". Banyak para ahli matematika yang telah mendefinisikan apa itu matematika, berbagai pandangan atas matematika. Ada yang mengatakan bahwa matematika adalah ilmu logis, deduktif, aktivitas manusia, berkaitan dengan budaya, dan lain sebagainya. Pandangan-pandangan tersebut benar selama bagaimana kita memandang, merasakan, dan pengalaman yang kita miliki terhadap matematika. Akan tetapi, bagaimana kita memandang matematika, pandangan kita tidak boleh terlepas dari firman Allah SWT yang diturunkan melalui Al-Quran. Banyak ayat-ayat di Al-Quran yang bisa mewakili aplikasi matematika di kehidupan sehari-hari. Salah satunya adalah pada surat Al-Qomar ayat 49

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَهُ بِقَدَرٍ

Artinya : Sesungguhnya, kami menciptakan segala sesuatu menurut ukurannya

Ayat diatas menunjukkan bahwa semua lini kehidupan kita terkait dengan ilmu Allah SWT dalam hal ini adalah matematika. Melalui matematika peradaban di dunia di bangun, dan berkembang dalam rangka mendorong penciptaan pengetahuan yang baru. Oleh sebab itu bahan belajar ini akan membahas hakikat pembelajaran matematika terkait dengan AL-Quran dan kaitan dengan budaya Indonesia.

2. CPMK

Penulis berharap bagi pembaca yang telah mempelajari bahan ajar ini, secara umum diharapkan dapat memahami ruang lingkup hakikat ilmu Matematika dengan ilmu lainnya. Adapun capaian pembelajaran mata kuliah (CPMK) pada bahan belajar ini yaitu mahasiswa mampu memahami mampu memahami ruang lingkup hakikat ilmu Matematika.

3. **Sub CPMK**

   Berdasarkan CPMK yang telah dirancang, selanjutnya berikut merupakan sub – CPMK yang telah dirancang, yaitu:

   a. Mahasiswa mampu memahami ruang lingkup hakikat ilmu Matematika.
   b. Mahasiswa mampu memahami keterkaitan antara matematika dengan Al Quran.
   c. Mahasiswa mampu memhami kaitan matematika dengan kehidupan sehari-hari yang dikaitkan dengan budaya.

4. **Tujuan Pembelajaran**

   Setelah membaca dan mengikuti serangkaian kegiatan pada bagian ini, diharapkan:

   a. Mahasiswa mampu menjelaskan dengan benar pengertian hakikat matematika
   b. Mahasiswa mampu melengkapi dengan tepat peran matematika seperti yang terkandung dalam Al-Qur'an dan Hadist.
   c. Mahasiswa mampu menyimpulkan dengan benar hakikat matematika dalam kehidupan sehari-hari yang dikaitkan dengan budaya lokal.

5. **Petunjuk Penggunaan Modul**

   Bacalah petunjuk penggunaan modul berikut!

   a. Bacalah dan pahami materi yang ada pada bahan belajar ini.
   b. Kerjakan setiap tugas diskusi terhadap materi-materi yang dibahas dalam bahan belajar ini.
   c. Jika belum menguasai level materi yang diharapkan, ulangi lagi pada bahan belajar sebelumnya atau bertanyalah kepada dosen.

B. KEGIATAN BELAJAR

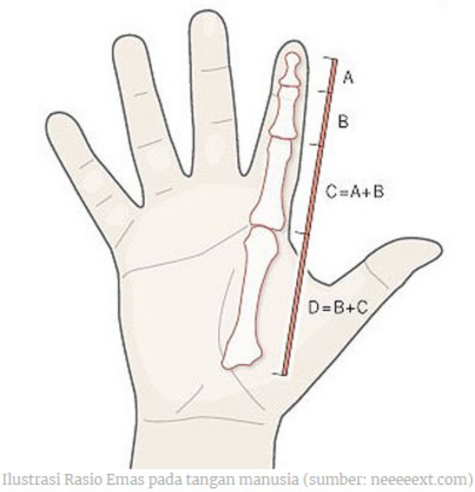
Hakikat Matematika

1. **Matematika Terintegrasi dengan Al-Quran**

   Sepeti yang telah dinyatakan pada deksripsi singkat materi, salah satu ayat yang berkaitan dengan matematika adalah Al-Qamar ayat 49. Pembuktian ayat tersebut yang terdekat adalah tubuh manusia. Dalam tubuh manusia, sebagai contoh jari tangan yaitu adanya ketentuan sesuai pola fibonaci. Fibonaci merupakan bentuk pola bilangan yang ditemukan oleh Matematikawan berkebangsaan Italia yang bernama Leonardo Fibonacci. Oleh sebab itu pola tersebut dinamakan fibonaci, dimana pola tersebut memilikii keistimewaan, yaitu bilangan baru merupakan hasil dari penjumlahan dua bilangan sebelumnya, seperti yang terlihat pada barisan bilangan berikut ini:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, . . . dst

Pada jari tangan manusia terdapat ketentuan ukuran dalam pembuatannya. Coba perhatikan jari tangan kalian setiap tangan memiliki **1** buah jari jempol dimana dalam jari jempol hanya terdapat **2** buah ruas tulang, sedangkan jari-jari yang lain terdapat **3** ruas tulang. Dengan setiap tangan memiliki **5** jari dan total jari yang memiliki tiga ruas jari sebanyak **8.** Jika kalian perhatikan maka akan terbentuk pola 1, 1, 2, 3, 5, 8 pada tangan manusia. Bilangan Fibonacci sendiri pun dapat terlihat aturannya dalam ruas jari kita, seperti pada gabar berikut



Gambar 1.1. Penerapan Fibonacci Pada Ruas Jari Tangan

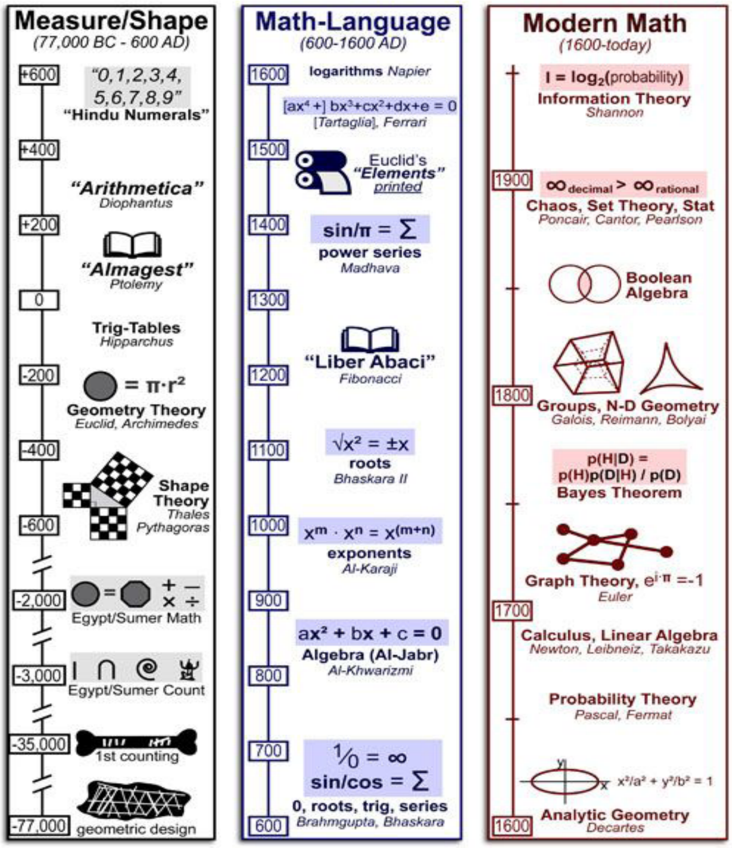
Tentu saja masih banyak bukti kekuasaan Allah SWT yang sudah sesuai dengan ukuran yang telah ditentukan. Selain berkaitan dengan alam sekitar seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, matematika juga merupakan ilmu yang diperuntukkan untuk membantu manusia dalam menyelesaikan permasalahan-permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Lebih lanjut, matematika juga secara tidak langsung membentuk pola pikir kita dalam menyelesaikan permasalahan tersebut. Sebagai contoh, ketika kita dihadapi suatu persoalan maka kita akan melihat dasar persoalan tersebut, kemudian kita menganalisa bagaimana dengan apa yang kita miliki dapat menyelesaikan persoalan tersebut dengan mencoba memilah apa saja yang dibutuhkan, apa saja hambatan, dan lain-lain. Kegunaan-kegunaan tersebutlah yang menjadikan satu alasan mengapa matematika dijadikan sebagai mata pelajaran di sekolah. Lebih lanjut, matematika sangat erat dengan budaya yang erat dengan kehidupan kita sehari-hari, dan melalui pengetahun yang dimiliki, pengalamann, terkiat dengan budaya, mendorong matematika terhadap penciptaan pengetahuan baru.Sebelum kita membahas lebih lanjut, agar kita memahami hakikat matematika maka kita perlu membahas secara Bahasa apa yang dimaksud dengan matematika, yang akan dibahas pada sub topik kegiatan bejara berikut ini.

2. Apa Itu Matematika?

Terdapat banyak perdebatan dari para ahli dalam mendefinisikan istilah matematika, sehingga dapat dikatakan bahwa belum terdapat definisi tunggal dari pengertian matematika. Beberapa pendapat mengatakan bahwa matematika merupakan ratunya ilmu, atau matematika merupakan ilmu deduktif, atau matematika merupakan bahasa simbol, atau matematika merupakan aktivitas manusia, dan masih banyak lagi pendapat mengenai apa itu matematika. Perbedaan-perbedaan tersebut terjadi dikarenakan bagaimana seseorang memandang matematika serta didasarkan dari pengetahuan dan pengalaman orang tersebut terhadap matematika tergantung kapan pertanyaan tersebut diberikan, dimana ketika pertanyaan tersebut diberikan, siapa yang menjawabnya, dan apa sajakah yang dipandang yang termasuk dalam matematika.

Akan tetapi, pernyataan sebelumnya tentu masih dapat mengarahkan pandangan yang muncul hanya melihat dari satu sisi saja. Oleh sebab itu, agar pandangan kita terhadap pengertian matematika cukup luas atau dapat dikatakan dapat melihat dari berbagai sisi, kita haruslah mempelajari, mengkaji, serta memahami matematika itu sendiri. Melalui proses mempelajari, mengkaji, dan memahami kita akan membuka pandangan kita untuk memahami matematika secara utuh. Seperti halnya jika seorang kenalan kita menceritakan pengalamannya menaiki wahana permainan yang cukup memacu adrenalinnya. Tentu perasaan yang dirasakan oleh kenalan kita tidak dapat kita rasakan bila hanya melalui cerita tanpa kita merasakan langsung wahana permainan tersebut. Hal inipun berlaku terhadap pandangan matematika itu sendiri, tanpa merasakan langsung bagaimana matematika itu, maka kita tidak dapat memahami apa yang dimaksud dengan matematika itu sendiri. Dengan merasakan langsung kita juga membuka wawasan kita terhadap pengertian matematika itu sendiri.

Berdasarkan penjelasan sebelumnya, maka dapat ditarik kesimpulan bahwa tidak ada definisi matematika yang tunggal. Semua definisi-definisi mengenai matematika yang diajukan oleh para ahli dapat kita terima. Hal ini dikarenakan matematika dapat ditinjau dari segala sisi atau aspek baik dari yang bersifat sederhana sampai yang bersifat kompleks Salah satu cara agar kita lebih memahami apa itu matematika adalah dengan mempelajari mengenai sejarah matematika dalam kehidupan manusia. Sitorus dalam bukunya menyatakan bahwa penggunaan ilmu matematika dimulai dari bangsa yang bermukim sepanjang aliran sungai, seperti bangsa Mesir yang dialiri oleh sungai Nil, bangsa Babylonia yang dialiri oleh sungai Tigris dan Eufrat, bangsa Hindu yang dialiri oleh sungai Gangga dan Indus, dan bangsa China yang dialiri oleh sungai Huang Ho dan Yang Tze. Penggunaan ilmu matematika tersebut dibutuhkan oleh bangsa-bangsa tersebut dikarenakan, bangsa-bangsa tersebut memerlukan keterampilan dalam mengatasi banjir, membuat irigasi untuk pertanian, ilmu perbintangan, dan lain-lain. Keterampilan-keterampilan tersebut membutuhkan perhitungan matematika dalam mengatasi permasalahan-permasalahan yang mereka hadapi. Dikarenakan kebutuhan perhitungan berkembang, maka ilmu matematikapun berkembang mengikuti kebutuhan umat manusia hingga saat ini. Secara singkat perkembangan matematika dapat dilihat pada gambar berikut ini:



Gambar 1.2 Sejarah Perkembangan Matematika
Sumber: https://id.pinterest.com/pin/471189179744456230/

Berdasarkan gambar 1.2 terlihat bahwa matematika berkembang secara terstuktur, yaitu dimulai dari pengukuran hingga ke dalam matematika modern. Oleh sebab itu, tidaklah heran jika matematika dikatakan sebagai ilmu yang terstruktur. Hal ini dikarenakan, dalam matematika kita mempelajari suatu konsep yang sederhana sampai pada konsep yang kompleks, yaitu dimulainya dari suatu unsur yang tidak didefinisikan, lalu unsur yang didefinisikan, kemudian aksioma atau postulat, dan berakhir pada teorema

Coba kalian ingat kembali ketika pada jenjang pendidikan sebelumnya, kalian pernah mempelajari tentang bangun geometri baik itu dua dimensi maupun tiga dimensi. Ketika kalian mempelajari mengenai bangun geometri pasti kalian pernah mendengar mengenai titik, garis, dan bidang, dimana ketika unsur tersebut tidaklah didefinisikan melainkan hanya diakui keberadaannya. Unsur-unsur yang tidak didefinisikan tetapi diakui keberadaannya merupakan unsur primitif. Kemudian setelah kalian memahami unsur-unsur yang tidak didefinisikan tersebut, kalian mempelajari lebih lanjut tentang bangun-bangun datar seperti persegi, persegi panjang, segitiga, dan lain-lain. Unsur-unsur yang kalian pelajari tersebut merupakan unsur-unsur yang didefinisikan, seperti persegi panjang merupakan jajarangenjang yang memiliki satu sudut siku-siku.

Setelah unsur-unsur baik yang tidak didefinisikan dan yang didefinisikan akan membentuk asumsi-asumsi yaitu yang disebut aksioma atau postulat. Aksioma atau postulat merupakan suatu pernyataan yang tidak perlu dibuktikan kebenarannya secara formal, melainkan cukup dengan pendekatan secara logis. Sebagai contoh: keseluruhan lebih besar daripada bagiannya. Baik unsur yang tidak didefinisikan, unsur yang didefinisikan, dan aksioma atau postulat dapat disusun teorema atau dalil kebenarannya yang dibuktikan secara deduktif. Sebagai contoh: jumlah besarnya sudut segilima adalah 540º, dimana hal ini harus dibuktikan terlebih dahulu. Pembuktian tersebut dikarenakan matematika merupakan ilmu deduktif, dimana dalam matematika tidak menerima generalisasi yang dihasilkan dari proses induktif, tetapi harus dibuktikan terlebih dahulu secara deduktif baru akan diterima secara generalisasi.

Baik unsur yang tidak didefinisikan, unsur didefinisikan, aksioma atau postulat, dan teorema atau dalil merupakan perwujudan matematika merupakan ilmu terstruktur, deduktif, dan bahkan dapat dikatakan sebagai ratunya ilmu. Hal ini dikarenakan, banyak ilmu-ilmu yang berkembang melalui matematika, sehingga dapat dikatakan matematika merupakan ilmu dasar bagi perkembangan ilmu-ilmu lainnya. Oleh karena itu, ilmu matematika diberikan pada jenjang sekolah mulai dari dasar hingga perguruan tinggi, dimana pemberian ilmu matematika di setiap jenjang berbeda disesuaikan kebutuhan dan perkembangan kogitif peserta didik, sehingga akan membantu setipa manusia memandang matematika secara keseluruhan termasuk di dalam nya pandangan matematika terhadap budaya khususnya di Indonesia. Pandangan tersebut diharapkan setiap manusia akan memandang matematika bukan hanya sebuah alat saja tapi bagaimana kita bisa memanusiakan manusia.

3. Matematika dan Budaya

Berbicara matematika dan budaya merupakan dua hal yang sangat erat. Hal ini dikarenakan matematika merupakan ilmu yang memiliki kontribusi atas pembangunan suatu peradaban yang didasarkan pengembangan sistem pengetahuannya sendiri berdasarkan budaya masing-masing. Pentingnya keterkaitan antara matematika dengan budaya memunculkan ilmu yang disebut *ethnomathematics*. Pencetus *ethnomathematics* adalah D'Ambrosio yang berharap *ethnomathematics* menjadi pandangan baru tentang sejarah dan filsafat matematika. Oleh sebab itu, seorang matematikawan harus dapat melihat berbagai macam aspek budaya dalam pemahamannya terhadap fenomena lingkungan dan sosial pada masing-masing budaya yang akan berujung pada bagaimana matematikawan dapat mengembalikan hakikat ilmu matematika yaitu sebagai ilmu yang memanusiakan manusia.

Terdapat 3 komponen dalam kurikulum *ethnomathematics* yang digagas oleh D'Ambrosio yang disebut kurikulum trivium, yaitu yang terdiri dari *literacy, matheracy,* dan *tekhnoracy*. Dalam perspektif matematis, *literacy* dimaknai sebagai integrasi konteks budaya dengan sekolah dan masyarakat, yang memungkinkan peserta didik memperoleh pengetahuannya melalui budaya dan kearifan lokal. *Matheracy* dimaknai sebagai kemampuan peserta didik untuk menafsirkan dan menganalisis tanda atau kode dan penggunaannya dalam kehidupan sehari-hari. Terakhir, adalah *tekhnoracy* yang dimaknai sebagai kemampuan untuk menggunakan dan mengabungkan berbagai sumber teknologi yang dpat membantu mengatasi persoalan kehidupan sehari-hari.

Gambar 1.3. Permainan Engklek

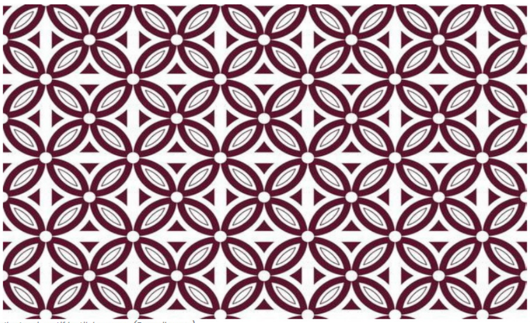
Penerapam *ethnomathematics* sangatlah tepat menjadi suatu pendekatan dalam pembelajaran matematika di Indonesia. Hal ini dikarenakan Indonesia memiliki berbagai macam budaya yang berkaitan dengan matematika, sebagai contoh permainan engklek yang berkaitan dengan bangun datar segi empat (persegi dan persegi panjang) serta lingkaran (setengah lingkaran)

Selain permainan engklek, matematika juga bisa dikaitkan dengan permainan congklak, yang dapat dikaitkan dengan hari, yaitu dalam satu minggu ada 7 hari yang direpresentasikan dalam bentuk lubang kecil masing-masing pemain yang berjumlah 7

Permainan Congklak. indonesia.go.id

Gambar 1.4. Permainan Congklak

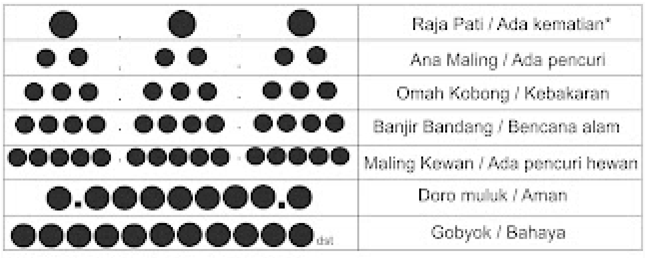
Atau pada batik kawung yang dapat dikaitkan pada koordinat cartesius, atau pengubinan, bangun datar, dan lain sebagainya.



Ilustrasi motif batik kawung. (Freepik.com)

Gambar 1.4. Motif Batik Kawung

Kaitan matematika dengan budaya tidak hanya terbatas pada bentuknya tetapi terkait juga dalam bilangan, seperti kode kentongan



Gambar 1.5. Kode Kentongan

Jika kita lihat maka kode kentongan menyerupai pola segitiga pascal.

Tentu masih banyak bukti budaya dan kearifan local di sekitar kita yang berkaitan dengan matematika. Oleh sebab itu sangatlah penting untuk memperkaya pengetahuan terkait budaya yang dapat direfleksikan dalam kehidupan sehari-hari yang akan membantu peserta didik memahami nilai-nilai moral yang terkandung dalam budaya yang dapat dipelajarinya yang berkaitan dengan kehidupa sehari-hari.

C. PENUTUP

1. Rangkuman

Matematika merupakan salah satu ilmu Allah SWT yang diturunkan untuk umat manusia. Banyak ayat Al-Quran yang sangat berkaitan dengan ilmu matematika. Secara keilmuan dapat dikatakan matematika adalah ilmu yang berkaitan dengan alam sekitar. Hal ini dikarenakan sudah banyaknya pembuktian para ahli yang mengungkapkan bahwa hampir seluruh di alam semesta ini berkaitan dengan matematika. Oleh sebab itu banyak yang mengatakan bahwa matematika merupakan ratunya ilmu, dimana matematika merupakan ilmu dasar bagi perkembangan ilmu-ilmu lainnya. Selain matematika merupakan ratunya ilmu, matematika merupakan ilmu deduktif. Hal ini dikarenakan dalam pembuktiannya harus dibuktikan secara deduktif. Lebih lanjut, matematika merupakan ilmu yang terstruktur, yaitu dari konsep sederhana hingga kompleks yang saling berkaitan dan terstruktur. Matematika pun sangat erat dengan budaya. Hal ini dikarenakan peradaban dibangun dari sutau budaya dan pandangan sesorang sangat erta dengan budaya individu setempat. Akan tetapi definisi matematika tergantung pengetahuan dan pengalaman masing-masing individu yang merasakannya.

2. Tes Formatif

Agar kalian lebih menguasai materi pada kegiatan belajar ini, kerjakan soal-soal di bawah ini dengan benar!

1. Selain berkaitan dengan alam sekitar, matematika juga secara tidak langsung membentuk . . . manusia
2. Terdapat beberapa definisi dari matematika yang diungkapkan oleh para ahli, definisi matematika yang terkait dengan kehidupan manusia adalah definisi yang disampaikan oleh Freudenthal, yaitu......
3. Analisalah apa yang dimaksud matematika sebagai ratunya ilmu!
4. Sejarah mencatat bahwa bangsa-bangsa yang bermukim di......, merupakan bangsa-bangsa yang menggunakan ilmu matematika pada awalnya
5. Jelaskan dengan Bahasa anda apa yang dimaksud dengan *matheracy*?

6. Tiga hal yang tidak dapat didefinisikan dalam matematika adalah . . .
7. Jelaskan bagaimana peran Al-Quran dalam matematika?
8. Dari dua titik dapat dibuat menjadi sebuah garis lurus. Pernyatan tersebut termasuk ke dalam . . .
9. Istilah matematika yang masih harus dibuktikan secara deduktif adalah...
10. Tentukan ayat Al-Quran yang dapat dikaitkan dengan topik fungsi serta berikan alasan atas pemilihan ayat tersebut!
11. Analisalah selain konsep pengubinan, topik matematika yang dapat dikaitkan dengan motif batik kawung adalah . . .
12. Analisalah dari aspek *litheracy* pada kurikulum ethnomathematica jika dikaitkan dengan sebuah candi!
13. Analisalah dari aspek *matheracy* pada kurikulum ethnomathematica jika dikaitkan dengan sebuah candi!
14. Analisalah dari aspek *tekhnoracy* pada kurikulum ethnomathematica jika dikaitkan dengan sebuah candi!
15. Tentukan salah satu kata bahas daerah yang dapat dikaitkan dengan ethnomathematica, serta berikan alasan mengapa kata tersebut yang dipilih!

3. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Cocokkan jawaban anda dengan kunci jawaban tes formatif pada bahan belajar ini yang terdapat pada bagian akhir buku ajar ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan anda terhadap materi pada bahan belajar ini.

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{Jumlah\ jawaban\ yang\ benar}{Jumlah\ Soal} \times 100\%$$

Dengan arti tingkat penguasaan :

90 - 100% = Baik Sekali

80 - 89% = Baik

70 - 79% = Cukup

< 70% = Kurang

Apabila anda telah mencapai tingkat penguasaan sebesar kegiatan belajar selanjutnya. Akan tetapi bila hasil anda di bawah 80% maka anda harus mengulangi kembali materi pada bahan belajar ini, khususnya bagian yang belum ada pahami dan kuasai.

SELF EVALUATION

Selanjutnya mohon menjawab dengan jujur dan bertanggung jawab dengan memberikan tanda “✓” pada jawaban “Ya” atau ”Tidak”

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1	Saya mampu memahami dengan benar ruang lingkup hakikat ilmu matematika		
2	Saya mampu memahami dengan tepat keterkaitan antara matematika dengan Al Quran		
3	Saya mampu memhami dengan benar kaitan matematika dengan kehidupan sehari-hari yang dikaitkan dengan budaya		

Setelah anda melakukan “**self evaluation**” dengan jujur dan bertanggung jawab, mohon melakukan pengulangan pembelajaran secara mandiri pada bagian yang anda jawab “tidak”, anda dapat berdiskusi dengan rekan anda dan meminta bantuan dosen untuk lebih memahami. Akan tetapi, anda dapat melanjutkan ke pembelajaran selanjutnya untuk bagian jawaban “ya”

GLOSARIUM

Aksioma atau postulat : suatu pernyataan yang tidak perlu dibuktikan kebenarannya secara formal, melainkan cukup dengan pendekatan secara logis

Teorema atau dalil : suatu pernyataan yang kebenarannya dibuktikan secara deduktif

Ethnomathemtics : studi interaksi antara matematika dengan pengetahuan budaya yang muncul dari suatu anggota kelompok budaya

BAHAN BELAJAR 2

HIMPUNAN

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat Materi

Mata kuliah ini dimaksudkan agar mahasiswa memiliki penguasan konsep-konsep dasar matematika yang akan digunakan dalam konsep-konsep matematika lanjutan. Materi perkuliahan ini meliputi: pengertian himpunan, keanggotaan himpunan, diagram himpunan, jenis-jenis himpunan, relasi antar himpunan, serta operasi pada himpunan.

Di dalam Al-Quran secara tersirat memerintahkan umat Islam untuk mempelajari matematika, termasuk di dalamnya adalah mempelajari materi himpunan. Materi himpunan, relasi himpunan, dan operasi himpunan termaktub alam Al-Qur'an, meskipun tidak secara eksplisit. Beberapa contoh surat dan ayat Al-Qur'an yang membahas himpunan antara lain terdapat dalam Surat An-Nuur ayat 45 yang berbunyi

وَٱللَّهُ خَلَقَ كُلَّ دَآبَّةٍ مِّن مَّآءٍ ۖ فَمِنْهُم مَّن يَمْشِى عَلَىٰ بَطْنِهِۦ وَمِنْهُم مَّن يَمْشِى عَلَىٰ رِجْلَيْنِ وَمِنْهُم مَّن يَمْشِى عَلَىٰٓ أَرْبَعٍ ۚ يَخْلُقُ ٱللَّهُ مَا يَشَآءُ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَىْءٍ قَدِيرٌ

Artinya:

"Dan Allah telah menciptakan semua jenis hewan dari air, maka sebagian dari hewan itu ada yang berjalan di atas perutnya dan sebagian berjalan dengan dua kaki sedang sebagian (yang lain) berjalan dengan empat kaki. Allah menciptakan apa yang dikehendaki-Nya, sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu"

Dalam Surat An-Nuur ayat 45 tersebut menjelaskan sekelompok, segolongan, atau sekumpulan makhluk yang disebut hewan. Dalam kelompok hewan tersebut ada kelompok yang berjalan tanpa kaki, dengan dua kaki, empat, atau bahkan lebih sesuai dengan yang dikehendaki Allah.

Apabila ayat diatas dikaitkan dengan himpunan, dapat dituliskan sebagai berikut:

- *Pertama*, Himpunan hewan yang berjalan diatas perut. Anggotanya: ular, cacing, siput, dan lain-lain.
- *Kedua*, Himpunan hewan yang berjalan dengan dua kaki. Anggotanya: ayam, itik, angsa, burung, dan lain-lain.
- *Ketiga*, Himpunan hewan yang berjalan dengan empat kaki. Anggotanya: kambing, sapi, kuda, kerbau, rusa, gajah, dan lain-lain.

Berdasarkan ayat tersebut di atas, terdapat konsep matematika yang terkandung di dalamnya yaitu kumpulan objek-objek yang mempunyai ciri-ciri yang sangat jelas. Inilah yang dalam matematika disebut dengan himpunan.

2. CPMK

Penulis berharap bagi pembaca yang telah mempelajari bahan belajar ini, secara umum diharapkan mahasisswa mampu memahami konsep himpunan dan pengaplikasiannya dalam kehidupan sehari-hari yang merupakan CPMK pada bahan belajar 2 ini.

3. Sub CPMK

Berdasarkan CPMK yang telah dirancang, selanjutnya berikut merupakan sub – CPMK yang telah dirancang, yaitu mahasiswa mampu:

a. Memahami konsep dasar materi himpunan
b. Memahami jenis, relasi dan operasi pada himpunan
c. Menerapkan konsep himpunan dalam dalam menyelesaikan masalah sehari-hari

4. Tujuan Pembelajaran

Setelah membaca dan mengikuti serangkaian kegiatan pada bagian ini, diharapkan:

a. Mahasiswa mampu menjelaskan konsep dasar materi himpunan
b. Mahasiswa mampu menjelaskan jenis, relasi dan operasi pada himpunan
c. Mahasiswa mampu menyelesaikan masalah sehari-hari terkait himpunan

5. Petunjuk Penggunaan Modul

Bacalah petunjuk penggunaan modul berikut!

a. Bacalah dan pahami materi yang ada pada bahan ajar ini
b. Kerjakan setiap tugas diskusi yang dibahas dalam bahan ajar ini
c. Jika belum menguasai level materi yang diharapkan, ulangi lagi pada bahan belajar sebelumnya atau bertanyalah kepada dosen.

B. MATERI

1. Definisi Himpunan

Secara umum **himpunan** dapat diartikan sebagai kumpulan objek yang dapat didefinisikan dengan jelas atau dapat dibeda-bedakan. Jadi himpunan adalah sebuah koleksi dari objek-objek yang terdefinisi dengan baik (*well defined*). Terdefinisi dengan baik artinya bahwa untuk sebarang objek yang diberikan maka kita selalu dapat menentukan apakah objek tersebut termasuk dalam sebuah himpunan tertentu atau tidak. Selanjutnya objek-objek yang termasuk ke dalam sebuah himpunan disebut sebagai **elemen** atau **unsur** atau **anggota** dari himpunan tersebut.

Contoh 2.1:
(1) Himpunan Negara-negara ASEAN
(2) Himpunan mahasiswa PGSD FIP UMJ
(3) Himpunan buku tebal
(4) Himpunan pensil mahal

Berdasarkan contoh di atas yang merupakan himpunan adalah poin nomor (1) dan (2), karena himpunan tersebut objeknya terdefinisi dengan jelas. Misal pada contoh (1) dapat dipastikan anggota himpunannya merupakan negara-negara yang tergabung dalam Perhimpunan Negara-negara Asia Tenggara yaitu: Indonesia, Malaysia, Singapura, Thailand, Filipina, Brunei Darussalam, Vietnam, Laos, Myanmar, dan Kamboja; selain negara-negara tersebut maka bukan termasuk anggota himpunan (1). Sama halnya dengan contoh (2), yang termasuk sebagai anggota himpunan yaitu nama-nama yang terdaftar sebagai mahasiswa di Prodi PGSD FIP UMJ, selain itu bukanlah anggota himpunan (2).

Berbeda dengan contoh (1) dan (2), pada contoh (3) dan (4) bukanlah suatu himpunan dikarenakan objeknya tidak terdefinisi dengan jelas. Masing-masing orang tentunya berbeda dalam mendefinisikan buku yang tebal dan pinsil yang mahal sehingga keanggotaan himpunannya masih belum jelas. Agar keanggotaan himpunan jelas, kita perlu mendefinisikan kriteria buku tebal dan pinsil mahal tersebut, misal Himpunan buku dengan ketebalan lebih dari 100 halaman atau pinsil dengan harga di atas 50.000,- dengan begitu dapat dikategorikan sebagai himpunan.

2. Keanggotaan Himpunan

Pada umumnya, notasi himpunan dilambangkan dengan huruf kapital, seperti *A, B, C,* sedangkan untuk anggota / unsur / elemen dilambangkan dengan huruf kecil, seperti *a, b, c*. Penulisan anggota / unsur / elemen dari suatu himpunan, menggunakan simbol ∈ (dibaca: elemen atau anggota dari) sebaliknya jika ingin menyatakan bukan anggota / unsur / elemen dari suatu himpunan menggunakan simbol ∉ (dibaca: bukan elemen atau bukan anggota dari). Misal $a \in A$ berarti *a* adalah anggota dari himpunan *A* dan $c \notin b$ berarti *c* bukan anggota dari himpunan *B*.

Contoh 2.2:

(1) Himpunan ***A={a,b,c,d,e,f}***. Perhatikan pada himpunan ***A*** tersebut, diperoleh bahwa $\boldsymbol{a \in A}$, yang artinya ***a*** anggota dari himpunan ***A***, sedangkan $\boldsymbol{g \notin A}$ yang artinya ***g*** bukan anggota dari ***A***.

(2) Misalkan ***B*** merupakan himpunan bilangan prima, maka $\boldsymbol{2 \in B}$ tetapi 9 $\notin$ ***B***.

(3) Misalkan ***C*** adalah himpunan nama bulan yang diawali dengan huruf ***J***, maka Juli merupakan anggota dari himpunan ***C***, sedangkan April bukan anggota dari himpunan ***C***.

Himpunan dapat juga beranggotakan suatu himpunan. Himpunan yang demikian disebut sebagai keluarga/koleksi dari himpunan-himpunan. Misal himpunan mahasiswa PGSD Se-Jakarta. Himpunan ini merupakan himpunan yang anggota – anggotanya merupakan himpunan mahasiswa PGSD yang mewakili masing – masing kampus di daerah Jakarta.

Anggota – anggota dari suatu himpunan biasa dituliskan di antara kurung kurawal buka (⬚) dan kurung kurawal tutup (⬚) dan setiap dua anggota dipisahkan dengan tanda koma. Banyaknya / jumlah anggota dari suatu himpunan disebut dengan **kardinalitas** dan dinotasikan dengan *n(A)* atau (|A|.

Contoh 2.3:

$A = \{1,3,5,7,9\}$

$n(A) = 5$

$B = \{a,\{b\},c,\{d\}\}$

$n(B)=4$

$C = \{e,\{f\},\{\{g\}\}\}$

$n(C)=3$

D = {1,{1,2},{{1,2,3}}}
n(D)=3

Dalam menyatakan suatu himpunan dapat dilakukan dengan 3 cara, yaitu:

a. Cara Mendaftar

Cara daftar adalah menyatakan himpunan dengan cara mendaftar atau menuliskan semua anggota – anggota himpunan tersebut di antara kurung kurawal buka ({) dan kurung kurawal tutup (}) dan setiap dua anggota dipisahkan dengan tanda koma.

Contoh 2.4:
A = {2,4,6,8}
B = {1,3,5,7}
C = {2,5,7,11}

b. Notasi Pembentuk Himpunan

Notasi pembentuk himpunan merupakan cara menyatakan himpunan dengan menuliskan suatu variabel (peubah) dan syarat mengenai anggota himpunan serta tanda garis tegak di antara peubah dan syarat keanggotaannya, anggota – anggota himpunan tersebut ditulis di antara kurung kurawal buka ({) dan kurung kurawal tutup (}).

Contoh 2.5:
A={ x | x <10, $x \in$ bilangan genap
B={ x | $x \le 7$, $x \in$ bilangan ganjil
C={ x| $x \le 12$, $x \in$ bilangan prima

c. Menyatakan Sifat yang dimiliki Anggotanya

Cara penulisan himpunan yang ketiga yaitu dengan mendefinisikan sifat-sifat yang dimiliki oleh anggota himpunan tersebut.

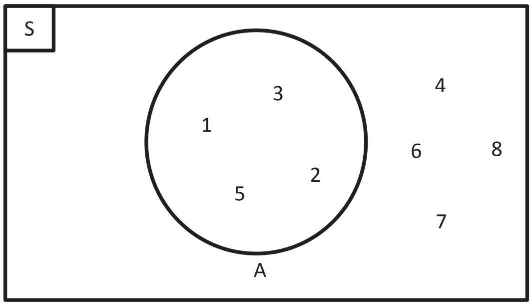
Contoh 2.6:
A = himpunan bilangan genap kurang dari 10
B = himpunan bilangan ganjil kurang dari sama dengan 7
C = himpunan bilangan prima kurang dari sama dengan 12

3. Diagram Venn

Diagram Venn merupakan salah satu bentuk penyajian himpunan secara grafis. Himpunan semesta (S) digambarkan sebagai suatu segi empat, sedangkan himpunan lainnya digambarkan sebagai lingkaran di dalam segi empat tersebut.

Himpunan semesta merupakan himpunan dari semua anggota yang sedang dibicarakan. Himpunan semesta biasanya diberi lambang *S* atau *U* mengandung semua anggota himpunan yang dibicarakan. Misalkan himpunan *S* disebut himpunan semesta dari himpunan *A* jika setiap anggota yang ada di *A* terdapat dalam *S*.

Contoh 2.7:
S = {1, 2, 3, ..., 7, 8} ; A = {1, 2, 3, 5}



4. Jenis-Jenis Himpunan

a. Himpunan Kosong (*null / empty set*)

Himpunan kosong merupakan himpunan yang tidak mempunyai anggota. Himpunan kosong dilambangkan dengan Ø atau { } .

Contoh 2.8:
(1) Himpunan bilangan asli kurang dari 0
(2) Himpunan nama – nama bulan yang diawali dengan huruf *X*
(3) $F = \{ x \mid 3x < -9, x \in$ bilangan asli$\}$

b. Himpunan Berhingga (*finit*)

Himpunan berhingga adalah suatu himpunan yang banyak anggotanya berhingga.

Contoh 2.9:
(1) *P* = {Jakarta, Bandung, Semarang, Serang, Surabaya}
(2) Himpunan bilangan prima yang kurang dari 50
(3) $F = \{ x \mid 3x < 9, x \in$ bilangan asli$\}$

c. Himpunan Tak Berhingga (*infinit*)

Himpunan tak berhingga adalah suatu himpunan yang banyak anggotanya tak berhingga.

Contoh 2.10:
(1) $Q = \{2,3,4,5,6,\ldots\}$
(2) $H = \{ x \mid 3x < 9, x \in$ bilangan riil$\}$
(3) Himpunan bilangan bulat genap

d. Himpunan Terbatas (*bounded*)

Himpunan terbatas adalah suatu himpunan yang anggotanya terbatas atau himpunan tersebut memiliki batas atas dan batas bawah.

Contoh 2.11:

(1) Himpunan bilangan prima yang kurang dari 50

(2) $F = \{ x \mid 3x < 9, x \in$ bilangan asli$\}$

(3) $G = \{ x \mid 5 \leq x < 10,\ x \in \textit{bil. real}\}$

e. Himpunan Tak Terbatas (*unbounded*)

Himpunan tak terbatas adalah suatu himpunan yang anggotanya tidak ada batasnya atau himpunan tersebut memiliki batas atas dan/atau batas bawah.

Contoh 2.12:

(1) $Q = \{2,3,4,5,6,...\}$

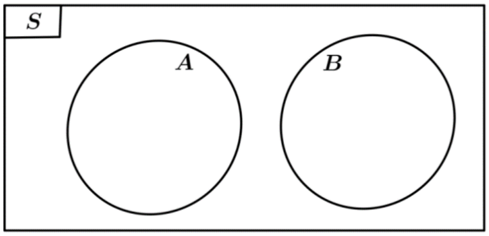
(2) Himpunan bilangan bulat

(3) $R = \left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots\right\}$

5. Relasi Antar Himpunan

a. Himpunan Saling Lepas (*Disjoint*)

Dua himpunan yang tidak kosong *A* dan *B* dikatakan saling lepas/asing jika dua himpunan tersebut tidak mempunyai anggota persekutuan, atau setiap anggota himpunan *A* bukan anggota himpunan *B* dan setiap anggota himpunan *B* bukan anggota himpunan *A*. Atau dapat ditulis sebagai $A||B$ (dibaca *A* lepas *B*.



Gambar 2.1 Himpunan Saling Lepas

Contoh 2.13:

Misalkan:

Himpunan $A = \{ x \mid 2x, x$ bilangan asli$\}$

Himpunan $B = \{ x \mid x$ bilangan ganjil$\}$

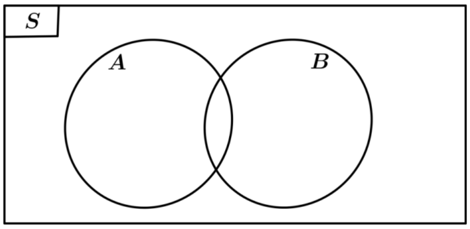
Himpunan $C = \{-3,-4,-5,-6\}$

Himpunan $D = \left\{\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7}\right\}$

Maka *A//B, A//C, A//D, B//C, B//D*, dan *C//D*

b. Himpunan Saling Berpotongan

Dua himpunan yang tidak kosong *A* dan *B* dikatakan saling berpotongan jika dua himpunan itu mempunyai anggota persekutuan jika ada anggota himpunan A yang juga merupakan anggota himpunan B (atau sebaliknya).



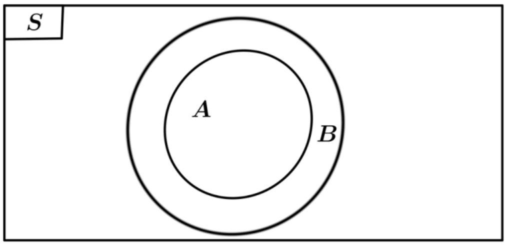
Gambar 2.2. Himpunan Saling Berpotongan

Contoh 2.14:
Misalkan:
Himpunan A = { 1, 3, 5, 7, 9, 11}
Himpunan B = {2, 4, 5, 6, 8}
Karena terdapat anggota persekutuan antara himpunan *A* dan himpunan *B*, yaitu angka 5 maka himpunan A dan B dikatakan saling berpotongan.

c. Himpunan Bagian (*Subset*)

Himpunan bagian terbagi dalam dua jenis, yaitu himpunan bagian dan himpunan bagian sejati. Himpunan *A* adalah himpunan bagian dari himpunan *B* jika dan hanya jika setiap anggota himpunan *A* merupakan anggota himpunan dari *B*. Himpunan bagian disimbolkan dengan (⊆). Jika $A \subseteq B$ maka dibaca himpunan A merupakan himpunan bagian dari himpunan B.

Sedangkan himpunan bagian sejati adalah himpunan jika setiap anggota himpunan *A* merupakan anggota himpunan dari *B* dan terdapat anggota himpunan *B* yang bukan merupakan anggota himpunan *A*. Atau dapat ditulis sebagai $A \subset B$, dibaca himpunan A merupakan himpunan bagian sejati dari himpunan B.



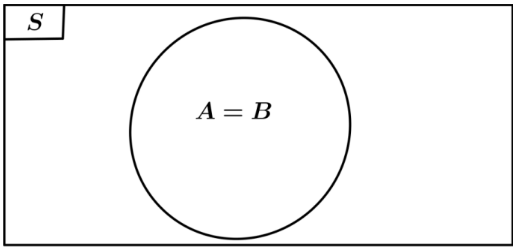
Gambar 2.3 Himpunan Bagian Sejati dari Himpunan

Contoh 2.15:
A = {2, 3, 5, 7, 11}
B = {3, 5, 7, 9, 11, 13, 15}
C = {3, 5}
D = Himpunan bilangan prima kurang dari 12
E = Himpunan bilangan ganjil di antara 1 dan 16
F = { }

Berdasarkan contoh di atas diperoleh: (1) $\boldsymbol{C \subset A}$, karena setiap anggota himpunan C merupakan anggota A dan terdapat anggota di A yang bukan merupakan anggota di C; (2) $\boldsymbol{C \subset B}$ karena setiap anggota himpunan C merupakan anggota B dan terdapat anggota di B yang bukan merupakan anggota di C; (3) $\boldsymbol{A \subseteq D}$ karena setiap anggota himpunan A merupakan anggota himpunan D; (4) $\boldsymbol{B \subseteq E}$, karena setiap anggota B merupakan anggota himpunan E. Perhatikan bahwa himpunan kosong { } merupakan himpunan bagian dari setiap himpunan.

d. Himpunan yang Sama

Himpunan A dikatakan sama dengan himpunan B, jika dan hanya jika setiap anggota himpunan A merupakan anggota himpunan B dan setiap anggota himpunan B juga merupakan anggota himpunan A. Atau dapat ditulis sebagai $A = B \leftrightarrow A \subseteq B \text{ dan } B \subseteq A$.



Gambar 2.4 Himpunan yang Sama (A = B)

Contoh 2.16:
A = {1, 3, 5, 7, 9, 11}
$B = \{ x \mid 0 < x < 12, x \text{ bilangan ganjil}\}$

Jika himpunan B ditulis dengan cara daftar maka B dapat ditulis sebagai B = {1, 3, 5, 7, 9, 11}. Terlihat bahwa setiap anggota himpunan A merupakan anggota himpunan B, sehingga dapat ditulis sebagai $A = B$.

Prinsip dalam Kesamaan Himpunan

- Urutan elemen dalam himpunan tidak penting
- Pengulangan elemen tidak mempengaruhi kesamaan dua buah

himpunan

- Untuk tiga buah himpunan A, B, dan C berlaku aksioma berikut:
  A = A; B = B; dan C = C
  Jika A = B maka B = A
  Jika A = B dan B = C, maka A = C

  Contoh 2.17:

- Jika A = {0, 1} dan B = { x| x (x - 1) = 0, x ∈ ℝ}
  maka A = B
- Jika A = {2, 4, 6, 2} dan B = {6, 4, 2}
  maka A = B
- Jika A = {c, e, h, e} dan B = {c, h}
  maka A ≠ B

e. Himpunan yang Ekuivalen

Dua himpunan berhingga *A* dan *B* dimana n(*A*)=n(*B*) atau banyaknya anggota himpunan *A* sama dengan banyaknya anggota himpunan *B*, maka dikatakan bahwa himpunan *A* ekuivalen dengan himpunan *B*. Atau dapat ditulis sebagai *A* ≅ *B*. Sedangkan jika himpunan *A* tidak ekuivalen dengan himpunan *B* maka dapat ditulis sebagai *A* ≇ *B*.

Contoh 2.18:
A = {1, 3, 11}
n(*A*) = 3
B = {4, 5, 6}
n(*B*) = 3
C = {0, 2, 3, 4}
n(*C*) = 4
Maka A ≅ B, A ≇ C dan B ≇ C

f. Himpunan Kuasa

Himpunan kuasa dari suatu himpunan A adalah himpunan yang anggotanya adalah semua himpunan bagian dari A. Dinotasikan dengan P(A). Untuk menghitung banyaknya anggota dari himpunan kuasa dapat digunakan rumus:

$$|P(A)|=2^{|A|}$$

Contoh 2.19:
A = {a, b, c}
$|P(A)| = 2^{|A|} = 2^3 = 8$
P(A) = {{a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}, Ø}

6. **Operasi pada Himpunan**

a. **Komplemen**

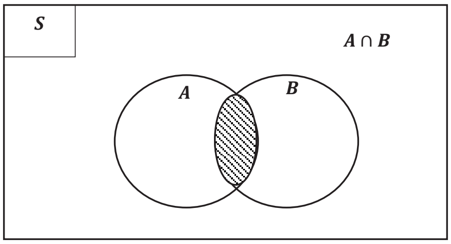
Komplemen dari suatu himpunan A terhadap suatu himpunan semesta S adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan elemen S yang bukan elemen A, dinotasikan dengan A^c atau A'.

<u>Contoh 2.20:</u>

Misalkan himpunan $S = \{ x \mid 0 \leq x \leq 12, x$ "bilangan asli" }. Jika himpunan $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ maka himpunan $A^c = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

b. **Irisan (*Intersection*)**

Irisan dua himpunan *A* dan *B* adalah himpunan yang terdiri dari semua unsur yang merupakan anggota dari himpunan *A* dan sekaligus juga merupakan anggota dari *B*. Irisan dua himpunan *A* dan *B* dapat ditulis sebagai $A \cap B = \{ x | x \in A$ dan $x \in B\}$. Diagram Venn $A \cap B$ dapat dilihat sebagai berikut.



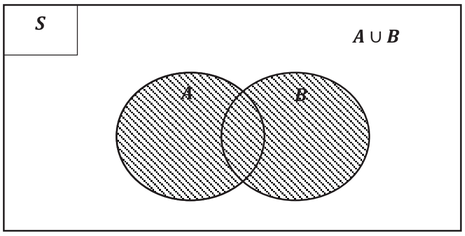
Gambar 2.5.Operasi Irisan

Contoh 2.21:

Misalkan $A = \{a, b\}$ dan $B = \{b, d, e, f\}$ maka $A \cap B = \{b\}$

c. **Gabungan (*Union*)**

Gabungan dua himpunan *A* dan *B* adalah himpunan dari setiap anggota himpunan *A* atau himpunan *B*. Gabungan dua himpunan *A* dan *B* dapat ditulis sebagai $A \cup B = \{ x | x \in A$ atau $x \in B\}$. Diagram Venn $A \cup B$ dapat dilihat sebagai berikut.



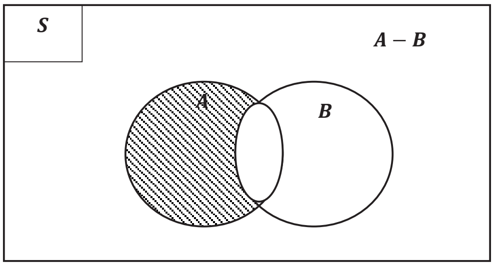
Gambar 2.6. Operasi Gabungan

Contoh 2.22:

Misalkan $A = \{a, b\}$ dan $B = \{b, d, e, f\}$ maka $A \cup B = \{a, b, d, e, f\}$.

d. Selisih

Selisih dua himpunan A dan B adalah himpunan yang terdiri dari semua anggota himpunan A tetapi bukan anggota di himpunan B. Atau dapat ditulis sebagai $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B\}$. Diagram Venn $A - B$ dapat dilihat sebagai berikut:

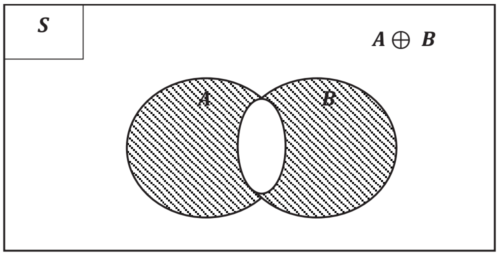


Gambar 2.7 Operasi Selisih

Contoh 2.23:
Misalkan $A = \{a, b\}$ dan $B = \{b, d, e, f\}$ maka $A - B = \{a\}$
$B - A = \{d, e, f\}$

e. Beda setangkup (*symmetric difference*)

Beda setangkup dua himpunan A dan B adalah himpunan yang anggotanya merupakan anggota dari himpunan A atau himpunan B, tetapi bukan merupakan anggota dari irisan himpunan A dan B. Atau dapat ditulis sebagai $A \oplus B = \{ x \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin (A \cap B)) \}$. Diagram Venn A $\oplus$ B dapat dilihat sebagai berikut.



Gambar 2.8 Operasi Beda Setangkup

Contoh 2.24:
Misalkan $A = \{a, b\}$ dan $B = \{b, d, e, f\}$ maka $A \oplus B = \{a, d, e, f\}$.

f. Perkalian Kartesian (*Cartesian products*)

Misalkan A dan B adalah dua himpunan yang tidak kosong, maka Produk Kartesius himpunan A dan himpunan B adalah himpunan semua pasangan terurut (x, y) dengan $x \in A$ dan $y \in B$. Produk Kartesius dari A dan B dapat ditulis sebagai $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ dan } y \in B\}$.

Contoh 2.25:
Misalkan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{1, 2\}$ maka:
$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$
$B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$
Perhatikan untuk $A \times B \neq B \times A$

7. Permasalahan Matematika Materi Himpunan

Dalam menyelesaikan permasalahan himpunan pada kasus realitas maka perlu dipahami bagaimana mengkonversi kalimat sehari – hari ke dalam bentuk notasi himpunan dan menentukan jumlah anggota dari suatu himpunan yang ada.

a. Konversi Kalimat ke dalam Notasi Himpunan

Dalam mengkonversi kalimat (bentuk himpunan) ke dalam bentuk notasi himpunan, maka perlu memahami penghubung – penghubung kalimat agar dapat dikonversi dengan operator – operator himpunan yang tepat.

Contoh 2.26:
Mahasiswa matematika dasar mendapat nilai ***A*** jika kedua nilai UTS dan UAS minimal 80, nilai ***B*** hanya jika salah satu nilai minimal 80, dan nilai ***C*** jika kedua nilai UTS dan UAS di bawah 80. Notasikan himpunan yang memuat mahasiswa yang mendapatkan nilai ***A***, himpunan mahasiswa yang mendapat nilai ***B*** dan himpunan mahasiswa yang mendapatkan nilai ***C*** berdasarkan pengelompokan nilai UTS. Permasalahan di atas dapat diselesaikan sebagai berikut.

Misalkan:
S = himpunan mahasiswa matematika dasar
H = himpunan mahasiswa matematika dasar dengan nilai UTS minimal 80
F = himpunan mahasiswa matematika dasar dengan nilai UAS minimal 80

Sehingga diperoleh:
mahasiswa yang mendapat nilai ***A*** yaitu $\boldsymbol{H \cap F}$,
mahasiswa yang mendapat nilai ***B*** yaitu $\boldsymbol{H \oplus F}$, dan
mahasiswa yang mendapat nilai ***C*** yaitu $\boldsymbol{H^c \cap F^c = S - (H \cup F)}$

b. Menentukan Jumlah Anggota Himpunan

Terdapat beberapa rumus umum untuk menentukan jumlah anggota pada suatu himpunan.

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$
$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

$n(A \Delta B) = n(A \cup B) - n(A \cap B)$
$n(S) = n(A) + n(A') = n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(A \cup B)'$

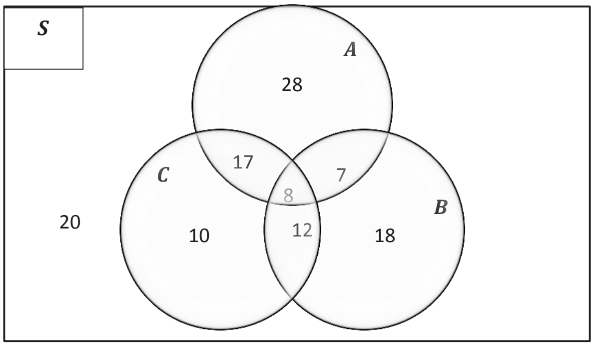
Contoh 2.27:
Dari 120 mahasiswa semester 1 Prodi PGSD, 100 mahasiswa mengambil paling sedikit satu kegiatan kemahasiswaan, yaitu olahraga, seni tari, dan angklung. Diketahui bahwa:

- 42 mahasiswa mengikuti kegiatan angklung
- 45 mahasiswa mengikuti kegiatan seni tari
- 65 mahasiswa mengikuti kegiatan olahraga
- 15 mahasiswa mengikuti kegiatan seni tari dan angklung
- 20 mahasiswa sekaligus mengikuti kegiatan seni tari dan olahraga
- 25 mahasiswa sekaligus mengikuti kegiatan olahraga dan angklung

Sehingga untuk menentukan jumlah mahasiswa yang mengambil sekaligus 3 kegiatan tersebut dapat dilihat penjelasannya sebagai berikut:
Misalkan ***A*** = mahasiswa mengikuti angklung, ***B*** = mahasiswa mengikuti seni tari, ***C*** = mahasiswa mengikuti olahraga, sehingga:

$n(A \cup B \cup C) = 100$
$n(A) = 42$
$n(B) = 45$
$n(C) = 65$
$n(A \cap B) = 15$
$n(B \cap C) = 20$
$n(A \cap C) = 25$
$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$
$100 = 42 + 45 + 65 - 15 - 25 - 20 + n(A \cap B \cap C)$
$n(A \cap B \cap C) = 8$

Jadi banyaknya mahasiswa yang mengambil sekaligus 3 kegiatan mahasiswa sebanyak 8 mahasiswa. Hasil tersebut dapat disajikan ke dalam bentuk diagram Venn berikut.



8. Forum Diskusi

Bacalah berita-berita di bawah ini!

Sulitnya Mencari Pendonor Plasma Konvelesen dari Penyintas Covid-19 di Sumsel

Nefri Inge
04 Mar 2021, 18:30 WIB

Share 13

Ilustrasi donor darah (Foto: Pixabay/Ahmad Ardity)

Liputan6.com, Palembang - Donor darah **plasma konvalesen** menjadi salah satu terapi, untuk penyembuhan pasien penderita Corona Virus 2019 (Covid-19). Di Sumatera Selatan (**Sumsel**) sendiri, total pasien terpapar Covid-19 per 2 Maret 2021 mencapai 16.014 orang.

Namun, tidak banyak dari para penyintas Covid-19 di Sumsel yang tergerak untuk menjadi pendonor plasma konvalesen bagi pasien yang terpapar Covid-19.

Nuriwansyah Putra, anggota Himpunan Pendonor Trombopheresis mengatakan, saat banyaknya permintaan donor darah untuk pasien Covid-19, membuat mereka sempat kebingungan untuk mendapatkannya.

Awalnya dia dan anggota Himpunan Pendonor Trombopheresis melakukan pendekatan intensif ke orang-orang terdekat, yang menjadi penyintas Covid-19 per awal tahun 2021 lalu.

Penyintas Covid-19 yang diajak untuk menjadi pendonor **plasma konvalesen**, mulai dari keluarga, kerabat, teman-teman hingga tenaga kesehatan yang pernah terpapar Covid-19.

“Namun itu benar-benar sulit untuk memberi pengertian ke penyintas Covid-19. Kendati sudah dijelaskan, jika darahnya sangat bermanfaat untuk kesembuhan pasien Covid-19 yang sedang dirawat,” katanya kepada **Liputan6.com**, Kamis (4/3/2021).

Padahal, per tanggal 3 Maret 2021, angka pasien terpapar Covid-19 sebanyak 16.604 orang, dengan jumlah pasien sembuh sebanyak 14.223 orang. Alasan malu dan trauma, membuat mereka kesulitan untuk mendapatkan pendonor dari penyintas Covid-19.

“Dari banyaknya penyintas Covid-19 yang kami hubungi, hanya 7 orang penyintas Covid-19, yang bersedia untuk mendonorkan darahnya. Mereka banyak tidak mau jujur, jika pernah terpapar Covid-19,” ucapnya.

Namun tidak mudah juga bagi penyintas Covid-19, untuk mendonorkan **plasma konvalesen**. Mulai dari berat badan yang harus sekitar 55 Kilogram (Kg), urat nadi di tangan harus besar, harus mengikuti rapid test antigen dan syarat lainnya.

Himpunan Pendonor Trombopheresis tidak menyerah, untuk mendapatkan pendonor pagi pasien Covid-19. Mereka bahkan menghubungi rekan-rekannya di luar kota Palembang hingga antarprovinsi.

“Saya pernah minta tolong ke teman di Jakarta, tapi akhirnya dapatnya di Palembang. Bahkan teman-teman di Jakarta, pernah mendapat donor plasma konvalesen dari penyintas Covid-19 di Palembang,” ujarnya.

Salah satu kejadian yang membuat dia sedih adalah, salah satu pasien Covid-19 di Palembang menanti tranfusi donor plasma konvalesen, akhirnya meninggal dunia. Meskipun, ada juga pasien Covid-19 yang akhirnya sembuh, setelah mendapat terapi donor darah plasma konvalesen.

Namun mereka juga tidak bisa memaksakan para penyintas Covid-19, untuk merelakan darahnya untuk terapi kesembuhan pasien Covid-19.

“Kita berharap, masyarakat lebih sadar tentang tingginya kebutuhan pendonor darah bagi pasien Covid-19. Karena, d balik susahnya waktu terpapar Covi-19, ketika sembuh para penyintas bisa menolong banyak orang,” katanya.

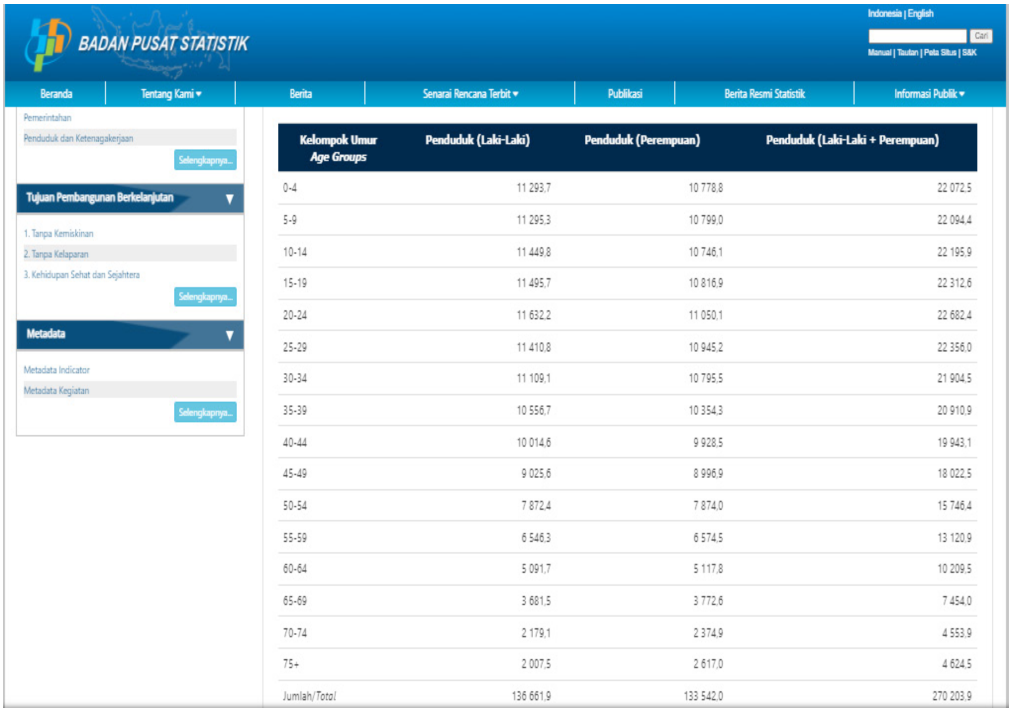
Dwi Apriani (31), salah satu penyintas Covid-19 mengatakan, keinginannya bersama suaminya Dandy Hendrias (36) sangatlah besar untuk membantu para pasien Covid-19.

Namun pasangan suami istri (pasutri) ini tidak bisa mendonorkan darahnya, karena kendala tertentu. Pasutri ini terpapar Covid-19 pada awal Desember 2020 lalu, dan dinyatakan sembuh di akhir tahun 2020.

“Sangat ingin membantu, supaya dapat berkah pahala. Tapi banyak persyaratan, yang membuat kami gugur menjadi pendonor darah pasien Covid-19. Apalagi tensi darah saya rendah, sehingga tidak bisa,” ujarnya.

Dia pun berharap kepada penyintas Covid-19 yang masuk dalam persyaratan donor darah plasma konvalesen, agar tergerak untuk membantu sesama dan menyumbangkan darahnya untuk kesembuhan pasien Covid-19.

Setelah kalian membaca berita di atas silakan mempelajari info di bawah ini!



Kelompok Umur *Age Groups*	Penduduk (Laki-Laki)	Penduduk (Perempuan)	Penduduk (Laki-Laki + Perempuan)
0-4	11 293,7	10 778,8	22 072,5
5-9	11 295,3	10 799,0	22 094,4
10-14	11 449,8	10 746,1	22 195,9
15-19	11 495,7	10 816,9	22 312,6
20-24	11 632,2	11 050,1	22 682,4
25-29	11 410,8	10 945,2	22 356,0
30-34	11 109,1	10 795,5	21 904,5
35-39	10 556,7	10 354,3	20 910,9
40-44	10 014,6	9 928,5	19 943,1
45-49	9 025,6	8 996,9	18 022,5
50-54	7 872,4	7 874,0	15 746,4
55-59	6 546,3	6 574,5	13 120,9
60-64	5 091,7	5 117,8	10 209,5
65-69	3 681,5	3 772,6	7 454,0
70-74	2 179,1	2 374,9	4 553,9
75+	2 007,5	2 617,0	4 624,5
Jumlah/*Total*	136 661,9	133 542,0	270 203,9

Setelah kalian memahami informasi-informasi sebelumnya, sialkan kerjakan tugas diskusi berikut ini!

Tugas Analisis Kasus

1. Anggaplah kalian adalah petugas kesehatan yang diminta mencari pendonor darah untuk pasien covid-19. Berdasarkan informasi-informasi kasus sebelumnya, gunakan pemahaman materi himpunan kalian untuk mencari irisan yang tepat berapa banyak penduduk Indonesia dari data Badan Pusat Statistik (BPS) yang layak bisa menjadi pendonor darah bagi pasien covid-19?
2. Deskripsikan hal-hal apa saja yang harus dipertimbangkan atas jawaban yang diajukanpada no.1?

C. PENUTUP

1. Rangkuman

a. Himpunan adalah sekumpulan objek-objek yang didefinisikan dengan jelas, yaitu yang berdasarkan sifat atau keadaan yang sama atau berdasarkan suatu aturan tertentu dan dilambangkan dengan huruf kapital, seperti *A, B, C,...*

b. Objek-objek yang termasuk dalam himpunan itu disebut elemen atau anggota dan dilambangkan dengan huruf kecil, seperti *a, b, c,...*

c. Dalam menyatakan suatu himpunan dapat dinyatakan dengan 3 cara, yaitu: cara mendaftar, notasi pembentuk himpunan, dan menyatakan sifat yang dimiliki anggotanya.

d. Diagram Venn merupakan salah satu bentuk penyajian himpunan secara grafis.

e. Terdapat jenis – jenis himpunan yaitu : himpunan kosong, himpunan berhingga, himpunan tak berhingga, himpunan terbatas, himpunan tak terbatas.

f. Relasi dalam himpunan terditi atas : himpunan saling lepas, himpunan saling berpotongan, himpunan bagian (himpunan bagian dan himpunan bagian sejati), himpunan yang sama, himpunan ekuivalen, dan himpunan kuasa.

g. Terdapat 5 operasi pada himpunan, diantaranya: komplemen ($\square^{c}$), operasi gabungan ($\cup$), operasi irisan ($\cap$), operasi selisih (-), operasi beda setangkup ($\oplus$), dan perkalian kartesian ($\times$).

h. Dalam menyelesaikan permasalahan himpunan pada kasus realitas maka perlu dipahami (1) bagaimana mengkonversi kalimat sehari – hari ke dalam bentuk notasi himpunan dan (2) menentukan jumlah anggota dari suatu himpunan yang ada.

2. Tes Formatif

1. Ubahlah penulisan himpunan berikut:
   a) $\boldsymbol{A} = \{\, \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} > \boldsymbol{5}, \boldsymbol{x}$ bilangan prima$\}$ dengan cara daftar!
   b) $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{1, 2, 3, 4, 5}\}$ ke notasi pembentuk himpunan!

2. Ubahlah penulisan himpunan berikut:
   a) $A = \{\, x \mid x < 5, x \text{ } \textit{bilangan prima}\}$ dengan cara daftar!
   b) $B = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$ dengan menuliskan ke notasi pembentuk himpunannya.

3. Tentukan hubungan dari himpunan–himpunan berikut:
   $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{2, 3, 6, 8, 10, 12}\}$, $\boldsymbol{B} = \{\mathbf{2, 3, 5, 7}\}$,
   $\boldsymbol{C} = \{\mathbf{6, 8, 10, 12}\}$, $\boldsymbol{D} = \{\mathbf{3, 5, 7}\}$!

4. Dari himpunan – himpunan berikut, manakah yang termasuk himpunan berhingga dan himpunan tak berhingga?
   a) $\boldsymbol{A} = \{\, \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}$ genap$\}$
   b) $\boldsymbol{B} = \{\, \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}$ adalah nama hari diawali huruf $\boldsymbol{S}\}$
   c) $\boldsymbol{C}$ = Himpunan bilangan prima antara 5 dan 100
   d) $\boldsymbol{D}$ = Himpunan bilangan asli antara 1 dan 13 habis dibagi 12

5. Dari himpunan – himpunan berikut, manakah yang termasuk himpunan terbatas dan himpunan tak terbatas?
   a) $A = \{x \mid x \geq 9$, x bilangan asli$\}$
   b) $B = \{2, 4, 8, 9, 12, \ldots\}$
   c) C = Himpunan bilangan riil
   d) $D = \{x \mid 0 \leq x \leq 100$, x bilangan bulat$\}$

6. Dari himpunan – himpunan berikut, manakah yang termasuk himpunan kosong?
   a) $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}$ bilangan prima genap$\}$
   b) $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}^2 - \mathbf{2} = \mathbf{90}$, $\boldsymbol{x}$ bilangan asli$\}$
   c) $\boldsymbol{C} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}^4 = \mathbf{99}$, $\boldsymbol{x}$ bilangan bulat$\}$
   d) $\boldsymbol{D} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}^4 - \mathbf{2}\,\boldsymbol{x} + \mathbf{1} = 0$, $\boldsymbol{x}$ bilangan cacah$\}$

7. Gambarkan hubungan dari himpunan – himpunan berikut dengan diagram Venn $A = \{1, 3, 5, 7, 8\}$, $B = \{1, 5\}$, $C = \{7, 8\}$, $D = \{8\}$!

8. Buatlah diagram Venn dari himpunan berikut $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{x} \mid \mathbf{0} \leq \boldsymbol{x} \leq \mathbf{15}\}$, $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{x} \mid \mathbf{1} < \boldsymbol{x} < \mathbf{13}$, $\boldsymbol{x}$ bilangan bulat genap$\}$, $\boldsymbol{B} = \{\mathbf{2, 4, 8, 10, 12}\}$, $\boldsymbol{C} = \{\mathbf{1, 3}\}$, dan $\boldsymbol{D} = \{\mathbf{3, 5, 7}\}$!

9. Tentukan himpunan dari semua himpunan bagian dari $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{2, 3, 4, 2, 4, 5}\}$ dan tentukan banyaknya anggota himpunan tersebut!

10. Misalkan $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{x} \mid \mathbf{2} \leq \boldsymbol{x} < \mathbf{20}$, $\boldsymbol{x}$ bilangan prima$\}$, $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{2, 3, 11, 17, 19}\}$, $\boldsymbol{B} = \{\mathbf{5, 7, 11, 19}\}$ dan $\boldsymbol{C} = \{\mathbf{3, 7, 13, 17, 19}\}$.
    Tentukan anggota dari himpunan berikut!
    a) $(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})' - (\boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{A})'$
    b) $(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}') \cup (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{B}')$
    c) $(\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{C}') - (\boldsymbol{B}' \cap \boldsymbol{A}')'$

11. Tentukan A x B jika diketahui $A = \{0, \{1\}\}$ dan $B = \{1, 2, 3\}$!

12. Diketahui $n(A) = 3$, $n(B) = 14$, $n(A \cup B) = 15$ maka $n(A \cap B)$ adalah ...

13. Diketahui $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{S}) = \mathbf{26}$, $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{B}) = \mathbf{10}$, $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) = \mathbf{7}$, $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{A}' \cap \boldsymbol{B}') = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{B}) - \mathbf{2}$. Tentukan $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{A})$?

14. Mahasiswa matematika semester 7 sebanyak 38 mahasiswa, terdapat 25 mahasiswa mengikuti kegiatan kesenian olahraga dan 16 mahasiswa

mengikuti kegiatan paduan suara, namun ternyata terdapat 4 mahasiswa yang tidak mengikuti kegiatan apapun.

a) Berapa jumlah mahasiswa yang mengikuti kegiatan keduanya?
b) Berapa jumlah mahasiswa yang hanya mengikuti kegiatan olahraga?
c) Berapa jumlah mahasiswa yang hanya mengikuti kegiatan paduan suara?

15. Dalam penelitian dengan sampel pada 60 orang mengenai kebiasaan belajar, diperoleh data bahwa 25 orang belajar dengan cara menghapal, 26 orang belajar dengan cara mencatat rangkuman, dan 26 orang belajar dengan cara mendengarkan musik. Terdapat 9 orang belajar dengan cara menghapal dan mendengarkan musik, 11 orang belajar dengan cara menghapal dan mencatat rangkuman, 8 orang belajar dengan cara mencatat rangkuman dan mendengarkan musik, dan 8 orang tidak menggunakan 3 cara tersebut. Tentukan jumlah orang yang hanya belajar dengan menggunakan cara menghapal?

3. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Cocokkan jawaban anda dengan kunci jawaban tes formatif pada bahan belajar ini yang terdapat pada bagian akhir buku ajar ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan anda terhadap materi pada bahan belajar ini.

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\textit{Jumlah jawaban yang benar}}{\textit{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Dengan arti tingkat penguasaan :
90 - 100% = Baik Sekali
80 - 89% = Baik
70 - 79% = Cukup
< 70% = Kurang

Apabila anda telah mencapai tingkat penguasaan sebesar kegiatan belajar selanjutnya. Akan tetapi bila hasil anda di bawah 80% maka anda harus mengulangi kembali materi pada bahan belajar ini, khususnya bagian yang belum ada pahami dan kuasai.

SELF EVALUATION

Selanjutnya mohon menjawab dengan jujur dan bertanggung jawab dengan memberikan tanda "✓" pada jawaban "Ya" atau "Tidak"

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1	Saya mampu menjelaskan konsep dasar materi himpunan		
2	Saya mampu menjelaskan jenis, relasi dan operasi pada himpunan		
3	Saya mampu menyelesaikan masalah sehari-hari terkait himpunan		

Setelah anda melakukan "**self evaluation**" dengan jujur dan bertanggung jawab, mohon melakukan pengulangan pembelajaran secara mandiri pada bagian yang anda jawab "tidak", anda dapat berdiskusi dengan rekan anda dan meminta bantuan dosen untuk lebih memahami. Akan tetapi, anda dapat melanjutkan ke pembelajaran selanjutnya untuk bagian jawaban "ya"

GLOSARIUM

Himpunan : sebuah koleksi dari objek-objek yang terdefinisi dengan baik (*well defined*)

Elemen : objek yang termasuk dalam sebuah himpunan

Kardinalitas : jumlah anggota dari suatu himpunan

Himpunan semesta : himpunan dari semua anggota yang sedang dibicarakan

Himpunan kosong : himpunan yang tidak mempunyai anggota

Himpunan berhingga : himpunan yang banyak anggotanya berhingga

Himpunan tak berhingga : himpunan yang banyak anggotanya tak berhingga

Himpunan terbatas : himpunan yang anggotanya terbatas atau himpunan tersebut memiliki batas atas dan batas bawah

Himpunan tak terbatas : himpunan yang anggotanya tidak ada batasnya atau himpunan tersebut memiliki batas atas dan/atau batas bawah

BAHAN BELAJAR 3

LOGIKA DAN PENALARAN

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat Materi

Mata kuliah ini dimaksudkan agar mahasiswa memiliki penguasan konsep-konsep dasar matematika yang akan digunakan dalam konsep-konsep matematika lanjutan. Materi perkuliahan ini meliputi: pengertian pernyataan, argumen, pembuktian validitas argumen, kuantor, silogisme, dan aplikasi logika dalam materi matematika dan kehidupan sehari-hari.

Di dalam Al-Quran secara tersirat membahas materi logika. Beberapa contoh surat dan ayat Al-Qur'an yang membahas himpunan antara lain terdapat dalam Surat An-Nazi'at ayat 40 dan 41 yang berbunyi:

وَأَمَّا مَنْ خَافَ مَقَامَ رَبِّهِۦ وَنَهَى ٱلنَّفْسَ عَنِ ٱلْهَوَىٰ ﴿٤٠﴾

فَإِنَّ ٱلْجَنَّةَ هِىَ ٱلْمَأْوَىٰ ﴿٤١﴾

Artinya:

"Dan adapun orang-orang yang takut kepada kebesaran Tuhannya dan menahan diri dari keinginan hawa nafsunya, maka sesungguhnya surgalah tempat tinggal (nya)."

Logika matematika yang terdapat dalam ayat tersebut adalah implikasi dan konjungsi. Implikasi yang ditunjukkan kata "adapun/apabila; maka" Melihat tabel kebenaran proposisi *p*: benar, maka *q: benar,* kesimpulannya benar. Konjungsi ditunjukkan dengan kata "dan".

Ayat lain dalam juz 30 yang berkaitan dengan logika juga terdapat dalam beberapa surat berikut:

- Qs. Abasa ayat 1-6 (konjungsi, disjungsi, dan implikasi)
- Qs. At-Takwir ayat 22 dan 24 (negasi)
- Qs. Al-Infithar ayat 4-5 (implikasi)
- Qs. Al-Muthoffifin ayat 3, 30, 31, dan 32 (implikasi)
- Qs. Al-Insyiqaq ayat 21 (implikasi)
- Qs. Al-Fajr ayat 15 (implikasi)
- Qs. Al-Balad ayat 12-16 (disjungsi)
- Qs. Al-Lail ayat 8-10 (konjungsi)
- Qs. Al Bayyinah ayat 5 (konjungsi)
- Qs. Al-Adiyat ayat 6 (negasi/ingkaran)
- Qs. Al-Qori'ah ayat 6-7 (implikasi)
- dll

2. CPMK

Penulis berharap bagi pembaca yang telah mempelajari bahan belajar ini, secara umum diharapkan Mahasiswa memahami konsep logika dan pengaplikasiannya dalam kehidupan sehari-hari yang merupakan CPMK pada bahan belajar ini.

3. Sub CPMK

Berdasarkan CPMK yang telah dirancang, selanjutnya berikut merupakan sub – CPMK yang telah dirancang memahami konsep dasar materi logika, memahami operasi dan tabel kebenaran pada logika, menerapkan konsep logika dalam dalam menyelesaikan masalah sehari-hari

4. Tujuan Pembelajaran

Setelah membaca dan mengikuti serangkaian kegiatan pada bagian ini, diharapkan:

a. Mahasiswa mampu menjelaskan konsep dasar materi logika
b. Mahasiswa mampu membuktikan tabel kebenaran logika
c. Mahasiswa mampu menyelesaikan masalah sehari-hari terkait logika

5. Petunjuk Penggunaan Modul

Bacalah petunjuk penggunaan modul berikut!

a. Bacalah dan pahami materi yang ada pada bab ini
b. Kerjakan setiap tugas diskusi yang dibahas dalam bab ini
c. Jika belum menguasai level materi yang diharapkan, ulangi lagi pada bab sebelumnya atau bertanyalah kepada dosen.

B. MATERI

1. Konsep Dasar Logika

Logika merupakan salah satu bidang ilmu yang mengkaji prinsip – prinsip penalaran yang benar dan penarikan kesimpulan yang sah. Ada dua tipe penalaran dalam matematika, yaitu penalaran deduktif dan penalaran induktif.

Penalaran deduktif, dapat juga disebut logika deduktif, yaitu penarikan kesimpulan yang diperoleh dari kasus – kasus yang sudah umum untuk menjadi sebuah kesimpulan yang ruang lingkupnya bersifat khusus. Sebuah argument deduktif dinyatakan valid jika dan hanya jika kesimpulannya merupakan konsekuensi logis dari premis – premisnya. Penalaran ini biasanya digunakan dalam pembuktian suatu teorema atau dalil. Pembuktian suatu teorema pada dasarnya adalah penurunan teorema tersebut dari definisi, aksioma atau teorema yang telah dibuktikan menurut suatu penalaran yang logis. Berikut contoh penalaran deduktif.

Contoh 3.1:

(1) Premis 1 : Semua manusia pasti butuh makan
    Premis 2 : Aristoteles adalah manusia
    Kesimpulan : Aristoteles pasti butuh makan

(2) Menentukan hasil penjumlahan $1 + 2 + 3 + \cdots + n$. Berdasarkan rumus deret aritmatika dengan suku pertama $a = 1$, beda $b = 1$, dan suku ke– n $U_n = n$, sehingga dengan menerapkan rumus $S_n = \frac{1}{2} n(a + U_n)$ diperoleh $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2} n(1 + n)$.

Penalaran induktif, dapat juga disebut logika induktif, yaitu menyusun data sedemikian hingga dapat ditarik suatu kesimpulan yang berlaku umum. Kesimpulan yang diperoleh dengan cara ini baru disebut teorema dugaan (*konjektur*). Teorema dugaan ini masih perlu dibuktikan secara deduktif agar menjadi suatu teorema. Berikut contoh penalaran induktif.

Contoh 3.2:

Membuat 3 buah segitiga dan mengukur besar sudut tiap – tiap segitiga dengan busur derajat. Hasil pengukuran besar sudut yang diperoleh dari 3 buah segitiga adalah jumlah besar ketiga sudut dalam masing – masing segitiga yang dibuat adalah . Dari 3 contoh segitiga yang telah dibuat dapat ditarik kesimpulan bahwa jumlah besar ketiga sudut dalam segitiga adalah .

2. Proposisi

Proposisi adalah pernyataan yang bernilai benar atau bernilai salah, tetapi tidak sekaligus bernilai kedua – duanya. Proposisi juga dapat dikatakan kalimat tertutup. Berikut contoh pernyataan yang bernilai benar.

Contoh 3.3:
(1) Sebuah segitiga memiliki 3 sisi
(2) 14 lebih dari 6
(3) 7 merupakan bilangan bulat ganjil

Setelah diberikan contoh proposisi yang bernilai benar, berikut merupakan proposisi yang bernilai salah.

Contoh 3.4:
(1) Sebuah segiempat mempunyai 5 sudut
(2) 6 kurang dari 2
(3) 9 merupakan bilangan prima

Pernyataan yang tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya merupakan bukan proposisi. Berikut merupakan contoh yang merupakan bukan proposisi.

Contoh 3.5:
(1) Apakah kamu lapar?
(2) 3x+y=6
(3) Buka pintu itu!

Pada contoh di atas, nomor (1) merupakan kalimat pertanyaan dan nomor (3) merupakan kalimat perintah, sehingga kalimat ini tidak dapat disimpulkan benar atau salah. Perhatikan untuk nomor (2), jika nilai *x* dan diketahui maka pernyataan tersebut menjadi proposisi. Pernyataan yang dapat diubah menjadi proposisi dengan mengganti variabel dengan suatu nilai, kita sebut kalimat terbuka.

Dalam penyingkatan penulisan, suatu proposisi diberi lambang dengan huruf alfabet kecil, yaitu *a, b, c* ,... atau lainnya, sedangkan untuk nilai benar dan salah berturut – turut disingkat dengan *B* dan *S*. Berikut contoh dalam pemberian lambang pada suatu proposisi.

Contoh 3.6:

(1) "2 adalah suatu bilangan prima" diberi lambang *a*
(2) "Semua bilangan ganjil habis dibagi oleh 3" diberi lambang *b*
(3) "$3x = 6$, dengan $x = 2$" diberi lambang *c*

Pada contoh di atas, proposisi *a* bernilai *B* (benar), proposisi *b* bernilai *S* (salah), proposisi *c* bernilai *B*. Perhatikan pada nomor (2), *b* menyatakan “semua bilangan ganjil habis dibagi oleh 3” dan proposisinya bernilai *S*, sedangkan proposisi “ada bilangan ganjil yang tidak habis dibagi oleh 3” bernilai *B*. Dapat dikatakan bahwa proposisi “ada bilangan ganjil yang tidak habis dibagi oleh 3” merupakan **negasi** atau **ingkaran** dari proposisi “semua bilangan ganjil yang habis dibagi oleh 3”. Selanjutnya, negasi dari *b* dilambangkan “~*b*”. Pada contoh (1), *a* menyatakan “2 adalah suatu bilangan prima” dan proposisi bernilai *B*, sedangkan proposisi ~*a* menyatakan “2 bukan suatu bilangan prima” bernilai *S*.

Berdasarkan contoh di atas dapat disimpulkan bahwa **Negasi** suatu proposisi adalah suatu proposisi yang bernilai salah apabila proposisi semula bernilai benar, dan bernilai benar apabila proposisi semula bernilai salah. Notasi “~” dapat dibaca “tidak”, “bukan”, “tidak benar”.

Contoh 3.7:

(1) *d* Kucing itu berwarna putih
~*d* Kucing itu tidak berwarna putih/tidaklah benar kucing itu berwarna putih

(2) *e* Lira menggunakan topi
~*e* Lira tidak menggunakan topi

(3) *f* Ada mahasiswa masuk ke ruangan kelas
~*f* Semua mahasiswa tidak masuk ke ruangan kelas

Perhatikan pada contoh (1), proposisi “Kucing itu berwarna hitam” bukan merupakan negasi dari “Kucing itu berwarna putih”. Sebab apabila kenyataannya “Kucing itu berwarna coklat” maka dua proposisi tersebut bernilai salah.

Proposisi dan negasinya mempunyai nilai – nilai kebenaran yang selalu berbeda, artinya jika proposisinya bernilai *B* maka negasinya bernilai *S* dan sebaliknya jika proposisinya bernilai *S* maka negasinya bernilai *B*.

Dalam logika matematika, tabel kebenaran adalah tabel dalam matematika yang digunakan guna melihat kebenaran dari suatu proposisi. Misalkan tabel kebenaran untuk negasi suatu proposisi dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 3.1 Negasi Suatu Proposisi

p	~*p*	~(~*p*)
B	*S*	*B*
S	*B*	*S*

3. Proposisi Majemuk

Proposisi majemuk terbentuk dari dua atau lebih proposisi yang dihubungkan dengan kata penghubung/perangkat logika. Proposisi – proposisi yang dirangkai dalam proposisi majemuk disebut proposisi tunggal. Kata penghubung yang dimaksudkan adalah “dan”, “atau”, “jika … maka …” dan “… jika dan hanya jika…”. Lambang kata – kata penghubung tersebut dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 3.2 Lambang Kata Penghubung

Proposisi Majemuk	Lambang	Kata Penghubung
Konjungsi	$\wedge$	Dan, Tetapi, Meskipun
Disjungsi (Inklusif)	$\oplus$	Atau, Ataupun
Disjungsi (Eksklusif)	$\oplus$	Atau
Implikasi	$\leftrightarrow$	Jika … maka … Akibatnya …
Biimplikasi	$\leftrightarrow$	… Jika dan hanya jika …

a. Konjungsi

Konjungsi adalah kata penghubung “dan” yang digunakan untuk menghubungkan dua proposisi. Konjungsi dapat ditulis dengan notasi ($\wedge$). Nilai kebenaran dari suatu proposisi majemuk yang menggunakan konjungsi tergantung dari nilai kebenaran dari proposisi – proposisi tunggalnya.

Nilai kebenaran dari dua proposisi yang dihubungkan dengan konjungsi ditentukan dengan aturan konjungsi dua proposisi p dan q (ditulis “$p \wedge q$” dibaca p dan q) bernilai B (benar) jika dan hanya jika dua proposisi p dan q masing – masing bernilai B, sedangkan untuk nilai – nilai kebenaran p dan q lainnya “$p \wedge q$” bernilai S (salah). Aturan tersebut dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 3.3 Kebenaran Konjungsi

p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Contoh 3.8:

Indah pergi kuliah dan belajar matematika dasar. Pernyataan ini merupakan proposisi majemuk karena pernyataan itu merupakan rangkaian dua proposisi, yaitu "Indah pergi kuliah" dilambangkan p dan "Indah belajar matematika dasar" dilambangkan q. Maka proposisi majemuk itu dilambangkan dengan $p \wedge q$. Pernyataan ini bernilai benar jika Indah melakukan dua hal tersebut, yaitu pergi kuliah dan belajar matematika dasar. Perhatikan kesimpulan nilai kebenaran dari proposisi "p dan q" untuk semua kemungkinan nilai kebenaran p dan q.

(1) p : Indah pergi kuliah (*B*)
q : Indah belajar matematika dasar (*B*)
Artinya Indah melakukan dua hal tersebut dan kesimpulannya benar.

(2) p : Indah pergi kuliah (*B*)
q : Indah belajar matematika dasar (*S*)
Artinya Indah hanya pergi kuliah tetapi tidak belajar matematika dasar, jadi kesimpulan salah.

(3) p : Indah pergi kuliah (*S*)
q : Indah belajar matematika dasar (*B*)
Sama halnya dengan nomor (2) Indah hanya belajar matematika dasar tetapi tidak pergi kuliah, jadi kesimpulan salah.

(4) p : Indah pergi kuliah (*S*)
q : Indah belajar matematika dasar (*S*)
Artinya Indah tidak melakukan dua hal tersebut, jadi kesimpulan salah.

Menentukan negasi dari konjungsi dua proposisi dapat dilihat pada tabel nilai kebenaran berikut.

Tabel 3.4 Nilai Kebenaran Negasi dari Konjungsi

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$
B	*B*	*S*	*S*	*B*	*S*
B	*S*	*S*	*B*	*S*	*B*
S	*B*	*B*	*S*	*S*	*B*
S	*S*	*B*	*B*	*S*	*B*

b. Disjungsi (Inklusif)

Disjungsi adalah kata penghubung "atau" yang digunakan untuk menghubungkan dua proposisi. Disjungsi dapat ditulis dengan notasi ($\vee$). Nilai kebenaran dari suatu proposisi majemuk yang menggunakan disjungsi tergantung dari nilai kebenaran dari proposisi – proposisi tunggalnya. Nilai kebenaran dari dua proposisi yang dihubungkan dengan disjungsi ditentukan dengan aturan disjungsi dua proposisi a dan b (ditulis "$p \vee q$" dan dibaca "p atau q") bernilai *S* (salah) jika dan hanya jika dua proposisi p

dan q masing – masing bernilai S, sedangkan untuk nilai – nilai kebenaran p dan q lainnya, "$p \vee q$" bernilai B (benar). Aturan tersebut dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 3.5 Nilai Kebenaran Disjungsi (Inklusif)

p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Contoh 3.9

Budi adalah nama untuk perempuan atau laki – laki. Pernyataan ini merupakan proposisi majemuk karena pernyataan itu merupakan rangkaian dua proposisi, yaitu "Budi adalah nama untuk perempuan" dilambangkan p dan "Budi adalah nama untuk laki – laki" dilambangkan q. Maka proposisi majemuk itu dilambangkan dengan $p \vee q$. Pernyataan ini bernilai salah jika Budi bukan nama untuk perempuan dan laki – laki. Perhatikan kesimpulan nilai kebenaran dari proposisi "p dan q" untuk semua kemungkinan nilai kebenaran p dan q.

(1) p : Budi adalah nama untuk perempuan (B)
q : Budi adalah nama untuk laki – laki (B)
Artinya Budi dapat dipakai untuk nama perempuan atau nama laki – laki , jadi kesimpulan benar.

(2) p : Budi adalah nama untuk perempuan (B)
q : Budi adalah nama untuk laki – laki (S)
Artinya Budi dapat dipakai untuk nama perempuan, jadi kesimpulan benar.

(3) p : Budi adalah nama untuk perempuan ()
q : Budi adalah nama untuk laki – laki ()
Artinya Budi dapat dipakai untuk nama laki – laki, jadi kesimpulan benar.

(4) p : Budi adalah nama untuk perempuan ()
q : Budi adalah nama untuk laki – laki ()
Artinya Budi bukan nama perempuan maupun nama laki – laki, jadi kesimpulan salah.

Menentukan negasi dari disjungsi (inklusif) dua pernyataan dapat dilihat pada tabel nilai kebenaran berikut.

Tabel Nilai 3.6 Kebenaran Negasi dari Disjungsi (Inklusif)

p	*q*	*~p*	*~q*	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$
B	*B*	*S*	*S*	*B*	*S*
B	*B*	*S*	*B*	*B*	*S*
S	*S*	*B*	*S*	*B*	*S*
S	*S*	*B*	*B*	*S*	*B*

c. Disjungsi (Ekslusif)

Disjungsi (Eksklusif) adalah kata penghubung "atau" yang digunakan untuk menghubungkan dua proposisi. Disjungsi ini dapat ditulis dengan notasi ($\oplus$). Berbeda dengan disjungsi inklusif, disjungsi eksklusif tidak diizinkan untuk memilih dua pilihan sekaligus, artinya dua pilihan ini tidak dapat dilakukan secara bersamaan atau tidak bersamaan. Disjungsi eksklusif dapat dibedakan dengan dua cara, (1) memberi penekanan pada pilihannya, sebagai contoh "kopi atau susu tapi tidak keduanya", (2) memberikan dua pilihan yang tidak bisa dilakukan dilakukan keduanya, sebagai contoh "hidup atau mati". Dapat kita lihat, pilihan pada cara kedua merupakan dua hal yang berlawanan.

Nilai kebenaran dari suatu proposisi majemuk yang berbentuk ini tergantung dari nilai kebenaran dari proposisi – proposisi tunggalnya. Nilai kebenaran dari dua proposisi yang dihubungkan dengan disjungsi ditentukan dengan aturan disjungsi dua proposisi *p* dan *q* (ditulis "$p \oplus q$" dan dibaca "*p* atau *q*") bernilai *S* (salah) jika dan hanya jika nilai kebenaran dari *p* sama dengan nilai kebenaran dari *q*, sedangkan untuk nilai – nilai kebenaran *p* dan *q* lainnya, "$p \oplus q$" bernilai *B* (benar). Aturan tersebut dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 3.7 Nilai Kebenaran Disjungsi (Eksklusif)

p	*q*	$p \oplus q$
B	*B*	*S*
B	*S*	*B*
S	*B*	*B*
S	*S*	*S*

d. Implikasi

Implikasi adalah kata penghubung "jika … maka" untuk menghubungkan dua proposisi yang menyatakan hubungan sebab akibat. Implikasi dapat ditulis dengan notasi ($\rightarrow$). Nilai kebenaran dari suatu proposisi majemuk yang berbentuk ini tergantung dari nilai kebenaran dari proposisi – proposisi tunggalnya. Untuk menyederhanakan proposisi yang menggunakan implikasi akan kita sebut implikasi.

Nilai kebenaran dari dua proposisi yang dihubungkan dengan implikasi ditentukan dengan aturan implikasi dua proposisi *p* dan *q* (ditulis "$p \rightarrow q$" dan dibaca "jika *p* maka *q*") bernilai *S* (salah) jika dan hanya jika proposisi *p* benar dan q salah, sedangkan untuk nilai – nilai kebenaran *p* dan *q* lainnya, "$p \rightarrow q$" bernilai *B* (benar). Pada implikasi "$p \rightarrow q$", proposisi *p* disebut pendahulu dan proposisi *q* disebut pengikut. Nilai kebenaran implikasi $p \rightarrow q$ dapat dilihat pada tabel berikut

Tabel 3.8 Nilai Kebenaran Implikasi

p	*q*	$p \rightarrow q$
B	*B*	*B*
B	*S*	*S*
S	*B*	*B*
S	*S*	*B*

Contoh 3.10:
Jika hari ini hujan maka saya membawa payung. Pernyataan ini merupakan proposisi majemuk karena pernyataan itu merupakan rangkaian dua proposisi, yaitu "hari ini hujan" dilambangkan p dan "saya membawa payung" dilambangkan *q*. Maka proposisi majemuk ini dilambangkan dengan $p \rightarrow q$. Pernyataan ini bernilai salah jika hari ini hujan tetapi saya tidak membawa payung. Perhatikan kesimpulan nilai kebenaran dari proposisi "*p* dan *q*" untuk semua kemungkinan nilai kebenaran *p* dan *q*.

(1) *p* : hari ini hujan (*B*)
q : saya membawa payung (*B*)
Artinya hari ini hujan dan saya membawa payung, jadi kesimpulan benar.

(2) *p* : hari ini hujan (*B*)
q : saya membawa payung (*S*)
Artinya hari ini hujan tetapi saya tidak membawa payung, jadi kesimpulan salah.

(3) *p* : hari ini hujan (*S*)
q : saya membawa payung (*B*)
Artinya hari ini tidak hujan tetapi saya tetap membawa payung, jadi kesimpulan benar.

(4) *p* : hari ini hujan (*S*)
q : saya membawa payung (*S*)

Artinya hari ini tidak hujan dan hari ini pun saya tidak membawa payung, jadi kesimpulan benar.

Menentukan negasi dari implikasi dua proposisi dapat dilihat pada tabel nilai kebenaran berikut ini.

Tabel 3.9 Nilai Kebenaran Negasi dari Implikasi

p	q	$\sim p$	$p \rightarrow q$	$\sim(p \rightarrow q)$
B	B	S	B	S
B	S	B	S	B
S	B	S	B	S
S	S	B	B	S

Berdasarkan contoh di atas "jika hari ini hujan maka saya membawa payung" dengan "hari ini hujan" dilambangkan p dan "saya membawa payung" dilambangkan q, kita dapat membentuk implikasi baru dari implikasi tersebut, yaitu:

- Konvers

  Konvers dari suatu implikasi adalah pendahulu dan pengikutnya dari implikasi yang diketahui ditukarkan tempatnya, pendahulu menjadi pengikut dan pengikut menjadi pendahulu. Jadi jika diketahui p→q maka konversnya adalah q→p, yaitu "jika hari saya membawa payung maka hari ini hujan". Nilai kebenaran dari suatu implikasi tidak sama dengan nilai kebenaran dari konvers. Perhatikan nilai kebenaran konvers dari implikasi berikut.

  Tabel 3.10 Nilai Kebenaran Konvers dari implikasi

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$
B	B	B	B
B	S	S	B
S	B	B	S
S	S	B	B

- Invers

  Inversnya dari suatu implikasi adalah pendahulu dan pengikutnya dari implikasi yang diketahui masing – masing dinegasikan. Jadi jika diketahui $p \rightarrow q$ maka inversnya adalah $\sim p \rightarrow \sim q$, sehingga "jika hari ini tidak hujan maka saya hari ini tidak membawa payung".

  Nilai kebenaran dari suatu implikasi tidak sama dengan nilai kebenaran dari invers. Perhatikan nilai kebenaran invers dari implikasi berikut.

Tabel 3.11 Nilai Kebenaran Invers dari implikasi

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \to q$	$\sim p \to \sim q$
B	*B*	*S*	*S*	*B*	*B*
B	*S*	*S*	*B*	*S*	*B*
S	*B*	*B*	*S*	*B*	*S*
S	*S*	*B*	*B*	*B*	*B*

- Kontrapositif

  Kontrapositif dari suatu implikasi adalah pendahulu dan pengikutnya dari implikasi yang diketahui masing – masing dinegasikan dan selanjutnya ditukarkan tempatnya. Jadi jika diketahui $p \to q$ maka kontrapositifnya adalah $\sim q \to \sim p$, sehingga "jika saya hari ini tidak membawa payung maka hari ini tidak hujan".

  Nilai kebenaran dari suatu implikasi sama dengan nilai kebenaran dari kontrapositif. Perhatikan nilai kebenaran kontrapositif dari implikasi berikut.

Tabel 3.12 Nilai Kebenaran Kontrapositif dari Implikasi

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \to q$	$\sim q \to \sim p$
B	*B*	*S*	*S*	*B*	*B*
B	*S*	*S*	*B*	*S*	*S*
S	*B*	*B*	*S*	*B*	*B*
S	*S*	*B*	*B*	*B*	*B*

e. Biimplikasi

Bimplikasi adalah kata penghubung "… jika dan hanya jika …" yang digunakan untuk menghubungkan dua proposisi. Biimplikasi dapat ditulis dengan notasi ($\leftrightarrow$). Nilai kebenaran dari suatu proposisi majemuk yang berbentuk ini tergantung dari nilai kebenaran dari proposisi – proposisi tunggalnya. Nilai kebenaran dari dua proposisi yang dihubungkan dengan biimplikasi ditentukan dengan aturan: biimplikasi dua proposisi p dan q (ditulis "$p \leftrightarrow q$" dan dibaca "*p* jika dan hanya jika *q*") bernilai *B* (benar) jika dan hanya jika nilai kebenaran dari *p* sama dengan nilai kebenaran dari *q*, sedangkan untuk nilai – nilai kebenaran *p* dan *q* lainnya, "$p \leftrightarrow q$" bernilai *S* (salah). Aturan tersebut dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 3.13 Nilai Kebenaran Biimplikasi

p	q	$p \leftrightarrow q$
B	*B*	*B*

B	*S*	*S*
S	*B*	*S*
S	*S*	*B*

Contoh:

Rani akan pergi jika dan hanya jika Roni akan pergi. Pernyataan ini merupakan pernyataan majemuk karena pernyataan itu merupakan rangkaian dua pernyataan, yaitu "Rani akan pergi" dilambangkan p dan "Roni akan pergi" dilambangkan q. Maka pernyataan majemuk itu dilambangkan dengan $p \leftrightarrow q$. Pernyataan ini bernilai benar jika Rani dan Roni melakukan hal yang sama. Perhatikan kesimpulan nilai kebenaran dari proposisi "p dan q" untuk semua kemungkinan nilai kebenaran p dan q.

(1) p : Rani akan pergi (*B*)
q : Roni akan pergi (*B*)
Artinya Rani dan Roni pergi bersama, jadi kesimpulan benar.

(2) p : Rani akan pergi (*B*)
q : Roni akan pergi (*S*)
Artinya Rani pergi tetapi Roni tidak pergi, jadi kesimpulan salah.

(3) p : Rani akan pergi (*S*)
q : Roni akan pergi (*B*)
Artinya Roni pergi tetapi Rani tidak pergi, jadi kesimpulan salah.

(4) p : Rani akan pergi (*S*)
q : Roni akan pergi (*S*)
Artinya Rani dan Roni sama – sama tidak pergi, jadi kesimpulan benar.

Menentukan negasi dari impliasi dua pernyataan dapat dilihat pada tabel nilai kebenaran berikut ini.

Tabel 3.14 Nilai Kebenaran Negasi dari Biimplikasi

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$q \wedge \sim p$	$p \leftrightarrow q$	$\sim(p \leftrightarrow q)$
B	*B*	*S*	*S*	*S*	*S*	*B*	*S*
B	*S*	*S*	*B*	*B*	*S*	*S*	*B*
S	*B*	*B*	*S*	*S*	*B*	*S*	*B*
S	*S*	*B*	*B*	*S*	*S*	*B*	*S*

4. Validitas Kalimat Logika Proposisi (KLP)

Telah diketahui bahwa logika adalah ilmu tentang penalaran, yang merupakan tahapan penting yang dilakukan oleh manusia sebelum menyatakan pernyataan. Suatu kalimat Logika Proposisi (atau Argumen) adalah kalimat yang terdiri dari proposisi – proposisi pendukung yang disebut premis-premis, yang diakhiri dengan suatu proposisi yang disebut konklusi (kesimpulan).

$$\left.\begin{array}{l}\text{proposisi 1}\\ \text{proposisi 2}\\ \quad\vdots\\ \text{proposisi n}\end{array}\right\}\text{(premis-premis)}$$

$$\therefore \text{ proposisi baru} \rightarrow \text{(konklusi)}$$

Jadi, Kalimat Logika Proposisi (KLP) adalah suatu implikasi yang berbentuk $(\text{"premis" } 1 \wedge \text{"premis" } 2 \wedge \ldots \wedge \text{"premis" } n) \rightarrow \text{"konklusi"}$.

Penalaran yang tepat akan menghasilkan konklusi yang tepat atau valid. Kalimat Logika proposisi dikatakan valid jika saat semua premis bernilai benar maka konklusi juga bernilai benar. Sebaliknya Kalimat logika proposisi yang tidak valid disebut invalid. Dengan kata lain KLP yang valid adalah suatu implikasi yang selalu bernilai benar apapun nilai kebenaran dari premis-premisnya. Suatu proposisi yang selalu bernilai benar untuk semua nilai kebenaran dari proposisi-proposisi tunggal yang ada di dalamnya disebut tautologi. Sebaliknya, suatu proposisi yang selalu bernilai salah apapun nilai dari proposisi-proposisi tunggal yang ada di dalamnya disebut suatu kontradiksi. Proposisi yang bukan tautologi dan kontradiksi kita katakan suatu kontingen.

Setelah mengetahui aturan – aturan proposisi, selanjutnya kita akan mempelajari pengujian validitas proposisi. Dalam memvalidasi kalimat logika proposisi (KLP) bernilai benar atau salah dapat kita lakukan dengan beberapa cara, seperti berikut.

a. Tabel Kebenaran

Tabel kebenaran adalah suatu tabel yang menunjukkan secara sistematis satu demi satu nilai – nilai kebenaran sebagai hasil kombinasi dari proposisi tunggal. Setiap kombinasi dari proposisi tunggal tersebut, nilainya tergantung dari kata penghubung yang digunakan untuk mengkombinasikannya. Setiap kata penghubung pada logika, memiliki kebenarannya masing – masing sesuai jenis kata penghubung yang digunakan. Nilai kebenaran pada setiap kata penghubung telah dijelaskan pada subab sebelumnya. Adapun ketentuan – ketentuan dalam menentukan nilai kebenaran, yaitu:

(1) Untuk menentukan nilai kebenaran dari proposisi majemuk atau kalimat logika proposisi (KLP) perlu diperhatikan hirarki dari masing-masing penghubung lebih dahulu

(2) Hirarki tersebut dari urutan yang tertinggi sampai terendah adalah negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi dan biimplikasi

(3) Hirarki yang lebih tinggi harus dikerjakan lebih dahulu

(4) Namun bila dalam KLP terdapat beberapa penghubung yang setingkat hirarkinya, maka pengerjaan dimulai dari yang kiri

Tabel kebenaran dengan seluruh nilai yang dimungkinkan dibuat dengan rumus 2^n dengan *n* adalah jumlah variabel suatu proposisi. Jadi jika ada 3 proposisi yaitu *p*, *q*, dan *r* maka ada $2^3 = 8$ nilai yang mungkin seperti yang ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 3.15 Kebenaran dari 3 Pernyataan

p	*q*	*r*
B	*B*	*B*
B	*B*	*S*
B	*S*	*B*
B	*S*	*S*
S	*B*	*B*
S	*B*	*S*
S	*S*	*B*
S	*S*	*S*

Contoh 3.11 :
Menentukan nilai kebenaran dari $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ dengan menggunakan tabel kebenaran. Sebelum membuat tabel kebenaran kita dapat menyederhanakan proposisi majemuk sebagai berikut.

$p \vee (q \wedge r) = A$

$(p \vee q) = C$

$(p \vee r) = D$

$C \wedge D = E$

Karena ada 3 proposisi tunggal yaitu p,q dan r maka terdapat 8 nilai yang mungkin terjadi, hal ini dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 3.16 Nilai Kebenaran dari $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

p	*q*	*r*	$(q \wedge r)$	*A*	*C*	*D*	*E*	$A \leftrightarrow E$
B	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*
B	*B*	*S*	*S*	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*
B	*S*	*B*	*S*	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*

B	*S*	*S*	*S*	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*
S	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*
S	*B*	*S*	*S*	*S*	*B*	*S*	*S*	*B*
S	*S*	*B*	*S*	*S*	*S*	*B*	*S*	*B*
S	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*B*

Berdasarkan hasil kesimpulan dari tabel di atas yang ditunjukkan pada kolom terakhir nilai kebenaran selalu (benar), jadi proposisi tersebut merupakan suatu **tautologi**, yaitu suatu proposisi majemuk yang selalu benar, untuk setiap nilai kebenaran dari proposisi – proposisi tunggalnya.

Pernah kita jumpai pada saat membuat nilai kebenaran dengan hasil kesimpulannya selalu salah. Ingat kembali bahwa Proposisi majemuk yang selalu salah, untuk setiap nilai kebenaran dari proposisi – proposisi tunggalnya disebut kontradiksi.

Contoh 3.12:
Menentukan nilai kebenaran dari $\sim((\sim p \rightarrow r) \vee (p \rightarrow \sim q)) \wedge r$ dengan menggunakan tabel kebenaran. Sebelum membuat tabel kebenaran kita dapat menyederhanakan proposisi majemuk sebagai berikut.
$\sim p \rightarrow r = A$
$p \rightarrow \sim q = C$
$A \vee C = D$
$\sim D \wedge r = E$

Karena ada 3 proposisi tunggal yaitu *p, q* dan *r* maka terdapat 8 nilai yang mungkin terjadi, hal ini dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 3.17 Nilai Kebenaran dari $\sim((\sim p \rightarrow r) \vee (p \rightarrow \sim q)) \wedge r$

p	*q*	*r*	*~p*	*~q*	*A*	*C*	*D*	*~D*	*E*
B	*B*	*B*	*S*	*S*	*B*	*S*	*B*	*S*	*S*
B	*B*	*S*	*S*	*S*	*B*	*S*	*B*	*S*	*S*
B	*S*	*B*	*S*	*B*	*B*	*B*	*B*	*S*	*S*
B	*S*	*S*	*S*	*B*	*B*	*B*	*B*	*S*	*S*
S	*B*	*B*	*B*	*S*	*B*	*B*	*B*	*S*	*S*
S	*B*	*S*	*B*	*S*	*S*	*B*	*B*	*S*	*S*
S	*S*	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*	*S*	*S*
S	*S*	*S*	*B*	*B*	*S*	*B*	*B*	*S*	*S*

Berdasarkan hasil kesimpulan dari tabel yang ditunjukkan pada kolom terakhir nilai kebenaran selalu *S* (salah), jadi proposisi tersebut merupakan suatu **kontradiksi**.

Contoh 3.13:

Menentukan nilai kebenaran dari $((p \rightarrow r) \vee (p \rightarrow {\sim}q)) \wedge r$ dengan menggunakan tabel kebenaran. Sebelum membuat tabel kebenaran kita dapat menyederhanakan pernyataan majemuk sebagai berikut.

$p \rightarrow r = A$

$p \rightarrow {\sim}q = C$

$A \vee C = D$

$D \wedge r = E$

Karena ada 3 proposisi tunggal yaitu p,q dan r maka terdapat 8 nilai yang mungkin terjadi, hal ini dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 3.18 Nilai Kebenaran dari $((p \rightarrow r) \vee (p \rightarrow {\sim}q)) \wedge r$

p	*q*	*r*	*~q*	*A*	*C*	*D*	*E*
B	*B*	*B*	*S*	*B*	*S*	*B*	*S*
B	*B*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*
B	*S*	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*
B	*S*	*S*	*B*	*S*	*B*	*B*	*S*
S	*B*	*B*	*S*	*B*	*B*	*B*	*B*
S	*B*	*S*	*S*	*B*	*B*	*B*	*S*
S	*S*	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*
S	*S*	*S*	*B*	*B*	*B*	*B*	*S*

Berdasarkan hasil kesimpulan dari tabel di atas yang ditunjukkan pada kolom terakhir memiliki nilai kebenaran *B* (benar) dan (salah) *S*, jadi proposisi tersebut merupakan suatu **kontingen**.

b. Metode Deduksi

Secara umum KLP dapat dibuktikan validitasnya melalui tabel kebenaran dan pohon semantik. Selanjutnya akan dijelaskan cara khusus pembuktian validitas argumen yang disebut metode deduksi. Pembuktian dengan metode deduksi akan menggunakan salah satu atau kombinasi dari beberapa aturan dari bentuk penalaran sederhana (aturan penyimpulan) dan aturan pertukaran (ekuivalensi).

- Penalaran Sederhana (Aturan Penyimpulan)

  Penalaran merupakan langkah penting yang harus dilakukan seseorang sebelum menyatakan suatu pernyataan. Penalaran yang tepat akan menghasilkan suatu pernyataan yang valid. Penalaran selalu memperhatikan lebih dahulu proposisi – proposisi pendukung yang dijadikan sebagai premis, yang kemudian dinilai sehingga didapat suatu konklusi (kesimpulan). Adapun tahapan penalaran sebagai berikut:

(1) Menentukan proposisi – proposisi pendukung sebagai premis
(2) Melakukan penyimpulan
    a) Menilai hubungan antar proposisi – proposisi di dalam premis tersebut
    b) Menentukan konklusi

$$\left.\begin{array}{l}\text{proposisi 1}\\ \text{proposisi 2}\\ \quad\vdots\\ \text{proposisi n}\end{array}\right\}\text{(premis)}$$
$$\overline{\overline{\therefore \text{ proposisi baru}}} \rightarrow \text{(konklusi)}$$

Lambang dari penalaran dapat berbentuk bahasa atau simbol lainnya (misal simbol logika matematika). Lambang dari penalaran ini disebut pernyataan.

Beberapa bentuk argumen valid (aturan penyimpulan) yang telah diketahui dapat dilihat sebagai berikut:

(1) Simplikasi : $\dfrac{p \wedge q}{\therefore p}$ atau $\dfrac{p \wedge q}{\therefore q}$

(2) Konjungsi : $\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$

(3) Addisi : $\dfrac{p}{\therefore p \vee q}$

(4) Silogisme Disjungtif : $\begin{array}{c} p \vee q \\ \sim p \\ \hline \therefore q \end{array}$ atau $\begin{array}{c} p \vee q \\ \sim q \\ \hline \therefore p \end{array}$

(5) Silogisme Eksklusif : $\begin{array}{c} p \oplus q \\ p \\ \hline \therefore \sim q \end{array}$ atau $\begin{array}{c} p \oplus q \\ q \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$

(6) Absorpsi : $\dfrac{p \rightarrow q}{\therefore p \rightarrow (p \wedge q)}$

(7) Modus Ponen : $\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$

(8) Modus Tollens : $\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$

(9) Silogisme Hipotetik : $p \to q$

$$\begin{array}{l} q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$$

(10) Reductio Ad Absurdum (Kontradiksi) : $\sim p \to q$

$$\begin{array}{l} \sim q \\ \hline \therefore \sim(\sim p) \cong p \end{array}$$

(11) Dilemma Konstruktif : $p \to q \qquad r \to s$

$$\begin{array}{l} p \vee r \\ \hline \therefore q \vee s \end{array}$$

(12) Dilemma Desktruktif : $p \to q \qquad r \to s$

$$\begin{array}{l} \sim q \vee \sim s \\ \hline \therefore \sim p \vee \sim r \end{array}$$

- Aturan Pertukaran (Ekuivalensi)
  Dua proposisi atau dua proposisi majemuk disebut ekuivalen jika mempunyai nilai kebenaran yang sama. Dua proposisi p dan q yang ekuivalen dinotasikan $p \cong q$. Jika sebagian atau keseluruhan proposisi atau proposisi majemuk ditukar dengan proposisi atau proposisi majemuk yang ekuivalen secara logis maka nilai kebenaran proposisi atau proposisi majemuk yang baru adalah sama dengan nilai kebenaran proposisi atau proposisi majemuk semula. Beberapa aturan dalam aturan pertukaran (ekuivalensi) sebagai berikut:

  (1) Hukum Negasi Ganda : $p \cong \sim(\sim p)$

  (2) Komutatif : $p \wedge q \cong q \wedge p$
  $p \vee q \cong q \vee p$

  (3) Asosiasi : $p \wedge (q \wedge r) \cong (p \wedge q) \wedge r$
  $p \vee (q \vee r) \cong (p \vee q) \vee r$

  (4) Distribusi : $p \wedge (q \vee r) \cong (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
  $p \vee (q \wedge r) \cong (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

  (5) Konjungsi Ekuivalensi : $p \wedge q \cong \sim(p \to \sim q)$

  (6) Disjungsi Ekuivalensi : $p \vee q \cong \sim p \to q$

  (7) a. Implikasi : $p \to q \cong \sim(p \wedge \sim q)$
  b. Material Implikasi : $p \to q \cong \sim p \vee q$
  c. Kontraposisi : $p \to q \cong \sim q \to \sim p$

(8) a. Biimplikasi : $p \leftrightarrow q \cong (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
b. Material Ekuivalensi : $p \leftrightarrow q \cong (p \wedge q) \vee ({\sim}p \wedge {\sim}q)$

(9) Dalil De Morgan : ${\sim}(p \wedge q) \cong {\sim}p \vee {\sim}q$
: ${\sim}(p \vee q) \cong {\sim}p \wedge {\sim}q$

(10) Eksportasi : $(p \wedge q) \rightarrow r \cong p \rightarrow (q \rightarrow r)$

(11) Tautologi (Idempoten) : $p \cong (p \vee p) \cong (p \wedge p)$

(12) Hukum identitas : $p \wedge B \cong p \cong p \vee S$
$p \wedge S \cong S$
$p \vee B \cong B$

(13) Hukum Komplemen : $p \wedge {\sim}p \cong S$
$p \vee {\sim}p \cong B$

Setelah dibahas terkait aturan penyimpulan dan aturan pertukaran, selanjutnya kita akan bahas mengenai metode deduksi. Dalam pembuktian dengan menggunakan metode deduksi, semua premis pendukung pernyataan harus dilibatkan dalam uraian pembuktian.

Contoh 3.14:
Menyelidiki argumen dari "jika kita bekerja maka kita akan mendapatkan uang. Jika kita mendapatkan uang maka kita bisa belikan sepatu. Kita bekerja. Jadi kita bisa belikan sepatu" valid atau tidak. Berdasarkan pernyataan tersebut, pertama kita dapat melakukan penjabaran sebagai berikut.

Jika $\underbrace{\text{kita bekerja}}_{p}$ **maka** $\underbrace{\text{kita akan mendapatkan uang}}_{q}$

Jika $\underbrace{\text{kita mendapatkan uang}}_{q}$ **maka** $\underbrace{\text{kita bisa belikan sepatu}}_{r}$

$\underbrace{\text{Kita bekerja}}_{p}$

Jadi $\underbrace{\text{Kita bisa belikan sepatu}}_{r}$

Dilambangkan : $p \rightarrow q$
$q \rightarrow r$
p
$\overline{\therefore r}$

Dengan metode deduksi dinyatakan:

a. $p \to q$ premis 1
b. $q \to r$ premis 2
c. p premis 3
d. $\therefore$ r konklusi

Libatkan premis 1 lalu premis 2 dan gunakan salah satu aturan penyimpulan yaitu silogisme hipotetik sehingga menghasilkan suatu proposisi majemuk yang baru yaitu . Selanjutnya dengan menggunakan premis baru libatkan dengan premis 3 dengan menggunakan modus ponen sehingga menghasilkan proposisi baru yaitu , dimana adalah konklusi yang dituju. Karena konklusi didapat maka pembuktian selesai dengan argumen dinyatakan valid. Secara lengkap langkah – langkah metode deduksi untuk kasus ini sebagai berikut.

a. $p \to q$ premis 1
b. $q \to r$ premis 2
c. p premis 3
d. $p \to r$ premis 4 (premis 1 dan 2 menggunakan silogisme hipotetik)
e. r konklusi (premis 3 dan 4 menggunakan modus ponen)
   Jadi, KLP tersebut valid.

Berdasarkan langkah di atas, metode deduksi terlihat lebih sederhana, namun dalam menggunakan metode deduksi perlu mengandalkan intuisi, sebab tidak ada aturan baku dalam penempatan aturan penyimpulan maupun aturan pertukaran tertentu pada saat pembuktian. Bila argumen ingin dibuktikan dengan tabel kebenaran, pohon semantik atau strategi pembalikan, maka simbol logika perlu dibuat dalam bentuk rangkaian terlebih dahulu. Penghubung antara proposisi atau proposisi majemuk satu dengan yang lain pada premis dihubungkan dengan operator konjungsi ($\wedge$). Penghubung premis dengan konklusi digunakan operasi implikasi ($\rightarrow$). Oleh karena itu untuk kasus contoh di atas didapat rangkaian KLP sebagai berikut: $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge p) \rightarrow r$.

5. Logika Predikat

Jika terdapat pernyataan "$x > 5$" atau "x adalah lebih besar dari 5" maka terdapat dua bagian, yaitu pertama variabel "x" dan yang kedua predikat "adalah lebih besar dari 5". Pernyataan tersebut disebut fungsi proposisi P pada x disimbolkan $P(x)$, sehingga pernyataan tersebut dapat ditulis $P(x)$: $x > 5$. Jika nilai x tidak diketahui maka $P(x)$ merupakan kalimat terbuka. Artinya agar kalimat terbuka "$P(x)$" menjadi proposisi (pernyataan) maka semua variabel bebas di dalamnya diganti dengan suatu konstanta.

Contoh 3.15:

(1) Jika $P(x) = 3 + x < 7$ didefinisikan pada A = himpunan bilangan asli, maka P(x) bernilai benar untuk x = 1, 2, 3.

(2) Jika $Q(x) = 3 + x < 3$ didefinisikan pada A= himpunan bilangan asli, maka tidak ada x yang menyebabkan $Q(x)$ bernilai benar.

Selain dengan mengganti variabel dengan konstanta, dalam mengubah kalimat terbuka menjadi proposisi, salah satu cara lain dalam mengubah suatu kalimat terbuka menjadi suatu pernyataan yang mempunyai nilai kebenaran yaitu dengan menggunakan kuantor. Ada dua jenis kuantor, yaitu kuantor universal (kuantor umum) dan kuantor eksistensial (kuantor khusus).

a. Kuantor Universal

Kuantor universal memiliki lambang ($\forall_x$) dibaca "untuk semua x berlaku" atau "untuk setiap x berlaku". Misalkan $P(x)$ adalah suatu kalimat terbuka, maka pernyataan $\forall_x P(x)$ dibaca "untuk semua x berlaku $P(x)$" atau "untuk setiap x berlaku $P(x)$". Ingkaran dari pernyataan berkuantor $\sim(\forall x) \cong \exists(\sim x)$.

Contoh 3.16:

(1) $x \in R$, $P(x)$: $x < 2$, maka $\forall_x P(x)$: dibaca "untuk setiap bilangan riil x berlaku $x < 2$. Misalkan $x = 1$ maka $P(1)$ bernilai benar, namun jika $x = 3$ maka $P(3)$ bernilai salah. Jadi $\forall_x P(x)$ bernilai salah.

(2) $x \in R$, $P(x)$: $x < 2 + x$, maka $\forall_x P(x)$: dibaca "untuk setiap bilangan riil x berlaku $x < 2 + x$. Setiap pemisalan x memenuhi $< 2 + x$. Jadi $\forall_x P(x)$ bernilai benar.

b. Kuantor Eksistensial

Kuantor eksistensial memiliki lambang ($\exists_x$) dibaca "terdapat suatu x berlaku". Misalkan $P(x)$ adalah suatu kalimat terbuka, maka pernyataan $\exists_x P(x)$ dibaca "terdapat suatu x berlaku $P(x)$". Ingkaran dari pernyataan berkuantor $\sim(\exists x) \cong \forall (\sim x)$.

Contoh 3.17:

(1) $x \in R$, $P(x)$: $x < 2$, maka $\exists_x P(x)$: dibaca "terdapat bilangan riil x berlaku $x < 2$. Misalkan pilih $x = 1$ maka $P(1)$ bernilai benar. Jadi $\exists_x P(x)$ bernilai benar.

(2) $x \in R$, $P(x)$: $x = 2 + x$, maka $\exists_x P(x)$: dibaca "terdapat bilangan riil x berlaku $x = 2 + x$. Setiap pemisalan x, tidak ada yang memenuhi $x = x + 1$. Jadi $\exists_x P(x)$ bernilai salah.

Selanjutnya kita akan pelajari cara mengkonversi kalimat ke dalam ekspresi logika predikat, dapat dilihat pada contoh sebagai berikut.

Contoh 3.18:

(1) Semua singa adalah buas

P(x) : *x* adalah singa

Q(x) : x adalah makhluk buas

Jadi $\forall_x (P(x) \rightarrow Q(x))$

(2) Beberapa singa tidak buas

P(x) : *x* adalah singa

Q(x) : x adalah makhluk buas

Jadi $\exists_x (P(x) \wedge \sim Q(x))$

(3) Beberapa singa tidak minum kopi

P(x) : *x* adalah singa

R(x) : x adalah minum kopi

Jadi $\exists_x (P(x) \wedge \sim R(x))$

(4) Beberapa makhluk buas tidak minum kopi.

Q(x) : x adalah makhluk buas

R(x) : x adalah minum kopi

Jadi $\exists_x (Q(x) \wedge \sim R(x))$

Setelah mempelajari cara mengkonversi kalimat ke dalam ekspresi logika predikat selanjutnya, kita akan pelajari hubungan negasi kalimat berkuantor yang akan dijelaskan sebagai berikut.

(1) $\sim\forall_x P(x) \cong \exists_x \sim P(x)$

$\sim\exists_x P(x) \cong \forall_x \sim P(x)$

(2) $\forall_x \forall_y P(x,y) \cong \forall_y \forall_x (Px,y)$

$\exists_x \exists_y P(x,y) \cong \exists_y \exists_x P(x,y)$

(3) $\sim\left(\forall_x \exists_y P(x,y)\right) \cong \exists_x \forall_y \sim P(x,y)$

$\sim\left(\exists_x \forall_y P(x,y)\right) \cong \forall_x \exists_y \sim P(x,y)$

(4) $\sim\forall_x\big(P(x) \rightarrow Q(x)\big) \cong \exists_x\big(P(x) \wedge \sim Q(x)\big)$

$\sim\exists_x \big(P(x) \wedge Q(x)\big) \cong \forall_x\big(P(x) \rightarrow \sim Q(x)\big)$

Contoh 3.19:

(1) Menentukan nilai kebenarannya dan negasinya dari $\exists_x (x^2 + x + 1 = 0)$

Perhatikan tidak ada akar – akar dari persamaan $x^2 + x + 1 = 0$, dimana $x \in R$. Sehingga pernyataan dari $\exists_x$ (*x*^2 + *x* + 1 = 0) bernilai *S* (salah).

Negasi dari $\exists_x (x^2 + x + 1 = 0)$ adalah $\forall (x^2 + x + 1 \neq 0)$ dengan nilai kebenarannya adalah *B* (benar).

(2) Menentukan nilai kebenaran dan negasinya dari $\exists_y \forall_x (x^2 - y < 3)$.
Perhatikan tidak ada nilai y yang memenuhi persamaan $x^2 - y < 3$, untuk setiap $x \in R$. Sehingga pernyataan dari $\exists_y \forall_x (x^2 - y < 3)$ bernilai S (salah).

Negasi dari $\exists_y \forall_x (x^2 - y < 3)$ adalah $\forall_y \exists_x (x^2 - y \geq 3)$ dengan nilai kebenarannya adalah B (benar). Karena setiap nilai $y \in R$ pasti ada nilai $x \in R$ yang memenuhi $x^2 - y \geq 3$.

(3) Menentukan nilai kebenaran dan negasinya dari $\forall_x \exists_y (x^2 - y < 3)$.
Perhatikan untuk setiap nilai $x \in R$ yang memenuhi persamaan $x^2 - y < 3$, pasti terdapat nilai $y \in R$. Sehingga pernyataan dari $\forall_x \exists_y (x^2 - y < 3)$ bernilai B (benar).

Negasi dari $\forall_x \exists_y (x^2 - y < 3)$ adalah $\exists_y \forall_x (x^2 - y \geq 3)$ dengan nilai kebenarannya adalah S (salah). Karena tidak ada nilai y yang memenuhi persamaan $\exists_y \forall_x (x^2 - y \geq 3)$ untuk setiap nilai $\in R$.

C. PENUTUP

1. Rangkuman

a. Logika merupakan salah satu bidang ilmu yang mengkaji prinsip – prinsip penalaran yang benar dan penarikan kesimpulan yang sah.

b. Ada dua tipe penalaran dalam matematika, yaitu penalaran deduktif dan penalaran induktif.

c. Proposisi adalah pernyataan yang bernilai benar atau bernilai salah, tetapi tidak sekaligus bernilai kedua – duanya.

d. Proposisi juga dapat dikatakan kalimat tertutup.

e. Pernyataan yang dapat diubah menjadi proposisi dengan mengganti variabel dengan suatu nilai, kita sebut kalimat terbuka.

f. Negasi suatu proposisi adalah suatu proposisi yang bernilai salah apabila proposisi semula bernilai benar, dan bernilai benar apabila proposisi semula bernilai salah. Notasi "~" dapat dibaca "tidak", "bukan", "tidak benar".

g. Proposisi majemuk terbentuk dari dua atau lebih proposisi yang dihubungkan dengan kata penghubung/perangkat logika.

h. Proposisi – proposisi yang dirangkai dalam proposisi majemuk disebut proposisi tunggal.

i. Contoh Kata penghubung adalah "dan", "atau", "jika … maka …" dan "… jika dan hanya jika …".

j. Nilai Kebenaran dari masing – masing kata penghubung

Proposisi Majemuk	Lam-bang	Kata Penghubung	Nilai Kebenaran yang Hasilnya Salah	
			p	**q**
Konjungsi	$\wedge$	Dan, Tetapi, Meskipun	B	S
			S	B
			S	S
Disjungsi (Inklusif)	$\vee$	Atau, Ataupun	S	S
Disjungsi (Eksklusif)	$\oplus$	Atau	B	B
			S	S
Implikasi	$\rightarrow$	Jika … maka … Akibatnya …	B	S
Biimplikasi	$\leftrightarrow$	… Jika dan hanya jika …	B	S
			S	B

k. Jika diketahui $p \rightarrow q$ maka:
   a. konversnya adalah $q \rightarrow p$
   b. inversnya adalah $\sim p \rightarrow \sim q$
   c. kontrapositifnya adalah $\sim q \rightarrow \sim p$

l. Ekuivalen dari $p \rightarrow q$ adalah $\sim q \rightarrow \sim p$ dan $\sim p \vee q$

m. Ada dua jenis kuantor, yaitu kuantor universal (kuantor umum) dan kuantor eksistensial (kuantor khusus).

n. Kuantor universal memiliki lambang ($\forall_x$) dibaca "untuk semua *x* berlaku" atau "untuk setiap *x* berlaku".

o. Kuantor eksistensial memiliki lambang ($\exists_x$) dibaca "terdapat suatu *x* berlaku". Misalkan $P(x)$ adalah suatu kalimat terbuka, maka pernyataan dibaca "terdapat suatu *x* berlaku $P(x)$".

2. Tes Formatif

1. Tentukan mana yang merupakan kalimat terbuka, proposisi yang bernilai benar dan proposisi yang bernilai salah!
   a. Ambil buku tersebut!
   b. Siapa dosen tersebut?

c. $x + 5 = 0$
d. $x + 5 = 0$, dengan $x < -5$
e. $x + 5 = 0$, dengan $x = -5$

2. Tentukan mana yang merupakan kalimat terbuka, proposisi yang bernilai benar dan proposisi yang bernilai salah!
   a. Rajin pangkal pandai.
   b. Setiap bilangan riil pasti bilangan bulat
   c. $3x \leq 9$ dengan $x = 3$
   d. Seorang itu adalah dosen matematika
   e. $2x + y = 7$

3. Buat negasi/ingkaran dari proposisi – proposisi berikut.
   a. $-5 + 5 = 0$
   b. $-5 + 5 < 0$
   c. Hari ini hujan.
   d. Saya tidak mengikuti ujian akhir.
   e. Semua mahasiswa belajar matematika dasar.

4. Diketahui proposisi – proposisi berikut.
   p : Saya lulus ujian.
   q : Saya masuk perguruan tinggi.
   r : Saya menjadi mahasiswa.

   Ekspresikan logika berikut ke dalam bentuk kalimat:
   a. $\sim r$
   b. $\sim p \rightarrow \sim q$
   c. $(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge p)$
   d. $p \leftrightarrow q$
   e. $\sim p \vee r$

5. Diketahui proposisi – proposisi berikut.
   p : Saya belajar matematika dasar.
   q : Saya mendapatkan nilai tertinggi.

   Ekspresikan dalam lambang logika proposisi majemuk untuk:
   a. Saya belajar matematika dasar dan mendapatkan nilai tertinggi.
   b. Saya belajar matematika dasar tetapi tidak mendapat nilai tertinggi.
   c. Saya tidak belajar matematika dasar dan saya tidak mendapatkan nilai tertinggi.
   d. Jika saya belajar matematika dasar maka saya akan mendapatkan nilai tertinggi.
   e. Saya belajar matematika dasar atau mendapatkan nilai tertinggi, tetapi saya mendapatkan nilai tertinggi jika saya belajar matematika dasar.

6. Diketahui proposisi –proposisi berikut.
   p : Saya masuk ke ruangan perpustakaan
   q : Saya mencari buku matematika dasar
   r : Saya meminjam buku di perpustakaan

   Ekspresikan dalam lambang logika proposisi majemuk berikut:
   a. Saya tidak masuk ke ruangan perpustakaan tetapi saya ingin mencari buku matematika dasar. Jadi saya harus masuk ke ruangan perpustakaan.
   b. Saya masuk ke ruangan perpustakaan dan mencari buku matematika dasar tetapi tidak meminjam buku di perpustakaan atau saya masuk ke ruangan perpustakaan dan mencari buku matematika dasar dan meminjam buku di perpustakaan.

7. Tunjukkan dengan tabel kebenaran ekuivalensi dari $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$

8. Tunjukkan dengan tabel kebenaran ekuivalensi dari $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r)$

9. Tunjukkan dengan tabel kebenaran ekuivalensi dari $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

10. Tunjukkan dengan tabel kebenaran ekuivalensi dari $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

11. Tunjukkan dengan tabel kebenaran ekuivalensi dari $(p \wedge q) \rightarrow r = p \rightarrow (q \rightarrow r)$

12. Tentukan manakah yang merupakan tautologi, kontradiksi, atau kontingen untuk proposisi – proposisi majemuk berikut! (Gunakan tabel kebenaran)
    a. $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$
    b. $((p \vee q) \oplus (r \wedge p)) \rightarrow \sim r$
    c. $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \wedge \sim (p \rightarrow q)$

13. Buktikan dengan metode deduksi, validitas argumen dari "Jika mahasiswa rajin belajar, maka ia menjadi pintar. Jika menjadi mahasiswa bodoh, maka masa depannya tidak cerah. Mahasiswa rajin belajar atau menjadi mahasiswa bodoh. Jadi, mahasiswa harus menjadi pintar atau mempunyai masa depan yang tidak cerah."

14. Tentukan nilai kebenaran dan negasi dari $\forall_x \exists_y \left(\frac{y}{x} = 3\right)$!

15. S (x, y) merupakan pernyataan "x menyayangi y", jika x dan y merupakan himpunan seluruh manusia di dunia, ekspresikan pernyataan "tidak ada orang yang menyayangi setiap orang" ke dalam bentuk logika predikat!

3. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Cocokanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif yang terdapat dibagian akhir bahan belajar ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi ini.

$$\text{Tingkat penguasaan}(x) = \frac{\text{Jumlah jawaban yang benar}}{\text{Jumlah pertanyaan}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan:

$100\% \leq x < 90\%$	baik sekali
$90\% \leq x < 80\%$	baik
$80\% \leq x \leq 70\%$	cukup
$x < 70\%$	kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan materi bahan belajar selanjutnya. Jika masih di bawah 80% Anda harus mengulangi materi bab ini, terutama bagian yang belum dikuasai.

SELF EVALUATION

Selanjutnya mohon menjawab dengan jujur dan bertanggung jawab dengan memberikan tanda “✓” pada jawaban “Ya” atau ”Tidak”

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1	Saya mampu menjelaskan konsep dasar materi logika		
2	Saya mampu membuktikan tabel kebenaran logika		
3	Saya mampu menyelesaikan masalah sehari-hari terkait logika		

Setelah anda melakukan “**self evaluation**” dengan jujur dan bertanggung jawab, mohon melakukan pengulangan pembelajaran secara mandiri pada bagian yang anda jawab “tidak”, anda dapat berdiskusi dengan rekan anda dan meminta bantuan dosen untuk lebih memahami. Akan tetapi, anda dapat melanjutkan ke pembelajaran selanjutnya untuk bagian jawaban “ya”

GLOSARIUM

Logika	: salah satu bidang ilmu yang mengkaji prinsip – prinsip penalaran yang benar dan penarikan kesimpulan yang sah.
Penalaran induktif	: menyusun data sedemikian hingga dapat ditarik suatu kesimpulan yang berlaku umum
Proposisi	: pernyataan yang bernilai benar atau bernilai salah, tetapi tidak sekaligus bernilai kedua – duanya.
Tabel kebenaran	: tabel yang menunjukkan secara sistematis satu demi satu nilai – nilai kebenaran sebagai hasil kombinasi dari proposisi tunggal

BAHAN BELAJAR 4

RELASI, FUNGSI, DAN PERSAMAAN LINIER

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat Materi

Pokok-pokok materi yang dibahas dalam modul ini adalah relasi, fungsi, dan persamaan linier. Tiga pokok ini merupakan materi yang wajib mahasiswa PGSD kuasai untuk modal mereka dalam memberikan ilmunya kelak ke siswa. Adapun hubungan materi ini dengan surat di Al Qur'an yaitu pada surat Al A'raf ayat 29 yang berbunyi:

قُلْ أَمَرَ رَبِّي بِالْقِسْطِ ۖ وَأَقِيمُوا وُجُوهَكُمْ عِندَ كُلِّ مَسْجِدٍ
وَادْعُوهُ مُخْلِصِينَ لَهُ الدِّينَ ۚ كَمَا بَدَأَكُمْ تَعُودُونَ ﴿٢٩﴾

Artinya: Katakanlah: "Tuhanku menyuruh menjalankan keadilan". Dan (katakanlah): "Luruskanlah muka (diri)mu di setiap sembahyang dan sembahlah Allah dengan mengikhlaskan ketaatanmu kepada-Nya. Sebagaimana Dia telah menciptakan kamu pada permulaan (demikian pulalah kamu akan kembali kepada-Nya)".

Tanpa disadari, kita sering menggunakan perhitungan aljabar dalam kehidupan sehari-hari. Banyak manfaat dalam kehidupan sehari-hari yang dapat diambil pada saat kita mempelajari relasi, fungsi, dan persamaan linier. Misalnya untuk relasi dan fungsi berkaitan dengan istilah hubungan atau koneksi. Kita makan di restoran dan kita memesan paketan makanan, secara tidak langsung kita masuk ke dunia ilmu persamaan, karena kita dapat mengetahui harga masing – masing makanan. Bukan hanya dalam kehidupan sehari-hari manfaat dari mempelajari relasi, fungsi dan persamaan linier, tetapi juga pada ilmu lain, seperti fisika (menghubungkan Temperatur Celcius dengan Farenheit), Programer (penerapan Turbo Pascal, yaitu mesin pengambilan antrian/nomor pelanggan), Game Maker (penempatan letak karakter, penempatan objek-objek tertentu yang berada di game tersebut), Ekologi (untuk mengetahui asumsi populasi makhluk hidup), dll. Begitu banyak manfaat ilmu lainnya jika dipelajari.

2. **CPMK**

   Penulis berharap bagi pembaca yang telah mempelajari bahan belajar ini, secara umum diharapkan dapat menjelaskan konsep – konsep dan prinsip – prinsip dari relasi, fungsi dan persamaan linier. Adapun capaian pembelajaran mata kuliah (CPMK) pada bahan belajar ini sebagai berikut. Mahasiswa mampu memahami konsep dan penerapan Relasi, Fungsi dan Persamaan Linear.

3. **Sub CPMK**

   Berdasarkan CPMK yang telah dirancang, selanjutnya berikut merupakan sub – CPMK yang telah dirancang
   a. Mahasiswa mampu menjelaskan konsep relasi.
   b. Mahasiswa mampu menjelaskan konsep fungsi.
   c. Mahasiswa mampu menjelaskan konsep persamaan linier.

4. **Tujuan Pembelajaran**

   Setelah membaca dan mengikuti serangkaian kegiatan pada bagian ini, mahasiswa diharapkan mampu:
   a. Menjelaskan konsep dasar relasi dengan benar.
   b. Menjelaskan konsep dasar fungsi dengan benar.
   c. Mengidentifikasi sifat-sifat fungsi dengan benar.
   d. Terampil dalam menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan kombinasi fungsi dengan tepat.
   e. Terampil dalam menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan komposisi fungsi dengan tepat.
   f. Terampil dalam menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan fungsi invers dengan tepat.
   g. Menjelaskan konsep dasar persamaan linier dengan benar.
   h. Terampil dalam menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan persamaan linier dan persamaan linier simultan dengan tepat.

5. **Petunjuk pengunaan modul**

   Bacalah petunjuk penggunaan modul berikut!
   a. Bacalah dan pahami materi yang ada pada bahan belajar ini.
   b. Kerjakan setiap tugas diskusi terhadap materi-materi yang dibahas dalam bahan belajar ini.
   c. Jika belum menguasai level materi yang diharapkan, ulangi lagi pada bahan belajar sebelumnya atau bertanyalah kepada dosen.

B. KEGIATAN BELAJAR

1. Konsep Dasar Relasi

Dalam sistem koordinat kartesius dengan sumbu x dan sumbu y, kita mengetahui bahwa titik dengan koordinat (7,6) tidaklah sama dengan titik koordinat (6,7). Dalam hal koordinat titik tersebut ternyata bahwa urutan pasangan bilangan itu harus diperhatikan, karena urutan yang berlainan akan menentukan letak titik dalam bidang *XOY* yang berbeda pula.

Pasangan terurut adalah sepasang bilangan x dan y dengan x dalam urutan pertama dan y dalam urutan kedua, dapat ditulis sebagai (x,y). Berbeda dengan pasangan terurut, bahwa himpunan $\{x,y\}$ sama dengan himpunan $\{y,x\}$, dimana urutan tidak dipentingkan.

Misalkan $A \times B$ adalah produk Kartesius himpunan A dan B, maka relasi atau hubungan R dari A ke B adalah sembarang himpunan bagian dari produk Kartesius $A \times B$. Dalam hal ini, jika $A = B$ maka R kita katakan relasi pada A. Pada relasi R dari A ke B kita definisikan.

a. Himpunan ordinat pertama dari pasangan terurut (x,y) disebut daerah asal (*domain*).
b. Himpunan B, disebut daerah kawan (*kodomain*).
c. Himpunan bagian dari B yang bersifat, setiap $y \in B$ dengan $(x,y) \in R$ disebut daerah hasil (range) relasi R.

Suatu relasi $R = \{(x,y) \mid x \in A \text{ "dan " } x \in B\}$ dapat dinyatakan dalam berbagai bentuk. Hal ini dapat dilihat sebagai berikut.

a. Himpunan Pasangan Berurutan

Relasi antara anggota dua himpunan dan dapat dinyatakan sebagai pasangan berurutan (x,y) dengan $x \in A$ dan $y \in B$ yang berpasangan.

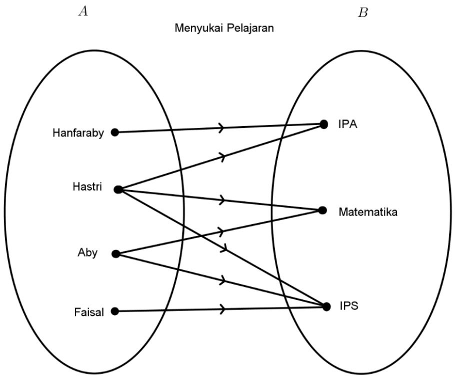
Contoh 4.1

Misalkan A = {Aby, Faisal, Hanfaraby, Hastri} dan B = {IPA, IPS, Matematika}. Berikut suatu relasi dari A ke B yang dinyatakan sebagai himpunan pasangan berurutan, yaitu R = {(Hanfaraby, IPA), (Hastri, IPA), (Hastri, Matematika), (Hastri, IPS), (Aby, Matematika), (Aby, IPS), (Faisal, IPS)}.

b. Diagram panah

Relasi dari A ke B yang dinyatakan menggunakan diagram panah menggunakan tanda panah antara anggota A dan B. Tanda panah menyatakan pasangan anggota – anggota yang berelasi, dan arah panah menunjukkan arah relasi tersebut, yaitu dari A ke B. Arah itu tidak boleh terbalik, sebab relasi dari *A* ke *B* berbeda dengan relasi dari *B* ke *A*.

Contoh 4.2
Berdasarkan contoh dari 4.1 dapat dinyatakan dalam bentuk diagram panah yang dapat dilihat sebagai berikut.



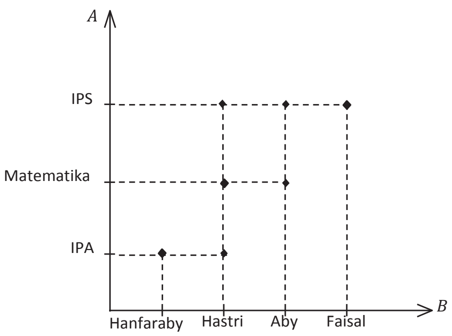
Gambar 4.1 Contoh Diagram Panah

c. Koordinat Kartesuis

Himpunan *A* dan *B* dapat dinyatakan dengan koordinat kartesius. Diagram kartesius adalah bidang yang digambarkan oleh dua buah garis yang saling tegak lurus, yaitu garis lurus mendatar (*horisontal*) dan garis lurus tegak (*vertikal*) yang berpotongan pada suatu titik.

Sehingga anggota himpunan *A* sebagai himpunan pertama berada pada sumbu mendatar (*horisontal*) dan anggota himpunan *B* sebagai himpunan kedua berada pada sumbu tegak (*vertikal*). Setiap pasangan anggota himpunan pertama yang berelasi dengan anggota himpunan kedua dinyatakan dengan sebuah noktah.

Contoh 4.3
Berdasarkan contoh dari 4.1 relasi R dapat dinyatakan dalam bentuk koordinat kartesius yang dapat dilihat sebagai berikut.



Gambar 4.2 Contoh Koordinat Kartesius

d. Tabel

Dalam mempresentasikan relasi ke dalam bentuk tabel, kita dapat mendefinisikan pada kolom pertama sebagai daerah asal (*domain*) dan pada kolom kedua sebagai daerah hasil (*range*).

Contoh 4.4

Berdasarkan contoh dari 4.1 relasi R dinyatakan dalam bentuk tabel yang dapat dilihat sebagai berikut.

Tabel 4.1 Relasi Menyukai Pelajaran

A	B
Hanfaraby	IPA
Hastri	IPA
Hastri	Matematika
Hastri	IPS
Aby	Matematika
Abu	IPS
Faisal	IPS

e. Matriks

Misalkan terdapat suatu himpunan $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ dan himpunan $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m\}$ maka representasi suatu relasi yang menyatakan hubungan antara himpunan A dan himpunan B adalah $H = [h_{ij}]$, dimana jika terdapat hubungan Antara a_i dan b_j maka h_{ij} diberi nilai 1 dan jika tidak h_{ij} diberi nilai 0. Perhatikan matriks berikut.

$$H = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1m} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nm} \end{bmatrix} \end{array}$$

Contoh 4.5

Berdasarkan contoh dari 4.2 relasi yang dinyatakan dalam bentuk matriks dapat dilihat sebagai berikut.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Setiap relasi R dari himpunan A ke himpunan B yang didefinisikan $R = \{(x, y) | x \in A \text{ dan } x \in B\}$ selalu mempunyai relasi invers R^{-1} dari himpunan B ke himpunan A yang didefinisikan $R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$. Sehingga kita dapat katakan bahwa R^{-1} adalah himpunan semua pasangan terurut yang bersifat bahwa jika urutan anggota dalam pasangan itu ditukar maka pasangan terurut yang baru ini adalah anggota R. Jadi jika R sebuah relasi dari A ke B maka R^{-1} adalah sebuah relasi dari B ke A.

Contoh 4.6

1) Misalkan $A = \{a, b, c\}$ dengan relasi $R = \{(a, b), (a, c), (c, b)\}$ adalah sebuah relasi dari pada A sehingga inversnya adalah $R^{-1} = \{(b, a), (c, a), (c, b)\}$.

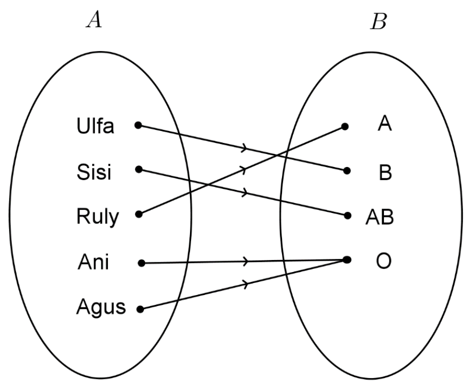
2) Misalkan $B = \{1, 2, 3\}$ dan $C = \{d, e\}$ dengan relasi $R = \{(1, d), (1, e), (2, e), (3, d)\}$ adalah sebuah relasi dari B ke C. Kita miliki bahwa inversnya adalah $R^{-1} = \{(d, 1), (e, 1), (e, 2), (d, 3)\}$.

2. Konsep Dasar Fungsi

Pada bagian sebelumnya telah dibahas kajian mengenai relasi, selanjutnya kita membahas fungsi yang merupakan kasus khusus dari suatu relasi. Misalkan A dan B suatu himpunan. Secara formal, fungsi dari A ke B, ditulis $f : A \rightarrow B$, adalah suatu relasi dari A ke B yang memasangkan setiap anggota dari A dengan tepat satu anggota B.

Jika f adalah suatu fungsi dari A ke B dan $a \in A$ maka pasangan dari a di B disebut peta dari a dan kita notasikan $f(a)$, himpunan A disebut domain dari f (D_f) dan himpunan B disebut kodomain dari f (K_f). Himpunan semua anggota di B yang mempunyai pasangan di A disebut Range (R_f).

Suatu fungsi f dari A ke B dapat dinotasikan oleh $f : A \rightarrow B$ dengan $D_f = A$, $K_f = B$. Perhatikan diagram panah berikut:

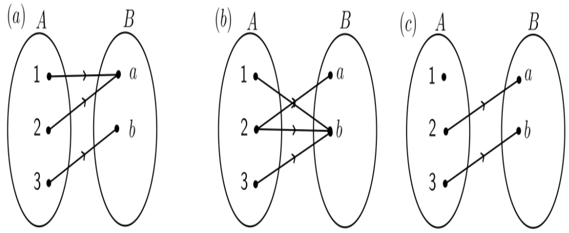


Gambar 4.3 Contoh Konsep Dasar Fungsi

Terdapat dua himpunan, yaitu himpunan P = {Ulfa, Sisi, Ruly, Ani, Agus} dan himpunan $Q = \{A, B, O, AB\}$. Setiap anak anggota P dipasangkan dengan tepat satu golongan darah anggota Q. Bentuk ini merupakan contoh relasi yang disebut fungsi atau pemetaan.

Contoh 4.7

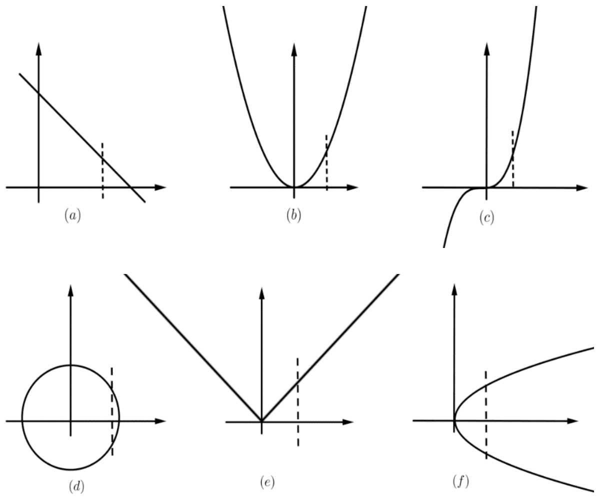
a. Dari diagram-diagram panah berikut, manakah yang merupakan fungsi?



Misalkan himpunan A = {1, 2, 3} adalah domain dan himpunan B = {a, b} adalah kodomain.

1) Diagram panah (a) merupakan fungsi karena setiap anggota A dipasangkan dengan tepat satu anggota B.
2) Diagram panah (b) bukan merupakan fungsi karena ada anggota A, yaitu 2, mempunyai dua pasangan anggota di B, yaitu a dan b.
3) Diagram panah (c) bukan merupakan fungsi karena ada anggota A, yaitu 1, tidak mempunyai pasangan anggota di B.

b. Tentukan manakah diagram di bawah ini yang menyatakan fungsi atau bukan!



1) Diagram (a) merupakan fungsi karena jika diperhatikan garis lurus yang sejajar sumbu y hanya memotong 1 titik pada grafik.
2) Diagram (b) merupakan fungsi karena jika diperhatikan garis lurus yang sejajar sumbu y hanya memotong 1 titik pada grafik.
3) Diagram (c) merupakan fungsi karena jika diperhatikan garis lurus yang sejajar sumbu y hanya memotong 1 titik pada grafik.
4) Diagram (d) merupakan bukan fungsi karena jika diperhatikan garis lurus yang sejajar sumbu y memotong 2 titik pada grafik.

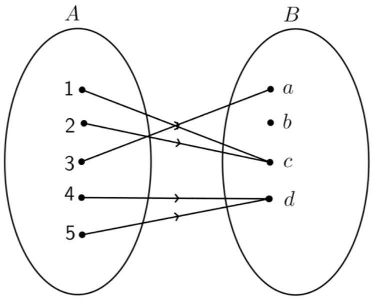
5) Diagram (*e*) merupakan fungsi karena jika diperhatikan garis lurus yang sejajar sumbu *y* hanya memotong 1 titik pada grafik.
6) Diagram (*f*) merupakan bukan fungsi karena jika diperhatikan garis lurus yang sejajar sumbu *y* memotong 2 titik pada grafik.

Daerah definisi (daerah asal atau domain) dari suatu fungsi real *f* dinotasikan D_f yang merupakan himpunan semua bilangan riil yang menyebabkan aturan fungsi berlaku atau terdefinisi. Jika himpunan pada domain tidak dinyatakan dengan jelas maka domain suatu fungsi adalah himpunan bilangan riil. Daerah nilai (daerah hasil atau Range) dari suatu fungsi $f(x)$ dinotasikan R_f yang didefinisikan sebagai $R_f = \{y \mid y = f(x), x \in D_f\}$. Misalkan $f : A \rightarrow B$ suatu fungsi dan $y = f(x)$ untuk suatu $x \in A$, maka x kita tulis $f^{-1}(y) = x$. Jika $Y \subset R_f$ maka prapeta dari *Y* adalah himpunan.

$$f^{-1}(Y)=\{x \in A \mid f(x) \in Y\}$$

Contoh 4.8

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$. Perhatikan diagram panah berikut.



Misalkan f : A → B yang didefinisikan oleh diagram panah di atas. Di sini tampak $D_f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ yang merupakan prapeta dari $R_f = \{a, c, d\}$. Kita miliki juga bahwa:

a. $f^{-1}(\{a\}) = \{3\}$, sebab hanya 3 yang petanya adalah $a \in B$.

b. $f^{-1}(\{c\}) = \{1, 2\}$, sebab 1 dan 2 dipetakan oleh fungsi *f* pada anggota yang sama, yaitu $c \in B$.

c. $f^{-1}(\{d\}) = \{4, 5\}$, sebab 4 dan 5 dipetakan oleh fungsi *f* pada anggota yang sama, yaitu $d \in B$.

d. $f^{-1}(\{b\}) = \{\ \}$, sebab tidak ada anggota dalam *A*, yang petanya adalah $b \in B$.

Dalam pembahasan fungsi kita sering membandingkan dua fungsi yang sama. Misalkan $f : A \rightarrow B$ dan $g : A \rightarrow B$ dua fungsi dari *A* ke *B*. Fungsi *f* dan *g* dikatakan sama, ditulis $f = g$, jika $f(x) = g(x)$ untuk semua $x \in A$.

Contoh 4.9

a. Diberikan suatu fungsi f yang didefinisikan oleh $f(x) = x + 1$. Perhatikan bahwa jika:
   $x = -1$ maka $f(-1) = 2$
   $x = 0$ maka $f(0) = 1$
   $x = 1$ maka $f(1) = 2$, dan seterusnya.

   1) Jika fungsi tersebut digambarkan pada diagram kartesius maka di setiap titik x selalu terdapat nilai bilangan riil. Maka domain dari fungsi f adalah $D_f = (-\infty, \infty)$.

   2) Karena hasil dari $f(x) = x^2 + 1$ adalah bilangan positif dan nilanya merupakan bilangan riil maka range dari fungsi f adalah $R_f = [1, \infty)$.

b. Diberikan suatu fungsi g yang didefinisikan oleh $g(x) = \sqrt{(4- x^2)}$. Perhatikan bahwa jika:

   $x = -1$ maka $g(-1) = \sqrt{3}$
   $x = 0$ maka $g(0) = 4$
   $x = 1$ maka $g(1) = \sqrt{3}$ dan seterusnya.

   1) Karena di dalam akar tidak boleh negatif maka syarat untuk D_g adalah $4- x^2 \geq 0$, sehingga diperoleh $-2 \leq x \leq 2$. Jadi $D_g = [-2, 2]$.

   2) Hasil fungsi ini haruslah bilangan bulat tak negatif. Maka $R_g = [0, \infty)$.

   Berikut ini akan dibahas mengenai bagaimana menghitung banyaknya pemetaan yang mungkin terjadi dari dua himpunan berhingga. Misalkan $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ ke $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m\}$ maka banyak semua pemetaan yang mungkin terjadi dari dua himpunan A dan B adalah m^n.

Contoh 4.10

a. Misalkan $A = \{a, b\}$ ke $B = \{p\}$. Banyak pemetaan dari A ke B yang dapat dibuat hanya ada 1 cara, yaitu $f = \{(a, p), (b, p)\}$.

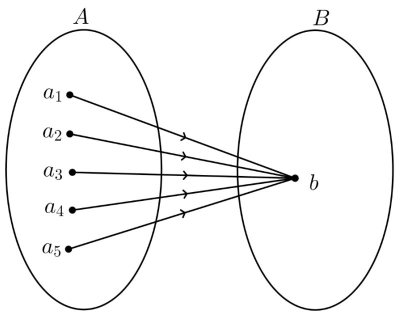
b. Misalkan $A = \{a\}$ ke $B = \{p, q\}$. Banyak pemetaan dari A ke B yang dapat dibuat memiliki 2 cara, yaitu $f = \{(a, p)\}$ dan $g = \{(a, q)\}$.

c. Pemetaan dari $A = \{a, b\}$ ke $B = \{p, q\}$. Banyak pemetaan dari A ke B yang dapat dibuat memiliki 4 cara, yaitu $f_1 = \{(a, p), (b, p)\}$, $f_2 = \{(a, q), (b, q)\}$, $f_3 = \{(a, p), (b, q)\}$ dan $f_4 = \{(a, q), (b, p)\}$.

   Ada beberapa fungsi khusus yang sering digunakan dalam keperluan tertentu pada ilmu matematika. Fungsi – fungsi yang dimaksud dapat dilihat sebagai berikut.

a. **Fungsi Konstan**

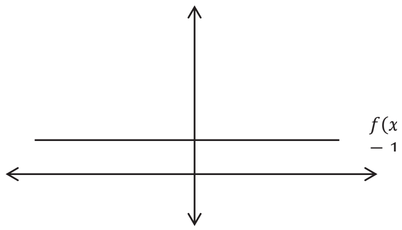
Fungsi f dinamakan fungsi konstan dari A ke B jika fungsi $f : A \rightarrow B$ bersifat bahwa setiap $a \in A$ dipetakan pada satu anggota $b \in B$.



Gambar 4.4 Contoh Fungsi Konstan

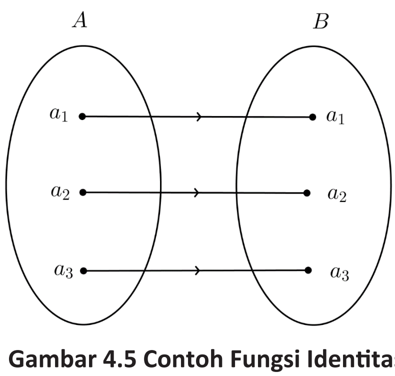
Contoh 4.11

Misalkan $f(x) = 1$ untuk setiap bilangan riil x maka fungsi konstan di 1, dapat digambarkan sebagai berikut.



b. **Fungsi Satuan (Identitas)**

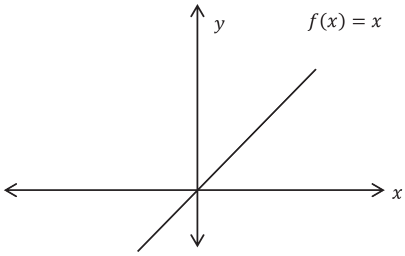
Fungsi f dinamakan fungsi identitas dari A ke B jika f adalah fungsi $f : A \rightarrow B$ dengan $B = A$ dan $f(a) = a$ untuk setiap $a \in A$. Kita notasikan fungsi identitas dari A ke A oleh 1_A.



Gambar 4.5 Contoh Fungsi Identitas

Contoh 4.12

Misalkan $f(x) = x$ untuk setiap bilangan riil x, maka grafik fungsi f adalah garis lurus yang melalui titik $O(0, 0)$.



c. Fungsi Kaki

1) Fungsi Kaki *Floor*

   Misalkan $f(x) = \lfloor x \rfloor$ untuk setiap bilangan riil x dimana $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x. Fungsi ini disebut fungsi kaki *floor* dari x.

   Contoh 4.13
   a) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ untuk $x = 9{,}5$ yaitu 9.
   b) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ untuk $x = -9{,}5$ yaitu -10.

2) Fungsi Kaki Ceiling

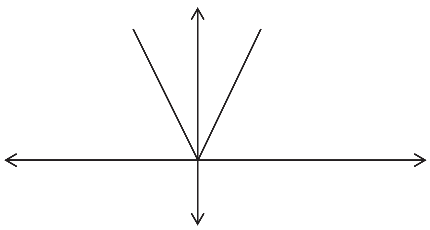
   Fungsi $f(x) = \lfloor x \rfloor$ untuk setiap bilangan riil x, disebut fungsi kaki *ceiling* dari x, dimana $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari atau sama dengan x.

   Contoh 4.14
   a) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ untuk $x = 9{,}5$ yaitu 10.
   b) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ untuk $x = -9{,}5$ yaitu -9.

d. Fungsi Modulus

Fungsi f dinamakan fungsi modulus jika f fungsi yang didefinisikan oleh $f : x \rightarrow |x|$ untuk setiap bilangan riil x, dimana $|x|$ adalah nilai mutlak dari x, yaitu:

$$|x| = \begin{cases} x & ,x \geq 0 \\ -x & ,x < 0 \end{cases}$$



Gambar 4.6 Contoh Fungsi Modulus

Contoh 4.15
$|7| = 7, |0| = 0$, dan $|-3| = -(-3) = 3$.

e. Fungsi Polinomial

Fungsi f dinamakan fungsi polinomial jika f adalah fungsi suku banyak yang berbentuk $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, untuk setiap $x \in R$ dan untuk suatu $n \in N$. Dalam kasus ini, jika $a_n \neq 0$ maka n kita katakan derajat dari fungsi polinomial f.

Contoh 4.16

Misalkan $f(x) = x^2$ - 3x^4 dan $g(x) = 3x + 5$ untuk setiap bilangan riil x. Fungsi f adalah fungsi berderajat 2 dan g adalah fungsi berderajat 1.

f. Fungsi Rasional

Fungsi f dinamakan fungsi rasional atau disebut juga fungsi pecahan jika $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ dimana $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah fungsi polinomial dengan $Q(x) \neq 0$.

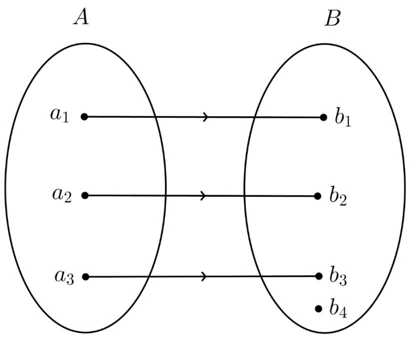
Contoh 4.17

Fungsi $(x) = \frac{1}{x-1}$, dan $g(x) = \frac{x^2 + 7x - 3}{3x - 8}$ adalah fungsi rasional.

3. Sifat – Sifat Fungsi

a. **Fungsi satu – satu (*Injektif*)**

Misalkan $f : A \rightarrow B$ suatu fungsi dari A ke B. Fungsi f adalah fungsi injektif jika $x_1 \neq x_2$ maka $f(x_1) \neq f(x_2)$ untuk setiap $x_1, x_2 \in A$, atau hal ini ekuivalen dengan jika $f(x_1) = f(x_2)$ maka $x_1 = x_2$.



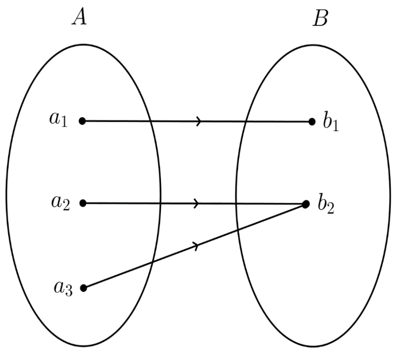
Gambar 4.7 Contoh Fungsi Satu – Satu

Contoh 4.18

1) $f(x) = x + 3, x \in Z$ merupakan fungsi *injektif.*

2) $f(x) = x^2, x \in Z$ bukan merupakan fungsi injektif. Karena terdapat $x_1 \neq x_2$ tetapi $f(x_1) = f(x_2)$, yaitu $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, dan $f(1) = f(-1) = 1$.

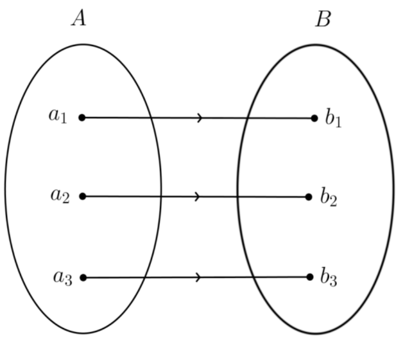
b. **Fungsi Pada (Onto / *Surjektif*)**
Misalkan $f : A \rightarrow B$ suatu fungsi dari A ke B. Fungsi f adalah fungsi surjektif jika *range* dari f sama dengan *kodomain* dari f atau ditulis $R_f = B$.



Gambar 4.8 Contoh Fungsi Pada

Contoh 4.19
1) $f(x) = x + 3$, $x \in Z$ merupakan fungsi *sujektif.*
2) $f(x) = x^2$, $x \in Z$ bukan merupakan fungsi *sujektif*. Karena terdapat anggota dari *kodomain* yang bukan anggota *range* dari *f,* yaitu untuk $f(x) = -1$, tidak ada bilangan x di domain sedemikian sehingga $x^2 = -1$.

c. **Fungsi Korespodensi Satu – Satu (*Bijektif)***
Misalkan $f : A \rightarrow B$ suatu fungsi dari A ke B. Fungsi f adalah fungsi *bijektif* jika f adalah fungsi *injektif* dan *surjektif*.



Gambar 4.9 Fungsi Korespodensi Satu – Satu

Contoh 4.20
1) $f(x) = x + 3$, $x \in Z$ merupakan fungsi *bijektif.*
2) $f(x) = x^2$, $x \in Z$ bukan merupakan fungsi *bijektif*. Karena f bukan *injektif* dan bukan *surjektif*.

4. Kombinasi Fungsi

Misalkan *f* dan *g* adalah fungsi – fungsi riil dengan masing-masing domain D_f dan D_g, maka kita dapat mendefinisikan fungsi-fungsi riil baru seperti contoh di bawah:

a. $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$.

b. $(fg)(x) = f(x) \,.\, g(x)$.

c. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$.

d. $(c \,.\, f)(x) = c \,.\, f(x)$, *c* adalah konstanta.

e. $f^n = f(x)\, f(x) \ldots f(x)$; $D_{fn} = D_f$.

Domain dari kombinasi fungsi *f* dan *g* biasanya berupa irisan masing-masing domainnya yaitu $D_f \cap D_g$. Akan tetapi terdapat pengecualian pada beberapa kasus tertentu seperti dalam contoh di bawah ini.

Contoh 4.21

Misalkan $f(x) = \sqrt{x+1}$, dan $(x) = \sqrt{x-1}$, maka:

a. $D_f = \{x | x + 1 \geq 0\}$ atau $D_f = [-1, \infty)$.

b. $D_g = \{x | x - 1 \geq 0\}$ atau $D_g = [1, \infty)$.

c. $D_f \cap D_g = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$ atau $D_f \cap D_g = [-1,1]$.

d. $f(x) + g(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$ dengan $D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-1,1]$.

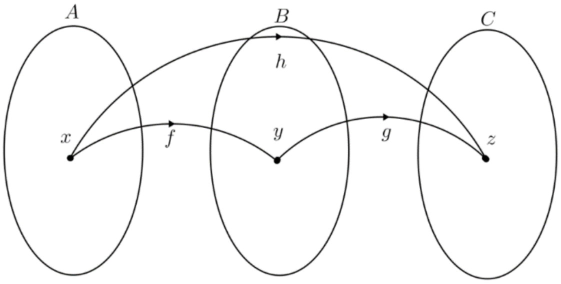
e. $f(x).\, g(x) = \sqrt{(x^2 - 1)}$ dengan $D_{fg} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

f. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$, dengan $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} |\, g(x) \neq 0\}$

$[-1,1] \cap \{x \neq 1\} = [-1,1)$

5. Komposisi Fungsi

Misalkan $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$.

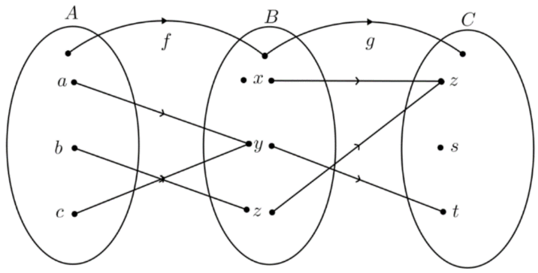


Gambar 4.10 Fungsi Komposisi h = (g ∘ f)

Fungsi $h = (g \circ f)$ ($\circ$ dibaca komposisi atau bundaran) adalah fungsi $h : A \rightarrow C$ yang didefinisikan oleh $h(x) = g\ (f(x))$ untuk setiap $x \in A$. Fungsi baru h ini disebut fungsi komposisi dari f dan g. Perhatikan bahwa $(g \circ f)\ (x) = g(f(x))$ terdefinisi jika $R_f \cap D_g \neq \emptyset$.

Contoh 4.22

a. Misalkan $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$ yang diberikan pada gambar di bawah ini. Kita peroleh:



$(g \circ f)\ (a) = g(f(a)) = g(y) = t$
$(g \circ f)\ (b) = g(f(b)) = g(z) = r$
$(g \circ f)\ (c) = g(f(c)) = g(y) = t$

b. Misalkan fungsi : R → R, dengan $f(x) = 2x^2 + 1$, dan fungsi g : R → R dengan $g(x) = x + 3$. Kita peroleh bahwa:

1) $f \circ g(x) = f(g(x))$
$= f((x + 3))$
$= 2(x + 3)^2 + 1$
$= 2(x^2 + 6x + 9) + 1$
$= 2x^2 + 12x + 19$

2) $f \circ g(1)$ dapat dihitung dengan cara mensubstitusi $x = 1$ pada $f \circ g(x)$.
$f \circ g(1) = 2(1)^2 + 12(1) + 19 = 33$

3) $g \circ f(x) = g(f(x))$
$= g((2x^2 + 1))$
$= (2x^2 + 1) + 3$
$= 2x^2 + 4$

4) $g \circ f(2)$ dapat dihitung dengan mensubstitusi $x = 2$ pada $g \circ f(x)$.
$g \circ f(2) = 2(2)^2 + 4 = 8$

c. Diketahui fungsi f : R → R dan fungsi g : R → R. Jika $f(x) = x + 3$ dan $f \circ g(x) = x^2 + 6x + 7$, maka fungsi $g(x)$ dapat dicari dengan cara sebagai berikut.

$f \circ g(x) = x^2 + 6x + 7$
$f(g(x)) = x^2 + 6x + 7$

$g(x) + 3 = x^2 + 6x + 7$
$g(x) = x^2 + 6x + 4$

Adapun sifat – sifat operasi komposisi pada dapat dilihat sebagai berikut. Misalkan $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$, maka berlaku:

a. $((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ (g \circ h))(x)$ (sifat asosiatif).

b. $(f \circ 1_A)(x) = (1_B \circ f)(x) = f(x)$ (sifat fungsi identitas).

Contoh 4.23
Misalkan $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 3\text{-}x$, $h(x) = x^2 + 1$, dan $1_R(x) = x$, maka:

a. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) + 1 = 2(3 - x) + 1 = 7 - 2x$

Akibatnya:

$$
\begin{aligned}
((f \circ g) \circ h)(x) &= (f \circ g)(h(x)) \\
&= (f \circ g)(x^2 + 2) \\
&= 7 - 2(x^2 + 2) \\
&= 3 - 2x^2 \\
&= 2(1 - x^2) + 1 \\
&= f(1 - x^2) \\
&= f(3 - (x^2 + 2)) \\
&= f(g(x^2 + 2)) \\
&= f((g \circ h)(x))
\end{aligned}
$$

Jadi, $((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ (g \circ h))(x)$.

b. $(f \circ 1_R)(x) = f(1_R(x))$
$(f \circ 1_R)(x) = f(x)$.

6. Fungsi Invers

a. Invers Sebuah Fungsi

Misalkan f adalah suatu fungsi $f : A \to B$, dan fungsi $g : B \to A$ dikatakan invers dari jika berlaku:

$f \circ g = 1_B$ dan $g \circ f = 1_A$.

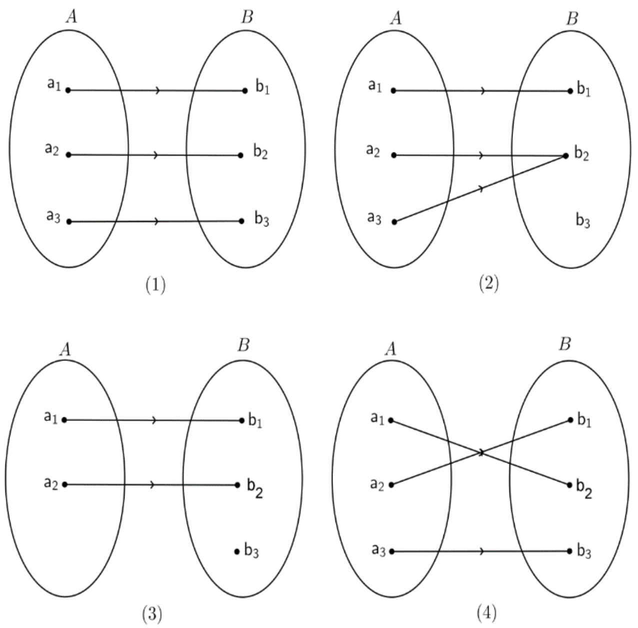
Dalam hal ini fungsi invers dari f kita tulis f^{-1}. Jika fungsi $f : A \to B$ dinyatakan dengan pasangan terurut $f : \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$ dan f memiliki invers maka invers dari fungsi f adalah $f^{-1} : B \to A$ ditentukan oleh $f^{-1} = \{(b, a) | b \in B, a \in A\}$.

Tidak semua fungsi memiliki invers karena fungsi yang memiliki invers hanya fungsi yang bijektif. Kita miliki bahwa:

1) Misalkan fungsi $f : A \to B$, fungsi f mempunyai invers $f^{-1} : B \to A$ jika dan hanya jika f adalah fungsi *bijektif*.
2) Fungsi kuadrat secara umum tidak mempunyai invers tetapi dapat mempunyai invers jika domainnya dibatasi.
3) Cara menentukan suatu grafik mempunyai invers dapat ditarik sembarang garis sejajar sumbu x pada domainnya, bila memotong grafik hanya di satu titik, maka grafik tersebut mempunyai invers. Bila tidak demikian, maka grafik tersebut tidak mempunyai invers.

Contoh 4.24

a. Tentukan manakah grafik di bawah ini fungsi yang memiliki invers/tidak!



Berdasarkan diagram panah di atas, fungsi yang memiliki invers dan yang tidak memilki inves dapat dilihat sebagai berikut.

1) Nomor (1) memiliki invers, karena fungsi tersebut merupakan fungsi *bijektif*.
2) Nomor (2) tidak memiliki invers, karena fungsi tersebut bukan merupakan fungsi *bijektif*.
3) Nomor (3) tidak memiliki invers, karena fungsi tersebut bukan merupakan fungsi *bijektif*.

4) Nomor (4) memiliki invers, karena fungsi tersebut merupakan fungsi *bijektif*.

Tampak bahwa yang fungsi yang memiliki invers hanya pada gambar (1) dan (4).

b. Rumus Umum Fungsi Invers

Dalam menentukan rumus fungsi invers dari fungsi riil dapat dilakukan dengan langkah – langkah berikut.

1) Misalkan $f(x) = y$.
2) Nyatakan x sebagai fungsi dari y dari persamaan di atas.
3) Menentukan rumus f^{-1} dengan melihat persamaan $x = f^{-1}(y)$ pada bagian b.

Bentuk umum fungsi linier adalah $f(x) = ax + b$. Misalkan $f(x) = y$, maka $y = ax + b$. Kemudian nyatakan x dalam y sehingga diperoleh:

$$ax = y - b$$
$$x = \frac{y-b}{a}$$
$$f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$$

Mengganti variabel y dengan variabel x sehingga diperoleh:

$$f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}.$$

Contoh 4.25

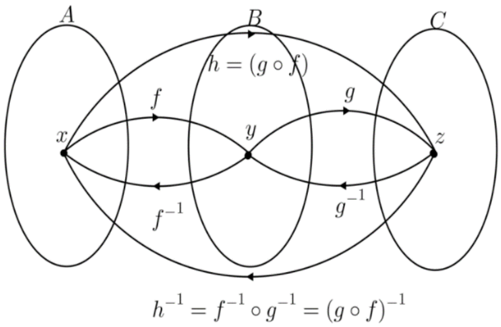
Fungsi invers dari fungsi $f(x) = -3x + 4$ adalah

$f^{-1}(x) = \frac{x-4}{-3}$ atau $f^{-1}(x) = \frac{4-x}{3}$.

c. Invers Dari Fungsi Komposisi

Misalkan fungsi f dan fungsi g masing-masing merupakan fungsi *bijektif* sehingga mempunyai fungsi invers f^{-1} dan g^{-1} . Misalkan $h(x)$ adalah fungsi komposisi yang dibentuk dari dua fungsi $f(x)$ dan fungsi $g(x)$. Fungsi $h(x)$ kemungkinannya adalah sebagai berikut:

1) $h(x) = (g \circ f)(x)$
Jika terdapat fungsi komposisi $(g \circ f)$ maka, misalkan $h = (g \circ f)$ dapat dianggap menjadi satu fungsi, yaitu fungsi h. Dari diagram panah fungsi komposisi $(g \circ f)$ kita dapat menentukan invers dari $(g \circ f)$. Diagram panah untuk fungsi h dan inversnya dapat dilihat sebagai berikut.



Gambar 4.11 Fungsi Komposisi Invers $h^{-1} = (g \circ f)^{-1}$

Pada gambar 4.11. dapat dijelaskan bahwa fungsi dipetakan dari fungsi lalu hasil petanya dipetakan kembali ke fungsi Perhatikan tabel berikut ini.

Fungsi	Himpunan Domain	Himpunan Range	Fungsi Invers	Himpunan Domain	Himpunan Range
f	A	B	f^{-1}	B	A
g	B	C	g^{-1}	C	B
h	A	C	h^{-1}	C	A
$h = g \circ f$			$h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$		

Contoh 4.26

Diketahui fungsi $h = g \circ f$ dengan $f(x) = 2x - 3$ dan $g(x) = 3x + 1$. Sehingga $h^{-1}(x)$ dapat dikerjakan dengan cara sebagai berikut.

Cara 1:

$h^{-1}(x) = (g \circ f)^{-1}(x)$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x - 3) = 3(2x - 3) + 1 = 6x - 8$

Selanjutnya untuk menentukan $(g \circ f)^{-1}$ (x) dapat kita misalkan $y = 6x - 8$ sehingga

$x = \frac{y+8}{6}$ Jadi $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{x+8}{6}$

Cara 2:

Terlebih dahulu kita tentukan nilai $f^{-1}(x)$, yang dapat dilihat berikut ini.

Misalkan $y = 2x - 3$, sehingga:

$y = 2x - 3$

$y - 2x = 2x - 3 - 2x$

$y - 2x = -3$

$y - 2x - y = -3 - y$

$-2x = -3 - y$

$2x = y + 3$

$$\frac{2x}{2} = \frac{y}{2} + \frac{3}{2}$$
$$x = \frac{y}{2} + \frac{3}{2}$$

Jadi $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2} = \frac{x+3}{2}$

Selanjutnya kita kan tentukan nilai $g^{-1}(x)$ yang dapat dilihat berikut ini. Misalkan $y = 3x + 1$, sehingga $x = \frac{y-1}{3}$.

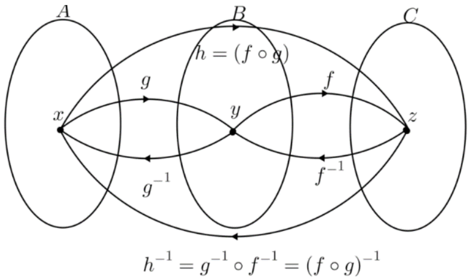
Jadi $g^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$.

Sehingga nilai dari $h^{-1}(x) = f^{-1} \circ g^{-1}(x)$ dapat dilihat berikut ini.

$$h^{-1}(x) = f^{-1} \circ g^{-1}(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = f^{-1}\left(\frac{x-1}{3}\right) = \frac{\left(\frac{x-1}{3}\right) + 3}{2}$$
$$= \frac{\left(\frac{x-1+9}{3}\right)}{2} = \frac{x+8}{6}$$

2) $h(x) = (f \circ g)(x)$

Jika terdapat fungsi komposisi $(f \circ g)$ maka, kita misalkan $h = (f \circ g)$ dapat dianggap menjadi satu fungsi, yaitu fungsi h. Dari diagram panah fungsi komposisi, kita dapat menentukan invers dari $(f \circ g)$. Diagram panah untuk fungsi h dan inversnya dapat dilihat sebagai berikut.



Gambar 4.12 Fungsi Komposisi Invers

Pada gambar 4.12. dapat dijelaskan bahwa fungsi h^{-1} dipetakan dari fungsi f^{-1} lalu hasil petanya dipetakan kembali ke fungsi g^{-1}. Perhatikan tabel berikut ini.

Fungsi	Himpunan Domain	Himpunan Range	Fungsi Invers	Himpunan Domain	Himpunan Range
g	A	B	g^{-1}	B	A
f	B	C	h^{-1}	C	B
h	A	C	$h = f \circ g$	C	A
$h = f \circ g$			$h^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$		

Contoh 4.27

fungsi $h = f \circ g$ dengan $f(x) = 24 - 3$ dan $g(x) = 3x + 1$, Sehingga $h^{-1}(x)$ dapat dikerjakan dengan cara sebagai berikut.

Cara 1: $h^{-1}(x) = (f \circ g)^{-1}(x)$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 1) = 2(3x + 1) - 3 = 6x - 1$

Selanjutnya untuk menentukan $(f \circ g)^{-1}(x)$ dapat kita misalkan $y = 6x + 3$

sehingga: $x = \ x = \dfrac{y+1}{6}$

Jadi $(f \circ g)^{-1}(x) = \dfrac{y+1}{6}$

Cara 2: $h^{-1}(x) = g^{-1} \circ f^{-1}(x)$

Telah diperoleh nilai $f^{-1}(x)$, yaitu $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2}$, sedangkan nilai $g^{-1}(x)$, yaitu $g^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{3}$ $x \neq 0$.

Sehingga nilai dari $h^{-1}(x) = g^{-1} \circ f^{-1}(x)$ dapat dilihat berikut ini.

$$h^{-1}(x) = g^{-1} \circ f^{-1}(x) = g^{-1}\big(f^{-1}(x)\big) = g^{-1}\left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{\left(\frac{x+3}{2}\right) - 1}{3}$$

$$= \frac{x+1}{6}$$

Jadi $(g \circ f^{-1})(x) = \dfrac{x+1}{6}$.

7. **Konsep** Persamaan Linier
   Persamaan adalah kalimat terbuka yang menggunakan relasi sama dengan (=). Menyelesaikan persamaan berarti menentukan nilai-nilai dari faktor yang tidak diketahui dalam suatu persamaan. Faktor yang tidak diketahui nilainya disebut variabel.

Contoh 4.28

a. $x = -3$
b. $3x^2 - 4x = \sqrt{7}$
c. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Persamaan garis adalah persamaan yang dapat ditulis dalam bentuk umum:
$y - y1 = m(x - x_1)$

Dengan m adalah gradien dari suatu persamaan garis dan (x_1, y_1) adalah koordinat dari suatu titik yang dilewati oleh garis tersebut. Jika titik koordinatnya berada di (0,0) maka bentuk umum dari persamaan garis menjadi $y = mx$.

Contoh 4.29

a. Misalkan (-2,5) adalah koordinat dari suatu titik yang dilewati suatu garis dengan gradien -3 maka persamaan garisnya dapat dilihat sebagai berikut.
   $y - y_1 = m(x - x_1)$
   $y - 5 = -3(x - (-2))$ … substitusi gradien dan titik koordinat
   $y - 5 = -3(x + 2)$ … sederhanakan
   $y - 5 = -3x - 6$ … sifat distributif
   $y - 5 + 5 = -3x - 6 + 5$ … kedua ruas ditambah 5
   $y = -3x - 1$

b. Misalkan terdapat persamaan garis $3x - 7y - 2 = 0$, kita dapat menentukan gradien dari persamaan garis tersebut dengan merubah bentuk umum dari persamaan garis.
   $3x - 7y - 2 = 0$
   $3x - 7y - 2 + 2 = 0 + 2$ … kedua ruas ditambah 2
   $3x - 7y = 2$
   $3x - 7y - 3x = 2 - 3x$ … kedua ruas dikurang $-3x$
   $-7y = 2 - 3x$
   $\frac{-7y}{7} = \frac{2 - 3x}{7}$ … kedua ruas dibagi
   $-y = \frac{2}{7} - \frac{3}{7}x$
   $y = \frac{3}{7}x - \frac{2}{7}$ … kedua ruas dikali

Sehingga nilai gradiennya adalah $\frac{3}{7}$.

Persamaan linier sederhana atau persamaan berpangkat (derajat) satu adalah suatu persamaan yang memuat satu kuantitas yang tidak diketahui (variabel) yang berbentuk $ax + b = c$, dimana a, b, dan c bilangan riil dan $a \neq 0$, serta x adalah kuantitas yang tidak diketahui atau variabel.

Penyelesaian persamaan linier adalah nilai-nilai variabel yang memenuhi persamaan linier tersebut. Himpunan penyelesaian persamaan linier adalah himpunan semua penyelesaian persamaan linier. Semua operasi aritmatika dapat dilakukan terhadap suatu persamaan, selama kesamaan dari persamaan tersebut tetap dipertahankan. Nilai pengganti peubah pada persamaan-persamaan yang membuat persamaan itu benar disebut penyelesaian atau akar persamaan. Untuk menyelesaikan persamaan digunakan sifat dasar bahwa, suatu persamaan tidak berubah himpunan penyelesaiannya, jika kedua ruas persamaan:

a. Ditambah atau dikurangi dengan bilangan yang sama
b. Dikalikan atau dibagi dengan bilangan yang sama, asal bukan nol.

Contoh 4.30

a. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan persamaan $3x + 6 = 21 - 2x$, $x \in R$.

$3x + 6 = 21 - 2x$
$3x + 6 - 6 = 21 - 2x - 6$ …kedua ruas dikurangi 6
$3x = 21 - 6 - 2x$
$3x = 15 - 2x$
$3x + 2x = 15 - 2x + 2x$ …kedua ruas ditambah 2
$5x = 15$
$\frac{5x}{5} = \frac{15}{5}$ …kedua ruas dibagi dengan
$x = 3v$

b. Ical menabung sisa uang jajannya selama 6 hari sebesar Rp 36.000,- Setiap hari Ical menyisihkan uang yang sama banyaknya. Untuk mengetahui besarnya rupiah Ical menyisihkan uangnya setiap hari dapat dilihat sebagai berikut.

Misalkan x adalah banyaknya uang yang ditabung Ical setiap hari. Ical menabung selama 6 hari sebesar Rp 36.000,-, sehingga diperoleh persamaan $6x = 36000$. Untuk menentukan banyaknya uang yang ditabung ical setiap hari dapat dilihat sebagai berikut.

$6x = 36000$
$6x \cdot \frac{1}{6} = 36000 \cdot \frac{1}{6}$ … "kedua ruas dikalikan dengan " $\frac{1}{6}$
$x = 6000$

Artinya setiap hari Ical menabung sebesar Rp 6.000

Dua atau lebih persamaan linier dikatakan setara atau ekuivalen jika himpunan penyelesaian persamaan itu sama tetapi bentuk persamaannya berbeda, dilambangkan dengan $\Leftrightarrow$.

Contoh 4.31

a. Misalkan $2x - 8 = 16$, $x \in R$ ekuivalen dengan$2x - 10 = 14$, $x \in R$ karena himpunan penyelesaiannya adalah sama yaitu {12}. Dengan menggunakan lambang ekuivalen dapat ditulis sebagai berikut:
$2x - 8 = 16 \Leftrightarrow 2x - 10 = 14$

b. Perhatikan bahwa $2x - 8 = 16, x \in R$ tidak ekuivalen dengan $x - 10 = 14$, $x \in R$ karena himpunan penyelesaiannya berbeda. Pada persamaan $2x$-8=16 himpunan penyelesaiannya adalah {12} sedangkan pada persamaan $x - 10 = 14$ himpunan penyelesaiannya adalah {24}. Dalam hal ini kita tulis,
$2x - 8 = 16 \not\Leftrightarrow x - 10 = 14$

8. Persamaan Linier Simultan

a. Dua Persamaan dan Dua Variabel

Persamaan linier dua variabel adalah persamaan yang memiliki dua variabel dan masing-masing variabel berpangkat satu dan memiliki bentuk umum $ax + by = c$ dimana a, b, c bilangan riil dan a, $b \neq 0$.

Contoh 4.32

1) $2x + 3y = -8$
2) $-4y + 7z - 12 = 0$
3) $3p - 8q = 2$

Diketahui terdapat dua buah persamaan linier dengan dua variabel dan seperti berikut

$a^1 x + b^1 y = c^1$ ...(1)
$a^2 x + b^2 y = c^2$ ...(2)

Dengan $x, y, a^1, a^2, b^1, b^2, c^1, c^2 \in R$ dan $a^1, a^2, b^1, b^2 \neq 0$

Dua persamaan di atas dikatakan persamaan linier simultan dengan dua variabel atau suatu sistem persamaan linier dengan dua persamaan dan dua variabel. Pasangan x dan y yang memenuhi persamaan (1) dan persamaan (2) dikatakan penyelesaian simultan yang dapat ditulis (x,y). Menyelesaikan persamaan linier simultan, artinya menentukan semua nilai (x,y) yang memenuhi persamaan simultan tersebut. Metode yang dapat digunakan untuk menentukan penyelesaian persamaan linier simultan dua variabel dapat dilihat pada berikut.

1) Metode Grafik

Metode grafik digunakan untuk menyelesaikan persamaan linier simultan dengan menggunakan diagram kartesius. Adapun langkah – langkah dalam menentukan penyelesaian persamaan simultan linier dua variabel dengan menggunakan metode grafik sebagai berikut.

a) Tentukan titik potong garis dengan sumbu *X*, syarat $y = 0$ dan tentukan titik potong garis dengan sumbu *Y*, syarat $x = 0$. Hal ini dapat disederhanakan dalam bentuk tabel sebagai berikut.

x	0	...
y	...	0

Gambar pasangan titik yang didapat pada koordinat kartesius lalu buat garis yang melalui dua titik ini.

b) Tentukan titik potong dua garis dalam persamaan linier simultan yang merupakan himpunan penyelesaian dari persamaan linier simultan ini.

Contoh 4.33

Tentukan himpunan penyelesaian persamaan linier dua variabel dari dua persamaan berikut.

$x - y = 2$ ...(1)

$2x + y = 7$ ...(2)

Langkah-langkah penyelesainnya persamaan linier dua variabel dengan metode grafik dapat dilihat sebagai berikut.

a) Menentukan titik potong garis dengan sumbu *X* dan *Y* pada persamaan (1) dan (2)

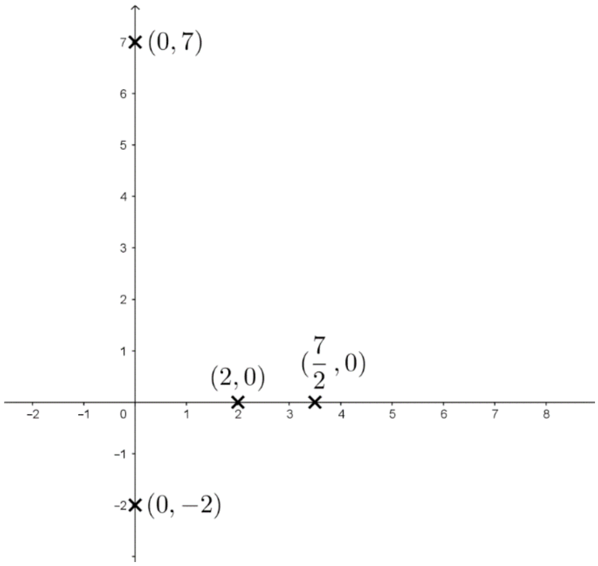
$x - y = 2$

x	0	2
y	-2	0

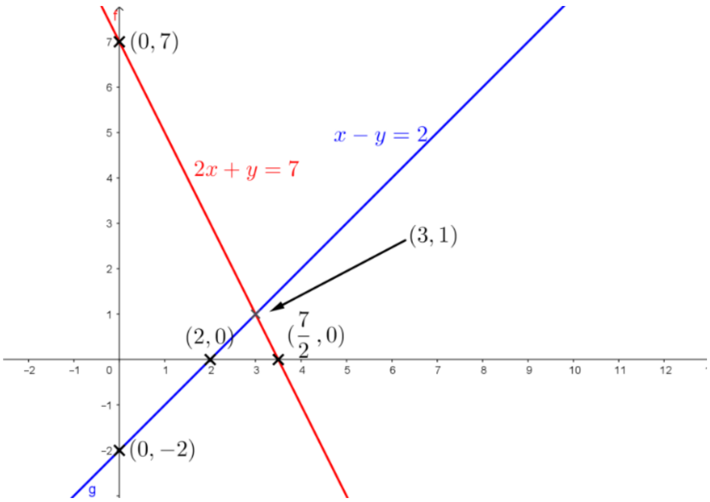
$2x + y = 7$

x	0	$\frac{7}{2}$
y	7	0

Gambar pasangan titik yang didapat pada koordinat kartesius



b) Menentukan titik potong kedua garis yang merupakan himpunan penyelesaian dari persamaan linier simultan dua variabel



Titik potong kedua grafik adalah . Jadi himpunan penyelesaiannya

2) Metode Substitusi

Metode substitusi digunakan untuk menyelesaikan persamaan linier simultan dimulai dengan satu persamaan dari sistem dan menuliskan satu variabel dalam bentuk variabel lainnya pada persamaan ini. Adapun langkah – langkah dalam menentukan penyelesaian persamaan linier simultan dua variabel dengan menggunakan metode substitusi adalah sebagai berikut.

a) Pilih satu persamaan dan selesaikan satu variabel ke dalam bentuk variabel lainnya.

b) Substitusikan pernyataan yang diperoleh dari langkah pertama ke dalam persamaan lainnya, dan selesaikan untuk persamaan tersebut.

c) Substitusi nilai yang diperoleh dari langkah kedua ke pernyataan yang diperoleh di langkah pertama untuk menentukan variabel yang tersisa.

Contoh 4.34
Tentukan himpunan penyelesaian persamaan linier dua variabel dari dua persamaan berikut.
$x - y = 2$ ...(1)
$2x + y = 7$ ...(2)

Langkah-langkah penyelesainnya persamaan linier simultan dua variabel dengan menggunakan metode substitusi dapat dilihat sebagai berikut.

a) Pilih satu persamaan, misalkan persamaan (1) dan selesaikan satu variabel ke dalam bentuk variabel lainnya, seperti berikut.
$x - y = 2$
$x = 2 + y$

b) Substitusikan pernyataan yang diperoleh dari langkah pertama ke dalam persamaan (2), dan selesaikan untuk persamaan tersebut, seperti berikut.
$2x + y = 7$
$2(2 + y) + y = 7$
$4 + 2y + y = 7$
$3y + 4 = 7$
$3y + 4 - 4 = 7 - 4$ ... kedua ruas dikurang 4
$3y = 3$
$y = 1$

c) Substitusi nilai $y = 1$ke persamaan $x = 2 + y$, sehingga dapat diperoleh sebagai berikut:
$x = 2 + y$
$x = 2 + 1$
$x = 3$
Jadi himpunan penyelesaiannya {(3, 1)}

3) Metode Eliminasi
Metode eliminasi digunakan untuk menyelesaikan persamaan linier simultan dengan mengkombinasikan penjumlahan dan pengurangan dua persamaan atau lebih sedemikian hingga dapat mengeliminasi salah satu variabel. Adapun langkah – langkah dalam menentukan penyelesaian persamaan linier simultan dua variabel dengan menggunakan metode eliminasi adalah sebagai berikut.

a) Tentukan variabel yang akan dieliminasi
b) Kalikan persamaan dengan angka yang sesuai agar koefisien variabel yang akan dieliminasi pada satu persamaan merupakan negatifnya atau sama dengan persamaan yang lain.
c) Jumlahkan atau kurangkan kedua persamaan agar mengeliminasi satu variabel.
d) Lakukan hal yang sama seperti langkah pertama sampai semua variabel ditentukan.

Contoh 4.35
Tentukan himpunan penyelesaian persamaan linier dua variabel dari dua persamaan berikut.
$x - y = 2$ ...(1)
$2x + y = 7$ ...(2)

Langkah-langkah penyelesainnya persamaan linier dua variabel dengan menggunakan metode eliminasi dapat dilihat sebagai berikut.

a) Misalkan variabel yang akan dieliminasi
b) Karena koefisien suku y pada persamaan (1) merupakan negatif bagi suku y pada persamaan (2), maka dua persamaan tersebut dapat dieliminasi.
c) Jumlahkan persamaan (1) dan persamaan (2) agar mengeliminasi variabel seperti berikut.
$x - y = 2$
$\underline{(2x + y = 7) +}$
$3x = 9$
$x = 3$

Lakukan hal yang sama seperti langkah pertama untuk mengeliminasi variabel x seperti mengalikan persamaan (1) dengan -2 sehingga diperoleh $-2x + 2y = -4$. Karena koefisien suku x pada persamaan (1) merupakan negatif bagi suku x pada persamaan (2), maka dua persamaan tersebut dapat dieliminasi. Jumlahkan persamaan (1) dan persamaan (2) agar mengeliminasi variabel x seperti berikut.
$-2x + 2y = -4$
$\underline{(2x + y = 7) +}$
$3y = 3$
$y = 1$
Jadi himpunan penyelesaiannya $\{(3,1)\}$

4) Metode Eliminasi dan Substitusi
Metode eliminasi dan substitusi digunakan untuk menyelesaikan persamaan linier simultan dengan menggabungkan metode eliminasi dan metode

substitusi. Adapun langkah – langkah dalam menentukan penyelesaian persamaan linier simultan dua variabel dengan menggunakan metode eliminasi dan substitusi sebagai berikut.

a) Tentukan variabel yang akan dieliminasi.
b) Kalikan persamaan dengan angka yang sesuai agar koefisien variabel yang akan dieliminasi pada satu persamaan merupakan negatifnya atau sama dengan pada persamaan yang lain.
c) Jumlahkan atau kurangkan kedua persamaan agar mengeliminasi satu variabel.
d) Substitusikan nilai yang diperoleh pada langkah ketiga ke dalam persamaan awal, dan tentukan solusi untuk variabel lainnya.

Contoh 4.36

Tentukan himpunan penyelesaian persamaan linier dua variabel dari dua persamaan berikut.

$x - y = 2$ ...(1)

$2x + y = 7$ ...(2)

Langkah-langkah penyelesainnya persamaan linier dua variabel dengan menggunakan metode eliminasi dan substitusi dapat dilihat sebagai berikut.

a) Misalkan variabel *y* yang akan dieliminasi.
b) Karena koefisien suku y pada persamaan (1) merupakan negatif bagi suku *y* pada persamaan (2), maka dua persamaan tersebut dapat dieliminasi.
c) Jumlahkan persamaan (1) dan persamaan (2) agar mengeliminasi variabel y seperti berikut.

   $x - y = 2$

   $\underline{(2x + y = 7\ )+}$

   $3x = 9$

   $x = 3$

d) Kemudian substitusi $x = 3$ pada salah satu persamaan awal, misalkan mensubstitusi $x = 3$ pada persamaan (1) maka diperoleh

   $x - y = 2$

   $3 - y = 2$ ... substitusi $x = 3$

   $3 - y - 3 = 2 - 3$ ... kedua ruas dikurang 3

   $-y = -1$

   $y = 1$ ... kedua ruas dikalikan -1

   Jadi himpunan penyelesaiannya {(3,1)}.

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak sekali permasalahan – permasalahanyang dapat dipecahkan menggunakan persamaan linier simultan dua variabel. Pada umumnya, permasalahan tersebut berkaitan dengan masalah aritmetika sosial. Misalnya, menentukan harga satuan barang, menentukan panjang atau lebar sebidang tanah, dan lain sebagainya.

Contoh 4.37

Misalkan usia Soni 8 tahun lebih tua dari umur Ina. Sedangkan jumlah usia mereka adalah 44 tahun. Tentukan usia Soni dan Ina saat ini, pertama kita menentukan model matematikanya sebagai berikut

Misalkan usia Soni saat ini = x tahun dan usia Ina saat ini = y tahun, sehingga model matematikanya

$x = 8 + y$ ...(1)

$x + y = 44$ ...(2)

Untuk menghitung usia masing-masing, dapat menggunakan metode eliminasi dan metode substitusi, dapat dilihat sebagai berikut.

Mengeliminasi variabel terlebih dahulu sehingga:

$x - y = 8$

$\underline{(x + y = 44) +}$

$2x = 52$

$x = 26$

Mensubstitusi nilai x ke persamaan (1) sehingga:

$x = 8 + y$

$26 = 8 + y$ ... substitusi nilai $x = 26$

$26 - 26 = 8 + y - 26$ ... kedua ruas dikurang 26

$0 = -18 + y$

$0 - y = -18 + y - y$ ... kedua ruas dikurang $-y$

$-y = -18$

$y = 18$ ... kedua ruas dikalikan -1

Jadi usia Soni adalah 26 tahun dan usia Ina 18 tahun.

b. Tiga Persamaan dan Tiga Variabel

Pada bagian ini kita akan menyelesaikan persamaan yang memiliki tiga variabel dan masing-masing variabel berpangkat satu. Bentuk umum persamaan linier tiga variabel dalam x, y, dan z adalah $ax + by + cz = d$ dimana a, b, c, d bilangan riil dan $a, b, c \neq 0$.

Contoh 4.38

1) $2x + 3y + 4z = -8$
2) $-4y + 7z - 12 + 3x = 0$
3) $3p - 8q = r + 2$

$a^1x + b^1y + c^1z = d^1$ ...(1)

$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ ...(2)

$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$ ...(3)

Dengan $x, y, z, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 \in R$ dan $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ tidak semuanya 0.

Tiga persamaan di atas dikatakan persamaan linier simultan dengan tiga variabel atau suatu system tiga persamaan linier dengan tiga variabel. Pasangan *x*, *y* dan *z* yang memenuhi persamaan (1), persamaan (2) dan persamaan (3) dikatakan penyelesaian simultan yang dapat ditulis (*x*, *y*, *z*). Menyelesaikan persamaan linier simultan, artinya menentukan semua nilai (*x*, *y*, *z*) yang memenuhi persamaan simultan tersebut. Metode yang dapat digunakan untuk menentukan penyelesaian persamaan linier simultan tiga variabel sama seperti menentukan penyelesaian persamaan linier simultan dua variabel.

Contoh 4.39

Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linier tiga variabel dari tiga persamaan berikut.

$x + y - z = 3$ ...(1)

$2x + y + z = 5$ ...(2)

$x + 2y + z = 7$ ...(3)

Langkah-langkah penyelesaian persamaan linier tiga variabel dengan menggunakan metode eliminasi dan metode substitusi dapat dilihat sebagai berikut.

1) Misalkan variabel *z* yang akan dieliminasi.
2) Karena koefisien suku *z* pada persamaan (1) merupakan negatif bagi suku *z* pada persamaan (2), maka dua persamaan tersebut dapat dieliminasi dengan cara menjumlahkan kedua persamaan tersebut.

   $x + y - z = 3$
   $\underline{(2x + y + z = 5\ )+}$
   $3x + 2y = 8$ ...(4)

   Mengeliminasi variabel dari persamaan (1) dan (3) sehingga diperoleh:
   $2x + y + z = 5$
   $\underline{(x + 2y + z = 7)-}$
   $x - y = -2$ ...(5)

   Persamaan (5) dikali 2 sehingga didapat $2x - 2y = -4$. Eliminasi persamaan variabel y dari (4) dan (5).
   $3x + 2y = 8$
   $\underline{(2x - 2y = -4) +}$

$5x = \frac{4}{5}$

$2x + y + z = 5$

$(x + 2y + z = 7)-$

$x - y = -2 \quad ...(5)$

Persamaan (5) dikali 2 sehingga didapat $2x - 2y = -4$. Eliminasi persamaan variabel y dari (4) dan (5).

$3x + 2y = 8$

$(2x - 2y = -4) +$

$5x = 4$

$x = \frac{4}{5}$ v

3) Substitusi nilai x ke persamaan (5) sehingga diperoleh:

$x - y = -2$

$\frac{4}{5} - y = -2$ ... "substitusi nilai" $x = \frac{4}{5}$

$\frac{4}{5} - y- \ 4 \ \frac{4}{5} \ 5 = -2 - \frac{4}{5}$ .. kedua ruas dikurang $\frac{4}{5}$

$-y = -\frac{14}{5}$

$y = \frac{14}{5}$ .. kedua ruas dikali -1

Substitusi nilai x dan y ke persamaan (1) sehingga diperoleh:

$x + y - z = 3$

$x + y - z = 3$

$\frac{4}{5} + \frac{14}{5} - z = 3$ ... substitusi nilai $x = \frac{4}{5}$ dan $y = \frac{14}{5}$

$\frac{18}{5} - z = 3$

$\frac{18}{5}$ - z - $\frac{18}{5}$ = 3 - $\frac{18}{5}$ ... "kedua ruas dikurang" $\frac{18}{5}$

$-z = -\frac{3}{5}$

$z = \frac{3}{5}$ ...kedua ruas dikalikan -1

Jadi himpunan penyelesaiannya {($\frac{4}{5}$, $\frac{14}{5}$, $\frac{3}{5}$)}.

C. PENUTUP

1. RANGKUMAN

a. Misalkan $A \times B$ adalah produk Kartesius himpunan A dan B, maka suatu relasi atau hubungan R dari A ke B adalah suatu himpunan bagian dari produk Kartesius $A \times B$.

b. Pada relasi R = $\{(x, y) \mid x \in A$ dan $x \in B\}$. Himpunan ordinat pertama dari pasangan terurut (x, y) disebut daerah asal (domain), himpunan B, disebut daerah kawan (kodomain), himpunan bagian dari B yang bersifat $y \in B$ dengan $(x, y) \in$ R disebut daerah hasil (range) relasi R.

c. Suatu relasi R = $\{(x, y) \mid$ x $\in$ A dan x $\in$ B$\}$ dapat dinyatakan dalam himpunan pasangan berurutan, diagram panah, koordinat kartesius, tabel, matriks.

d. Misalkan A dan B suatu himpunan. Suatu fungsi dari A ke B adalah suatu relasi khusus dari A ke B. Secara formal, fungsi dari A ke B, ditulis $f : A \rightarrow B$, adalah suatu relasi dari A ke B yang memasangkan setiap anggota dari A dengan tepat satu anggota B.

e. Ada beberapa fungsi khusus yang sering digunakan dalam keperluan tertentu pada ilmu matematika, yaitu fungsi konstan, fungsi satuan (identitas), fungsi kaki, fungsi modulus, fungsi polynomial, fungsi rasional.

f. Sifat sifat fungsi diantara lain, fungsi satu-satu (injektif), fungsi pada (surjektif), fungsi bijektif.

g. Misalkan f adalah suatu fungsi $f : A \rightarrow B$, dan misalkan untuk suatu $a \in A$, petanya adalah $f(a) = b \in B$. Prapeta dari $b \in B$ dinotasikan dengan f^1 ({b}) adalah himpunan $f^1(\{b\}) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$.

h. Komposisi fungsi adalah penggabungan operasi dua fungsi secara berurutan sehingga menghasilkan sebuah fungsi baru.

i. Misalkan fungsi f dan fungsi g masing-masing merupakan fungsi bijektif sehingga mempunyai fungsi invers f^1 dan g^1.

j. Persamaan adalah adalah kalimat terbuka yang menggunakan relasi sama dengan (=).

k. Gradien suatu garis adalah perbandingan antara selisih koordinat y dan koodinat x dari dua titik yang terletak pada garis itu.

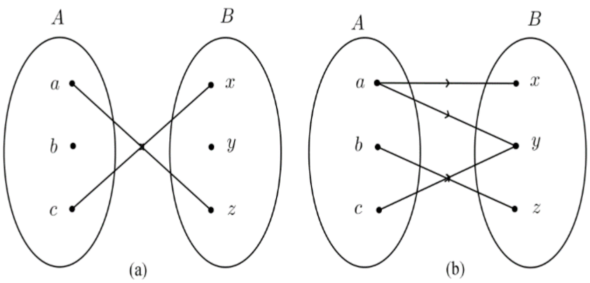
l. Bentuk umum dari persamaan garis yang dapat ditulis $y - y_1 = m(x - x_1)$ dengan m adalah gradien dari suatu persamaan garis dan (x_1, y_1) adalah koordinat dari suatu titik yang berada di garis.

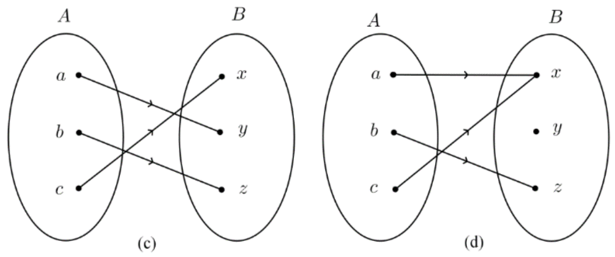
m. Metode yang dapat digunakan untuk menentukan penyelesaian persamaan linier simultan dua variabel dan dua persamaan adalah metode grafik, metode substitusi, metode eliminasi, dan metode eliminasi substitusi.

2. TES FORMATIF

Agar kalian lebih menguasai materi pada kegiatan belajar ini, kerjakan soal-soal di bawah ini dengan benar!

1. Relasi antara dua himpunan *A* dan *B* dinyatakan sebagai himpunan pasangan berurutan R = {(0,0), (1,2), (2,4), (3,6), (4,8)}. Tulislah anggota-anggota himpunan *A* dan *B* yang mungkin dengan mendaftar anggota-anggotanya!
2. Gambarlah diagram panah dari kedua himpunan pada nomor 1!
3. Tuliskan relasi yang terbentuk dari himpunan *A* ke himpunan *B* sebagai fungsi dari *A* ke *B* (pada nomor 1)!
4. Dari diagram di bawah ini, Tentukan mana yang merupakan fungsi/ bukan!





5. Diketahui $g(x) = x^2 + 2$ dengan domain $D_g = \{x|-4< x <2, x \in Z\}$ dan kodomain bilangan bulat. Tuliskan domain D_g dengan mendaftar anggota-anggotanya.
6. Tentukan daerah hasil R_g. (pada nomor 5)
7. Tentukan apakah fungsi $f(x) = x^2 - 6x + 2$ termasuk fungsi injektif, fungsi surjektif, atau fungsi bijektif!
8. Diketahui $f : R \rightarrow R$ dengan $f(x) = 2x - 5$. Tentukan $f^{-1}(x)$!
9. Tentukan rumus fungsi $g(x)$ jika diketahui $f(x) = x + 3$ dan $(f \circ g)(x) = 3x - 5$!
10. Tentukan persamaan garis jika (-2, -5) adalah koordinat dari sua tu titik yang dilewati suatu garis dengan gradien -2 !
11. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan $6x + 3 = 14 - 4x$, $x \in R$!
12. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linier dua variabel dan dua persamaan dari $2x + y = 5$ dan $-3x + 2y = -1$!
13. Tentukan himpunan penyelesaian persaman linier dua variabel dari $-2x + 3y = 5$ dan $-x + y = -1$!
14. Tentukan solusi persamaan linier simultan berikut menggunakan metode eliminasi substitusi!
    $3x_1 - 2x_3 + x_2 = 1$

    $-4x_2 - 5x_1 + x_3 = -4$

    $x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$
15. Tentukan solusi persamaan linier simultan berikut menggunakan metode eliminasi dan substitusi!
    $3x_1 - 2x_3 + x_2 = 3$

    $-4x_2 - 5x_1 + x_3 = -5$

    $x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$

3. **Umpan Balik dan Tindak Lanjut**

Cocokanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif yang terdapat dibagian akhir bahan bekajar ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi ini.

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{Jumlah\ jawaban\ yang\ benar}{Jumlah\ Soal} \times 100\%$$

Dengan arti tingkat penguasaan:
90 - 100% = Baik Sekali
80 - 89% = Baik
70 - 79% = Cukup
< 70% = Kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan materi bahan belajar selanjutnya. Jika masih di bawah 80% Anda harus mengulangi materi bahan belajar ini, terutama bagian yang belum dikuasai.

<u>Self Evaluation</u>

Selanjutnya mohon menjawab dengan jujur dan bertanggung jawab dengan memberikan tanda "✓" pada jawaban "Ya" atau "Tidak"

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1	Saya dapat menjelaskan konsep dasar relasi dengan benar.		
2	Saya dapat menjelaskan konsep dasar fungsi dengan benar.		
3	Saya dapat mengidentifikasi sifat-sifat fungsi dengan benar.		
4	Saya terampil dalam menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan kombinasi fungsi dengan tepat.		
5	Saya terampil dalam menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan komposisi fungsi dengan tepat.		
6	Saya terampil dalam menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan fungsi invers dengan tepat.		

7	Saya dapat menjelaskan konsep dasar persamaan linier dengan benar.		
8	Saya terampil dalam menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan persamaan linier dan persamaan linier simultan dengan tepat.		

Setelah anda melakukan “self evaluation” dengan jujur dan bertanggung jawab, mohon melakukan pengulangan pembelajaran secara mandiri pada bagian yang anda jawab “tidak”, anda dapat berdiskusi dengan rekan anda dan meminta bantuan dosen untuk lebih memahami. Akan tetapi, anda dapat melanjutkan ke pembelajaran selanjutnya untuk bagian jawaban “ya”

GLOSARIUM

Pasangan terurut : Sepasang bilangan dan dengan dalam urutan pertama dan dalam urutan kedua, dapat ditulis sebagai (x, y).

Domain : Daerah asal

Kodomain : Daerah kawan

Range : Daerah hasil

Fungsi *injektif* : jika $x_1 \neq x_2$ maka $f(x_1) \neq f(x_2)$ untuk setiap $x_1, x_2 \in A$, atau hal ini ekuivalen dengan jika $f(x_1) = f(x_2)$ maka $x_1 = x_2$.

Fungsi *surjektif* : jika range dari f sama dengan kodomain dari *f* atau ditulis $R_f = B$.

Fungsi *bijektif* : jika f adalah fungsi *injektif* dan *surjektif*.

Persamaan : Persamaan adalah kalimat terbuka yang menggunakan relasi sama dengan (=).

BAHAN BELAJAR 5

PERSAMAAN, FUNGSI, DAN GRAFIK FUNGSI KUADRAT

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat Materi

Pada bahan belajar sebelumnya kalian telah mepelajari persamaan, fungsi, dan grafik fungsi linier, maka pada bahan belajar ini kalian akan mempelajarai persamaan, fungsi, dan grafik fungsi kuadrat. Pada materi ini kalian akan mengenal grafik yang berbeda dengan sebelumnya, yaitu memiliki titik balik yang tidak ada pada grafik fungsi linier.

Jika kita mencermati grafik fungsi kuadrat, maka grafik tersebut seperti kehidupan, yaitu setiap manusia memilki titik balik kehidupan dan tugas kitalah sebagai manusia berusaha merubah ke arah yang lebih baik, seperti tertuang pada surat Ar-Ra'd ayat 11

لَهُۥ مُعَقِّبَٰتٌ مِّنۢ بَيۡنِ يَدَيۡهِ وَمِنۡ خَلۡفِهِۦ يَحۡفَظُونَهُۥ مِنۡ أَمۡرِ ٱللَّهِۗ إِنَّ
ٱللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوۡمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُواْ مَا بِأَنفُسِهِمۡۗ وَإِذَآ أَرَادَ ٱللَّهُ بِقَوۡمٖ
سُوٓءٗا فَلَا مَرَدَّ لَهُۥۚ وَمَا لَهُم مِّن دُونِهِۦ مِن وَالٍ ﴿١١﴾

Artinya : *Baginya (manusia) ada malaikat-malaikat yang selalu menjaganya bergiliran, dari depan dan belakangnya. Mereka menjaganya atas perintah Allah. Sesungguhnya Allah tidak akan mengubah keadaan suatu kaum sebelum mereka mengubah keadaan diri mereka sendiri. Dan apabila Allah menghendaki keburukan terhadap suatu kaum, maka tak ada yang dapat menolaknya dan tidak ada pelindung bagi mereka selain Dia.*

2. **CPMK**

   Penulis berharap bagi pembaca yang telah mempelajari bahan belajar ini, secara umum diharapkan dapat menjelaskan konsep – konsep dan prinsip – prinsip dari persamaan, fungsi, dan grafik fungsi kuadrat. Adapun capaian pembelajaran mata kuliah (CPMK) pada bahan belajar ini adalah mahasiswa mampu menguasai persamaan, fungsi, dan grafik fungsi kuadrat

3. **Sub CPMK**

   Berdasarkan CPMK yang telah dirancang, selanjutnya berikut merupakan sub – CPMK yang telah dirancang, yaitu:
   a. Mahasiswa mampu menguasai persamaan kuadrat
   b. Mahasiswa mampu menguasai fungsi kuadrat
   c. Mahasiswa mampu menguasai grafik fungsi kuadrat

4. **Tujuan Pembelajaran**

   Setelah membaca dan mengikuti serangkaian kegiatan pada bagian ini, diharapkan:

   a. Mahasiswa mampu menjelaskan pengertian konsep persamaan, fungsi, dan grafik fungsi kuadrat dengan tepat.

   b. Mahasiswa dapat menyelesaikan soal-soal yang terkait dengan persamaan, fungsi, dan grafik fungsi kuadrat dengan benar.

   c. Mahasiswa dapat memilih cara penyelesaian yang tepat terkait permasalahan yang terkait dengan Persamaan, Fungsi, dan Grafik Fungsi kuadrat dengan tepat.

   d. Mahasiswa mampu menjastifikasi permasalahan yang berkaitan dengan Persamaan, Fungsi, dan Grafik Fungsi kuadrat dengan benar.

5. **Petunjuk Penggunaan Modul**

   Bacalah pentunjuk penggunaan modul berikut!

a. Bacalah dan pahami materi yang ada pada bahan belajar ini.
b. Kerjakan setiap tugas diskusi terhadap materi-materi yang dibahas dalam bahan belajar ini.
c. Jika belum menguasai level materi yang diharapkan, ulangi lagi pada bahan belajar sebelumnya atau bertanyalah kepada dosen.

B. KEGIATAN BELAJAR

1. Persamaan Kuadrat

Persamaan kuadrat merupakan dasar unutk dapat membuat grafik fungsi kuadrat yang dalam aplikasi di kehidupan sehari-hari dapat dilihat dalam lengkungan jembatan, jetcoster, dan lain sebagainya. Sebelum kita melangkah lebih lanjut terkait grafik fungsi kuadrat, terlebih dahulu kita memahami apa itu persamaan kuadrat.

Pengertian persamaan kuadrat adalah kalimat matematika yang mengandung satu atau lebih variabel yang derajat tertingginya **dua** yang dihubungkan dengan tanda “=”.

Bentuk umum persamaan kuadrat satu variabel adalah:
$ax^2 + bx + c = 0$, dimana $a \neq 0$.

Sebagai contoh adalah bentuk $2x^2 + 8x + 6 = 0$, dimana $a = 2$, $b = 8$, dan $c = 6$, serta akar-akar x pembentuknya adalah -1 dan -3.

1) Menentukan Akar-Akar Persamaan Kuadrat
   Terdapat tiga cara dalam mencari penyelesaian persamaan kuadarat, yaitu

   a) Memfaktorkan
      Contoh 5.1 :
      $2x^2 + 8x + 6 = 0$
      $\leftrightarrow (2x + 2)(x + 3) = 0$
      $\leftrightarrow (2x + 2) = 0$ atau $(x + 3) = 0$
      $\leftrightarrow 2x = - 2$ atau $x = -3$
      $\leftrightarrow x = -1$ atau $x = -3$
      Jadi, akar-akar persamaan dari $2x^2 + 8x + 6 = 0$
      Adalah -1 atau -3

   b) Melengkapi kuadrat sempurna
      Melengkapi kuadrat sempurna digunakan ketika bentuk persamaan kuadrat dapat tidak dapat dilakukan pemfaktoran.

Contoh 5.2 :
Tentukan akar-akar persamaan dari $x^2 + 8x + 6 = 0$, dimana bentuk tersebut tidak bias kita faktorisasikan.

Apakah kalian tahu mengapa kita tidak bias memfaktorisasikan? (Coba diskusikan dengan dosen dan teman-teman)

Dikarenakan $x^2 + 8x + 6=0$ tidak bias difaktorisasikan, maka kita akan mengunakan dengan melengkapi kuadart sempurna

$x^2 + 8x + 6=0$

$\leftrightarrow x^2 + 8x + \ = -6$

$\leftrightarrow x^2 + 8x + (\frac{-8}{2})^2 = -6 + (\frac{-8}{2})^2$, kedua ruas ditambahkan + $(\frac{-b}{2a})^2$

$\leftrightarrow x^2 + 8x + \ = -6 +$

$\leftrightarrow x^2 + 8x + \ = 10$

$\leftrightarrow (x + 4)^2 = 10$, ingat kembali $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$\leftrightarrow (x + 4) = \pm\sqrt{10}$

$\leftrightarrow x = -4 \pm\sqrt{10}$

$\leftrightarrow x = -4 + \sqrt{10}$ atau $-4-\sqrt{10}$

Sehingga akar-akar persamaan dari $x2 + 8x + 6 = 0$ adalah $-4 + \sqrt{10}$ atau $-4 - \sqrt{10}$

c) Rumus Kuadrat (Rumus abc), $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Rumus kuadrat atau juga dikenal dengan rumus abc ditemukan oleh matematikawan Islam yaitu Al-khawarizmi yang dikenal dengan bapak aljabar. Rumus abc ini telah digunakan selama berabad-abad sebagai salah satu solusi dalam mencari akar-akar persamaan kuadrat, yaitu dengan rumus sebagai berikut:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Contoh 5.3 :
Tentukan akar-akar persamaan kuadrat dari $x^2 + 6x - 7 = 0$

Dari soal kita mengetahui bahwa $a = 1$, $b = 6$ dan $c = -7$, sehingga

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4.1.(-7)}}{2.1}$$

$$\leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2}$$

$$\leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$\leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-6 \pm 8}{2}$$

$$\leftrightarrow x_1 = \frac{-6+8}{2}\ atau\ x_2 = \frac{-6-8}{2}$$
$$\leftrightarrow x_1 = \frac{2}{2}\ atau\ x_2 = \frac{-14}{2}$$
$$\leftrightarrow x_1 = 1\ atau\ x_2 = -7$$

Sehingga akar-akar persamaan dari $x^2 + 6x - 7 = 0$ adalah 1 atau -7

2) Menentukan Jenis Akar
Setelah kita mempelajari bagaimana mencari akar-akar dari persamaan kuadrat, berikutnya kita bisa menentukan jenis akar dari suatu persamaan kuadrat dengan melihat besar dari nilai determinan (D) suatu persamaan kuadrat, yaitu

$$\mathbf{D=b^2-4ac}$$

Dengan ketentuan sebagai berikut:
a) Jika D > 0, maka akar real dan berlainan
b) Jika D = 0, maka akar kembar
c) Jika D < 0, maka akar tidak real
d) Jika $D = k^2$, dengan k^2 bilangan kuadrat sempurna kedua akar rasional

Contoh 5.4:
Tentukan jenis akar dari persamaan-persamaan berikut:

- $x^2 - 7x + 10 = 0$
  $D = b^2 - 4ac$
  $= (-7)^2 - 4.1.10$
  $= 49-40$
  $= 9 > 0$
  Karena nilai D > 0, maka persamaan kuadrat $x^2 - 7x + 10 = 0$ memiliki akar real dan berlawanan yaitu 5 atau 2

- $x^2 + 6x + 9 = 0$
  $D = b^2 - 4ac$
  $= 6^2 - 4.1.9$
  $= 36-36$
  $= 0$
  Karena nilai D = 0, maka persamaan kuadrat $x^2 + 6x + 9 = 0$ memiliki akar kembar yaitu -3

- $x^2 - 4x + 10 = 0$
  $D = b^2 - 4ac$
  $= (-4)^2 - 4.1.10$
  $= 16 - 40$
  $= -24$

Karena nilai D < 0, maka persamaan kuadrat $x^2 - 4x + 10 = 0$, maka memiliki akar tidak real, yaitu 2 + √10 atau 2 - √10

3) Menentukan Jumlah dan Hasil Kali Akar-Akar Persamaan Kuadrat
Untuk meentukan hasil operasi akar-akar persamaan kuadrat seperti jumlah, kali, kudrat jumlah dan lain-lain kita dapat mencarinya tanpa mencari nilai dari akarnya terlebih dahulu, dengan aturan sebagai berikut:

Jumlah	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
Kali	$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$
Kuadrat Jumlah	$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2\, x_1\, x_2$
Pangkat 3 Jumlah	$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3\, x_1\, x_2\, (x_1 + x_2)$
Selisih Kuadrat	$(x_1 - x_2)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}$
Kebalikan Jumlah	$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 . x_2}$

Contoh 5.5:
Tentukan hasil dari operasi akar-akar dari persamaan $x^2 - 7x + 10 = 0$

a) $x_1^2 + x_2^2$

$\leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 \; -2x_1\, x_2$

$\leftrightarrow (-\frac{b}{a})^2 \; - 2\frac{c}{a}$

$\leftrightarrow (\frac{7}{1})^2 \; - 2\frac{10}{1}$

$\leftrightarrow$ 49-20

$\leftrightarrow$ 39

b) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

$\leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 . x_2}$

$\leftrightarrow \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}$

$\leftrightarrow \frac{-b}{c}$

$\leftrightarrow \frac{7}{10}$

c) $x_1^3 + x_2^3$

$\leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3 x_1 x_2 (x_1 + x_2)$

$\leftrightarrow (-\frac{b}{a})^3 - 3\frac{c}{a}(-\frac{b}{a})$

$\leftrightarrow (7)^3 - 3.10.7$

$\leftrightarrow 343 - 210$

$\leftrightarrow 133$

4) Menentukan Persamaan
Jika hanya diketahui akar-akar dari suatu persamaan kuadrat, kita dapat menusunnya menjadi suatu persamaan dengan aturan sebagai berikut:

$x^2 - (x_1 + x_2)\, x + x_1 . x_2 = 0$

Contoh 5.6:
Tentukan persamaan kuadrat berikut jika diketahui nilai dan

a) $x_1 = -4$ dan $x_2 = -2$

$\leftrightarrow x^2 - (x_1 + x_2)\, x + x_1 . x_2 = 0$

$\leftrightarrow x^2 + 6x + 8 = 0$

b) $x_1 = 3$ dan $x_2 = -1$

$\leftrightarrow x^2 - (x_1 + x_2)\, x + x_1 . x_2 = 0$

$\leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

c) $x_1 = \frac{1}{2}$ dan $x_2 = \frac{1}{3}$

$\leftrightarrow x^2 - (x_1 + x_2)\, x + x_1 . x_2 = 0$

$$\leftrightarrow x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0, \text{ kedua ruas dikalikan dengan 6}$$

$\leftrightarrow 6x^2 - 5x + 1 = 0$

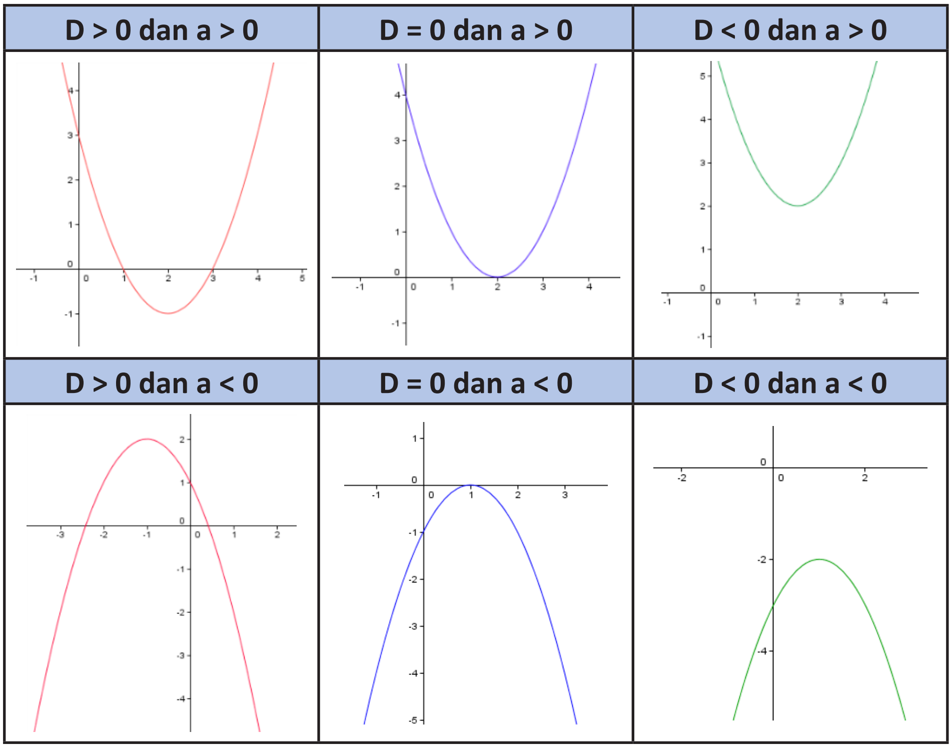
2. Fungsi dan Grafik Fungsi Kuadrat

Merupakan fungsi yang pangkat variabel tertingginya adalah 2, secara umum memiliki bentuk sebagai berikut:

$y = ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ dan $a, b, c \in R$

Sebuah fungsi kuadrat dapat dibuat grafiknya, dimana grafik fungsi kuadrat berbentuk parabola.

Secara umum bentuk grafik fungsi kuadrat jika dilihat dari nilai D dan a adalah sebagai berikut



Gambar 5.1. Grafik Fungsi jika dilihat dari nilai D dan a

1) Menggambar Grafik Kuadrat

Untuk menggambar grafik fungsi kuadrat dapat dilakukan dengan cara berikut:

a) Menentukan titik potong sumbu x dan sumbu y.

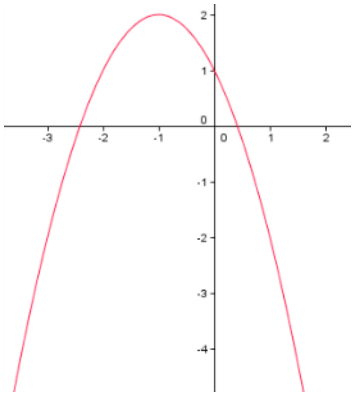
b) Menentukan persamaan sumbu simetri, garis $x = -\frac{b}{2a}$

c) koordinat titik balik $(x, y) = \left(-\frac{b}{2a}\right), \mathrm{f}(-\frac{b}{2a})$

Contoh 5.7:

Diketahui y = $-x^2 + 4x - 3$, maka gambarlah grafik fungsinya!
Jika kita lihat dari nilai a maka a < 0 dan nilai D adalah
D = $(4)^2$ - 4 . (-1) . (-3)
   = 16-12
   = 4>0

Maka bentuk grafiknya adalah terbuka ke bawah



Sekarang kita akan coba membuat grafik secara lengkap dengan koordinatnya, dengan langkah sebagai berikut:

- ✓ Titik potong sumbu x dan y
  - Titik potong dengan sumbu x, maka y = 0, yaitu
    $0 = -x^2 + 4x - 3$
    ↔ (-x + 1) (x-3)
    ↔ x = 1 atau x = 3
    Maka grafik melalui titik (1,0) dan (3,0)
  - Titik potong dengan sumbu y, maka x = 0
    y = -0^2 + 4.0 - 3 = -3, maka grafik melalui titik (0,-3)
- ✓ Sumbu simetri

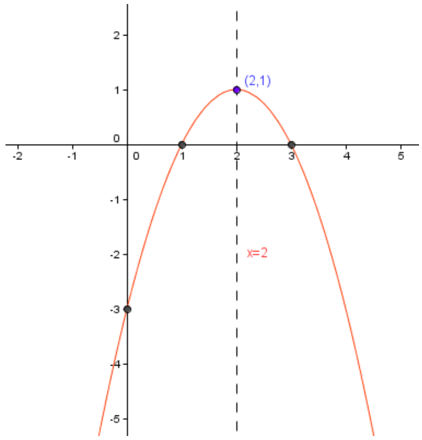
  Sumbu simetri terletak di garis $x = -\frac{b}{2a}$, maka pada x = 2
- ✓ Titik koordinat balik

  koordinat titik balik $(x, y) = \left(-\frac{b}{2a}\right), \mathrm{f}(-\frac{b}{2a})$

$$x = \left(-\frac{4}{2(-1)}\right) = 2;$$

$$y = \mathrm{f}\left(-\frac{b}{2a}\right) = -(2)^2 + 4(2) - 3 = 1$$

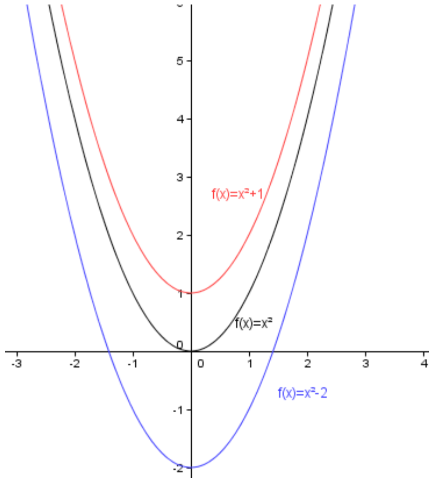
Maka koordinat titik balik (2,1), berikut grafik fungsi kuadrat dari $y = -x^2 + 4x - 3$



2) Pergeseran Grafik
   Sebuah grafik fungsi kuadrat, akan dapat digeser searah sumbu X ataupun searah sumbu Y. Misalkan terdapat sebuah grafik fungsi kuadrat y = (x), akan digeser sejauh ***m*** ke arah kanan, dan ***n*** satuan ke arah atas. Persamaan kuadrat itu akan menjadi:

   $\boldsymbol{y - n = f\,(x - m)}$

   Dengan grafik fungsinya seperti gambar berikut:



Gambar 5.2 Pergeseran Grafik Fungsi

Berdasarkan gambar 5.2 terlihat bahwa jika suatu fungsi ditambahkan atau dikurangi maka akan bergeser ke atas atau ke bawah.

3) Forum Diskusi
Perhatikan berita berikut!

- Berita Pertama

Jembatan Selat Sunda

Dari Wikipedia bahasa Indonesia, ensiklopedia bebas

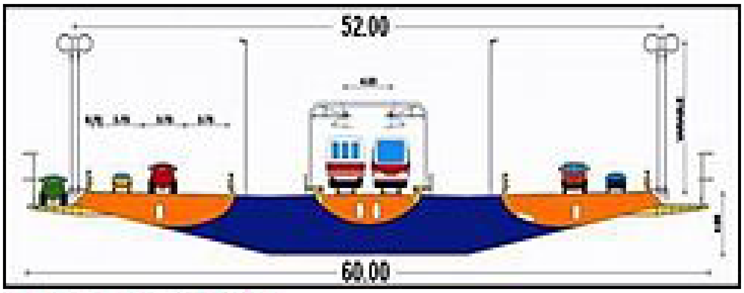
Jembatan Selat Sunda (JSS) adalah salah satu proyek besar pembangunan jembatan yang melintasi Selat Sunda sebagai penghubung antara Pulau Jawa dengan Pulau Sumatra. Proyek ini dicetuskan pada tahun 1960 dan sekarang akan merupakan bagian dari proyek Asian Highway Network (Trans Asia Highway dan Trans Asia Railway).[1] Dana proyek pembangunan Jembatan Selat Sunda (JSS) direncanakan berasal dari pembiayaan konsorsium diperkirakan menelan biaya sekitar 10 miliar dolar AS atau 100 triliun rupiah [2]yang akan dipimpin oleh perusahaan PT Bangungraha Sejahtera Mulia (BSM). Menurut rencana panjang JSS ini mencapai panjang keseluruhan 31 kilometer dengan lebar 60 meter, masing-masing sisi mempunyai 3 lajur untuk kendaraan roda empat dan lajur ganda untuk kereta api akan mempunyai ketinggian maksimum 70 meter dari permukaan air. JSS telah diluncurkan dalam soft launching pada tahun 2007 dan akan dimulai pembangunannya pada tahun 2010 [3]dan diperkirakan dapat mulai dioperasikan pada tahun 2020.[4]

Jembatan Selat Sunda	
Nama resmi	Jembatan Selat Sunda
Mengangkut	• Mobil • kereta api • motor
Melintasi	Selat Sunda
Pengelola	--
Desainer	v
Desain	Jembatan Suspensi
Panjang total	27 km
Lebar	--
Rentang terpanjang	--
Pembangun	--
Dibuka	Ditangguhkan
Tol	Ya

Struktur Jembatan Selat Sunda

Rencana Bentuk Jembatan Selat Sunda

Jembatan Selat Sunda (JSS) adalah salah satu proyek besar pembangunan jembatan yang melintasi Selat Sunda sebagai penghubung antara Pulau Jawa dengan Pulau Sumatra. Proyek ini dicetuskan pada tahun 1960 dan sekarang akan merupakan bagian dari proyek Asian Highway Network (Trans Asia Highway dan Trans Asia Railway).[1] Dana proyek pembangunan Jembatan Selat Sunda (JSS) direncanakan berasal dari pembiayaan konsorsium diperkirakan menelan biaya sekitar 10 miliar dolar AS atau 100 triliun rupiah [2]yang akan dipimpin oleh perusahaan PT Bangungraha Sejahtera Mulia (BSM). Menurut rencana panjang JSS ini mencapai panjang keseluruhan 31 kilometer dengan lebar 60 meter, masing-masing sisi mempunyai 3 lajur untuk kendaraan roda empat dan lajur ganda untuk kereta api akan mempunyai ketinggian maksimum 70 meter dari permukaan air. JSS telah diluncurkan dalam soft launching pada tahun 2007 dan akan dimulai pembangunannya pada tahun 2010 [3]dan diperkirakan dapat mulai dioperasikan pada tahun 2020.[4]



- Lebar jembatan, 60 m
- 2 x 3 lajur lalu lintas jalan raya
- Lintasan ganda (*double track*) Kereta Api
- 2 x 1 lajur darurat
- Saluran pipa gas/minyak/air, kabel fiber optik, kabel listrik, dll

Penampang melintang Jembatan Selat Sunda

Jembatan ini berawal dari gagasan Prof. Sedyatmo (alm), seorang guru besar di Institut Teknologi Bandung (ITB) pada tahun 1960 disebut dengan nama ***Tri Nusa Bimasakti*** yang berarti penghubung antara tiga pulau; yaitu Pulau Sumatra, Pulau Jawa, dan Pulau Bali. Kemudian, pada tahun 1965 Ir. Soekarno sebagai presiden RI memerintahkan kepada ITB agar melakukan uji coba desain penghubung di mana hasil dari percobaan tersebut berupa sebuah terowongan tunel, yang pada awal Juni 1989 terselesaikan dan diserahkan kepada Soeharto selaku presiden RI pada saat itu. Pada tahun 1997, Soeharto memerintahkan kepada Prof. B. J. Habibie selaku Menristek agar mengerjakan proyek yang diberi nama *Tri Nusa Bimasakti*. Pada tahun 1990-an Prof. Wiratman Wangsadinata dan Dr.Ir. Jodi Firmansyah melakukan pengkajian uji coba desain kembali terhadap perencanaan penghubungan antara Pulau Jawa dengan Pulau Sumatra, pada hasil pengkajian menyatakan bahwa penghubung dengan melalui sebuah jembatan ternyata lebih layak bila dibandingkan dengan penghubung dengan melalui sebuah terowongan di bawah dasar laut.[5] Sedangkan, untuk Jembatan Selat Bali yang menghubungkan antara Pulau Jawa dengan Pulau Bali belum terlaksana karena pemerintahan daerah Provinsi Bali belum bersedia.[6]

Prastudi Kelayakan

Prastudi kelayakan Jembatan Selat Sunda ini telah diserahkan pada Gubernur Banten, Lampung dan pemerintah pusat dalam suatu acara khusus bertempat di Hotel Borobudur Jakarta, pada tanggal 13 Agustus 2009.[7] Selanjutnya, pra-studi ini akan melibatkan 10 provinsi yang berada pada Pulau Sumatra.

Dengan dilakukan revisi Peraturan Presiden No. 67 Tahun 2005, maka dibentuk kembali kelompok studi kelayakan (*feasibility study*) yang terdiri dari soal teknis, tata ruang, dan keekonomian, serta sosial.[8] Namun, realisasi proyek Jembatan Selat Sunda masih perlu waktu kaji satu hingga satu setengah tahun lagi.[9]

Data Teknik

Master plan "Jembatan Selat Sunda" menggunakan Teknologi Delta Quadstone S.K.125

Rute

- Pulau Jawa - Pulau Ular sepanjang 3 kilometer merupakan jalan layang (viaduct)
- Pulau Ular - Pulau Sangiang sepanjang 8 kilometer akan merupakan jembatan gantung (suspension bridge)
- Pulau Sangiang sepanjang 5 kilometer merupakan jalan raya darat dan rel kereta api
- Pulau Sangiang - Pulau Panjurit sepanjang 8 kilometer akan merupakan jembatan gantung (suspension bridge)
- Pulau Panjurit sepanjang 7,6 kilometer merupakan jalan raya darat dan rel kereta api
- Pulau Panjurit - Pulau Sumatra sepanjang 3 kilometer merupakan jalan layang (viaduct).[10]

Perencanaan awal

Lokasi rencana terowongan di bawah dasar laut di Selat Sunda

Sebuah gagasan untuk membangun sebuah terowongan tunel di bawah tanah dan 40 meter di bawah dasar laut sebagai penghubung antara Pulau Jawa dengan Pulau Sumatra [11]

Progress hingga saat ini

Meskipun sudah terdapat hasil uji FS, ditambah lagi dengan kebutuhan transportasi yang sangat besar antara Pulau Jawa dengan Pulau Sumatera, hingga tahun ini belum ditemukan titik terang pelaksanaan pembangunan, karena Presiden Indonesia ke-7, Joko Widodo, "menolak" pembangunan jembatan ini. dengan alasan karena jika jembatan ini dibangun, kesejahteraan rakyat sekitar Merak dan Bakauheni akan menjadi sulit tercapai (misalnya harga tanah akan naik berkali-kali lipat dari harga semula dan masyarakat sekitar pelabuhan tidak bisa lagi membuka usaha (walaupun harga makanan dan minuman di atas kapal ferry sangat mahal[12]) di pelabuhan karena lalu lintas yang semula masih melalui kapal laut di pelabuhan (Merak dan Bakauheni) akan beralih menggunakan Jembatan Selat Sunda, karena pasti lebih cepat dan biaya transportasi antarpulau menjadi lebih murah, terutama jika Jalan Tol Trans-Sumatra dan Jalan Tol Trans-Jawa tersambung seluruhnya). Ditambah lagi, jika memang tetap dibangun, perkembangan ekonomi Indonesia seolah-olah terpusat hanya pada Pulau Sumatra, Jawa, dan Bali.[13][14]

Sumber: https://id.wikipedia.org/wiki/Jembatan_Selat_Sunda

Setelah kalian membaca berita di atas silakan berdiskusi dengan kelompok anda untuk mencawab pertanyaan-pertanyaan berikut:

Tugas Analisis Kasus

1. Deskripsikan kenapa sampai saat ini pembangunan jembatan Selat Suna belum terealisasikan?
2. Berdasarkan sketsa jembatan bahwa lengkungan antar tiang membentuk grafik fungsi kuadrat, simulasikan fungsi kuadrat yang tepat merepresentasikan lengkungan tersebut dengan lengkap dan deskripsikan jawabannya!
3. Deskripsikan hal-hal apa saja yang harus dipertimbangkan atas solusi yang diajukan?

C. PENUTUP

1. Rangkuman

a. Persamaan kuadrat adalah kalimat matematika yang mengandung satu atau lebih variabel yang derajat tertingginya **dua,** bentuk umunya adalah $ax^2 + bx + c = 0$, dimana $a \neq 0$

b. Terdapat 3 cara dalam mecari akar-akar persamaan kuadrat, yaitu pemfaktoran, melengkapi kuadrat sempurna, dan rumus abc.

c. Terdapat 4 ketentuan dalam menentukan jenis akar, yaitu

1) Jika $D > 0$, maka akar real dan berlainan
2) Jika $D = 0$, maka akar kembar
3) Jika $D < 0$, maka akar tidak real
4) Jika $D = k^2$, dengan k^2 bilangan kuadrat sempurna kedua akar rasional

d. Menggambar grafik fungsi dilakukan dengan langkah-langkah berikut:

1) Menentukan titik potong sumbu x dan sumbu y.
2) Menentukan persamaan sumbu simetri, garis $x = -\frac{b}{2a}$
3) koordinat titik balik $(x, y) = \left(-\frac{b}{2a}\right), f(-\frac{b}{2a})$

2. Tes Formatif

Agar kalian lebih menguasai materi pada kegiatan belajar ini, kerjakan soal-soal di bawah ini dengan benar!

1. Sumbu simetri dari $f(x) = 6 - 7x - 5x^2$ adalah...
2. Titik potong dengan sumbu Y pada soal no 1 adalah...

3. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan dari $2x^2 - 9x + 10 = 0$ maka nilai dari $(2x_1 - 3x_2)^2$ adalah...
4. Persamaan kuadrat yang akar-akarnya tiga kali dari akar persamaan $4x^2 - 16 = 0$

Gambarkan grafik fungsi kuadrat dari persamaan berikut

5. $y = 4x - x^2$
6. $y = x^2 - 4x + 3$
7. Tentukan grafik fungsi kuadrat $y = x^2$ jika digeser 2 satuan ke kanan dan 5 satuan ke arah atas, maka akan menjadi...
8. Grafik fungsi $(x) = x^2 - 9$ akan digeser ke kiri 2 satuan dan ke atas 3 satuan, maka persamaan grafik fungsi hasil pergeseran adalah ….
9. Tentukan persamaan kuadrat baru jika diketahui akar-akarnya adalah kebalikan dari akar-akar persamaan kuadrat $4x^2 + (a-7)x-1$ adalah...
10. Diketahui persamaan kuadrat $x^2 + 7x - 2 = 0$ memiliki akar-akar r dan s. Tentukan persamaan kuadarat yang memiliki akar-akarnya (r+2) dan (s+2) adalah...
11. Tentukan grafik fungsi kudrat jika diketahui koordinat titik baliknya adalah (1,2) dan melewati ttik (0,4) dengan nilai $D > 0$?
12. Tentukan persamaan grafik fungsi kuadrat jika diketahui sumbu simetrinya adalah $x = -1$, dan melewati titik (-3,0), (1,0), dan (0,6)?
13. Diketahui suatu fungsi kuadrat **,** memiliki akar-akar kembar selama nilai p yang memenuhi adalah bilangan bulat positif. Jastifikasi apakah pernyataan tersebut benar atau tidak serta buktikan jawaban anda!
14. Alya mengatakan bahwa setiap grafik fungsi kuadrat memiliki sumbu simteri yang dimana koordinat x nya sama dengan akar-akarnya selama fungsi tersebut memenuhi $D = 0$. Jastifikasi pernyataan Alya benar atau salah, berikan alasanmu!
15. Berikan dua fungsi kuadrat yang grafiknya saling bertolak belakang!

3. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Cocokkan jawaban anda dengan kunci jawaban tes formatif pada bahan belajar ini yang terdapat pada bagian akhir buku ajar ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan anda terhadap materi pada bahan belajar ini.

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{Jumlah\ jawaban\ yang\ benar}{Jumlah\ Soal} \times 100\%$$

Dengan arti tingkat penguasaan :

90 - 100% = Baik Sekali

80 - 89% = Baik

70 - 79% = Cukup

< 70% = Kurang

Apabila anda telah mencapai tingkat penguasaan sebesar kegiatan belajar selanjutnya. Akan tetapi bila hasil anda di bawah 80% maka anda harus mengulangi kembali materi pada bahan belajar ini, khususnya bagian yang belum ada pahami dan kuasai.

Self Evaluation

Selanjutnya mohon menjawab dengan jujur dan bertanggung jawab dengan memberikan tanda "✓" pada jawaban "Ya" atau "Tidak"

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1	Saya mampu menjelaskan pengertian konsep persamaan, fungsi, dan grafik fungsi kuadrat dengan tepat.		
2	Saya dapat menyelesaikan soal-soal yang terkait dengan persamaan, fungsi, dan grafik fungsi kuadrat dengan benar.		
3	Saya dapat memilih cara penyelesaian yang tepat terkait permasalahan yang terkait dengan Persamaan, Fungsi, dan Grafik Fungsi kuadrat dengan tepat.		
4	Saya mampu menjastifikasi permasalahan yang berkaitan dengan Persamaan, Fungsi, dan Grafik Fungsi kuadrat dengan benar.		

Setelah anda melakukan "self evaluation" dengan jujur dan bertanggung jawab, mohon melakukan pengulangan pembelajaran secara mandiri pada bagian yang anda jawab "tidak", anda dapat berdiskusi dengan rekan anda dan meminta bantuan dosen untuk lebih memahami. Akan tetapi, anda dapat melanjutkan ke pembelajaran selanjutnya untuk bagian jawaban "ya"

GLOSARIUM

Persamaan kuadrat	:	kalimat matematika yang mengandung satu atau lebih variabel yang derajat tertingginya **dua** yang dihubungkan dengan tanda “=”.
Fungsi kuadrat	:	fungsi yang pangkat variabel tertingginya adalah 2

BAHAN BELAJAR 6

PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat Materi

Manusia senantiasa menghadapi masalah dalam kehidupannya. Sebagai seorang mukmin, manusia seharusnya mengetahui bahwa Allah menciptakan dunia sebagai ujian belaka bagi manusia, kesulitan yang diberikan Allah adalah untuk menguji manusia. Setiap manusia pasti pernah mengalami saat sulit dalam hidupnya. Ujian yang diberikan oleh Allah kepada manusia sesuai dengan kadar manysia tersebut, tergantung bagaimana seseorang mengatasinya. Pada dasarnya Allah telah memberikan pedoman kepada manusia dalam menghadapi masalah hidup. Allah menurunkan surah *Al-Insyirah* yang di dalamnya berisi tentang kelapangan dada. Pedoman yang diberikan Allah itu semua diulas dalam surah *Al-Insyirah*, yang memuat bagaimana seseorang mengdahapi masalah dalam hidupnya. Allah mengetahui bahwa manusia membutuhkan pertolongan, bantuan dan pengawasan dari Allah. Oleh karena itu Allah memberikan jaminan *problem solving* dalam memecahkan masalah dalam kehidupannya. Pada bahan belajar 6 kalian akan mempelajari terkait masalah, bagaimana menyelesaiakannya, serta peran dalam pembelajaran

2. CPMK

Penulis berharap bagi pembaca yang telah mempelajari bahan belajar ini, secara umum diharapkan mahasisswa mampu memahami konsep dan penerapan Pemecahan Masalah Matematika yang merupakan CPMK pada bahan belajar ini.

3. **Sub CPMK**

   Berdasarkan CPMK yang telah dirancang, selanjutnya berikut merupakan sub – CPMK yang telah dirancang, yaitu memahami konsep dan penerapan Pemecahan Masalah Matematika dalam kehidupan sehari-hari

4. **Tujuan Pembelajaran**

   Setelah membaca dan mengikuti serangkaian kegiatan pada bagian ini, diharapkan:

   a. Mahasiswa dapat menyelesaikan soal-soal dengan benar yang terkait dengan Pemecahan Masalah Matematika dalam kehidupan sehari-hari
   b. Mahasiswa dapat memilih cara penyelesaian yang tepat terkait permasalahan yang terkait dengan Pemecahan Masalah Matematika dalam kehidupan sehari-hari
   c. Mahasiswa mampu menjastifikasi permasalahan dengan tepat yang berkaitan dengan pemecahan Masalah Matematika dalam kehidupan sehari-hari

5. **Petunjuk pengunaan modul**

   Bacalah petunjuk penggunaan modul berikut!

   a. Bacalah dan pahami materi yang ada pada bahan belajar ini.
   b. Kerjakan setiap tugas diskusi terhadap materi-materi yang dibahas dalam bahan belajar ini.
   c. Jika belum menguasai level materi yang diharapkan, ulangi lagi pada bahan belajar sebelumnya atau bertanyalah kepada dosen.

B. KEGIATAN BELAJAR

Masalah dalam kehidupan sehari-hari pasti kita temui, baik itu langsung atau tidak langsung. Mulai dari masalah di jalan raya. DKI Jakarta mendapat julukan "Kota Macet" karena penuhnya jalanan atas kendaraan roda dua dan roda empat, hal ini membuat kemacetan yang membuat telat jalanan penuh sesak dengan kendaraan, belum lagi masalah kenaikan harga pokok di pasar menjelang perayaan hari raya, dan kesenjangan sosial lainnya yang terjadi dimasyarakat. Masalah tidak saja dihadapi oleh orang dewasa, anak kecil pun mempunyai masalah, seperti mainannya yang rusak, anak yang sulit untuk makan dan mungkin anak TK atau SD sekalipun yang mempunyai tugas yang sukar atau hasil ulangan matematika rendah. Sebagaimana dalam kehidupan, setiap persoalan memiliki langkah penyelesaian masalah masingmasing. Menurut Akyuz, Yetik, dan Keser (2012), *"People face lots of problems in their everyday lives and try to solve these problems"*

Setiap manusia perlu belajar memecahkan masalah untuk melakukan tugasnya dalam kehidupan sehari-hari. Kalau kita renungkan kembali semua pelajaran yang telah kita pelajari semenjak dari bangku kelas 1 sekolah dasar, sebagian kecil dari semua hafalan itu yang kita gunakan dalam kehidupan sehari-hari. Soal-soal yang mampu kita pecahkan ketika sekolah juga sebagian kecil yang dimanfaatkan di luar lingkungan sekolah. Namun, di luar konteks materi yang terkandung dalam soal, setidaknya dengan berlatih mengerjakan soal, siswa telah berlatih keterampilan pemecahan masalah. Keterampilan pemecahan masalah meliputi memahami masalah, mengidentifikasi masalah, mencari informasi terkait dengan masalah, mengupayakan cara menyelesaikan masalah dan menyelesaikan masalah.

Pada pembelajaran matematika di sekolah guru biasanya memberikan pemecahan masalah pada bagian terakhir pelajaran. Sementara soal pemecahan masalah selalu ada pada setiap tes yang dihadapi peserta didik mulai dari sekolah dasar sampai ke perguruan tinggi dan hanya sedikit peserta didik yang mampu menyelesaikan masalah dengan benar. Walaupun demikian, pemecahan masalah tetap kurang mendapat perhatian dari guru. Terlihat pada proses pembelajaran yang didominasi oleh penyelesaian soal-soal rutin

1. Pengertian Masalah

Masalah dalam matematika ditentukan oleh ada tidaknya prosedur untuk menyelesaikan soal. Masalah rutin didefinisikan sebagai suatu tugas yang dapat diselesaikan dengan cara mensubstitusikan data tersebut kedalam penyelesaian umum yang dihasilkan sebelumnya, atau dengan mengikuti langkah demi langkah, tanpa menelusuri orginalitas masalahnya (Polya, 2011). Menurut Krulik dan Rudnick (1995) masalah dalam matematika adalah situasi yang dihadapkan kepada seseorang atau kelompok yang belum ada cara atau prosedur untuk menemukan jawaban, sedangkan masalah yang sudah ada cara atau prosedur untuk menyelesaikan disebut latihan.

Tokoh pemecahan masalah dari area matematika, Polya mengidentifikasi langkah-langkah umum penyelesaian masalah matematis yang harus dilakukan oleh setiap orang untuk memecahkan setiap masalah. Langkah umum pertama yaitu dengan memahami masalah tersebut, kemudian mengembangkan suatu rencana pemecahan masalah, mengoperasionalkan rencana yang telah dikembangkan tersebut, dan sampai pada langkah terakhir yaitu mengkaji ulang jawaban dan prosesnya (Sumarmo, 2013).

Sebagai ilustrasi berikut adalah sebuah soal matematika:

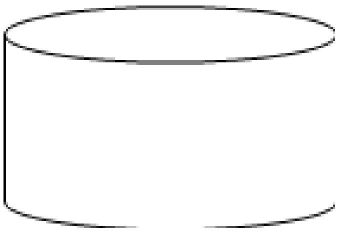
Contoh 6.1
Sebuah tabung mempunyai jari-jari 14 cm dan tinggi 15 cm. Berapa volume tabung tersebut?

Mencermati struktur yang terdapat dalam soal 1, diketahui panjang jari-jari alas tabung dan tinggi tabung sehingga soal tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan rumus volume tabung.

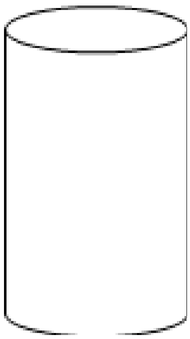
Dalam hal ini soal tersebut merupakan latihan. Sekarang bandingkan dengan soal berikut ini.

Contoh 6.2:
Selembar kertas akan digunakan untuk menggulung selimut tabung yang berukuran 20 cm X 30 cm. Tabung manakah yang mempunyai volume terbesar, apakah kertas yang digulung menurut panjangnya atau lebarnya?

Pada soal sebelumnya, peserta didik harus memikirkan dua kondisi, yaitu membuat silinder dengan menggulung pada bagian panjang kertas atau pada bagian lembar kertas.



Keliling alas = 30 cm
Tinggi = 20 cm



Keliling alas = 20 cm
Tinggi = 30 cm

Pada kedua kondisi di atas, tidak mudah untuk menebak volume tabung mana yang terbesar antara tabung yang lebar, tetapi pendek dan tabung yang kurus tetapi tinggi. Untuk memastikan tabung mana yang terbesar, harus dihitung terlebih dahulu volume dari setiap tabung. Hal pertama yang dilakukan adalah menentukan jari-jari (r) dari keliling alas dan kemudian menggunakan rumus volume tabung.

Dari penjelasan di atas, maka dapat dipahami bahwa soal kedua termasuk kategori pemecahan masalah, karena diperlukan beberapa tahapan sebagai perantara untuk sampai pada jawaban akhir. Berarti dalam penggunaan rumus, rumus volume tabung tidak dapat langsung digunakan karena sebelumnya harus ditentukan dahulu keliling alas, sehingga dari keliling alas baru dapat ditentukan jari-jari lingkaran.

Charles dan Lester (1982) mengemukakan terdapat tiga kriteria sebuah masalah, antara lain: (1) Membuat orang ingin menyelesaikan masalah; (2) Belum ada prosedur untuk menyelesaikan masalah; (3) Memerlukan usaha dan ketekunan untuk menemukan jawaban. Pada saat ingin menyelesaikan masalah, membuat sebuah soal juga merupakan masalah bagi seseorang, tetapi bukan masalah bagi yang lainnya karena merasa tidak tertarik untuk menyelesaikan masalah tersebut. Penyelesaian masalah memerlukan pengetahuan dan kemampuan yang lebih sehingga membuat lebih sulit daripada latihan.

2. Pengertian Pemecahan Masalah

Pemecahan Masalah dikemukakan oleh Choi et al dalam Yurniwati (2019) bahwa pemecahan masalah adalah proses kognitif dalam menemukan jawaban untuk mencapai tujuan atau hasil belajar yang ada metode atau cara untuk memecahkan masalah itu.

Memecahkan masalah merupakan suatu proses berpikir yang dilakukan oleh siswa untuk menyelesaikan atau mencari jalan keluar dari masalah atau persoalan yang sedang dihadapi dengan menggunakan pengetahuan atau keterampilan yang telah dimiliki sebelumnya. Pemecahan masalah memainkan peranan penting dalam matematika dan seharusnya mempunyai peranan utama dalam pendidikan matematika (NCTM, 2010).

Menurut Jonassen (2011), pemecahan masalah mempunyai dua ciri. Pertama, pemecahan masalah memerlukan presentasi mental dari masalah yang dikenal dengan lingkup masalah atau skema masalah atau model mental dari masalah. Lingkup masalah terdiri dari sejumlah simbol dan sejumlah simbol operasi. Lingkup masalah akan dapat diketahui dengan jelas pada masalah yang terstruktur dengan baik, sebaliknya akan menjadi sangat susah pada masalah yang tidak terstruktur *(iil problem)*. Menyajikan atau menyusun model dari sebuah masalah merupakan proses pemecahan masalah yang sangat menentukan. Mengonstruksi model sangat penting agar dapat memahami elemen sebuah masalah dan bagaimana elemen tersebut saling berinteraksi sebagai prosedur pemecahan masalah. Kedua, pemecahan masalah memerlukan beberapa kali manipulasi atau pengujian terhadap model mental dari masalah untuk dapat merencanakan solusi. Pelaku pemecahan masalah bergerak dalam lingkup masalah dalam membuat dan menguji hipotesis dan jawaban.

3. Tipe Masalah

Charles dalam Wardhani, dkk. (2010) menyatakan bahwa ada sedikitnya lima tipe masalah di luar bahan latihan (drill exercise) yang sering digunakan dalam penugasan matematika berbentuk pemecahan masalah. Lima tipe masalah tersebut pada intinya adalah sebagai berikut.

a. Masalah Penerjemahan Sederhana *(Simple Translation Problem)*

Penggunaan masalah dalam pembelajaran dimaksudkan untuk memberi pengalaman kepada peserta didik menerjemahkan situasi dunia nyata ke dalam pengalaman matematis.

Contoh 6.3:

Pak Dodo memiliki 30 bebek di dalam kandangnya. Di kandang yang berbeda, Pak Slamet mempunyai 20 bebek. Berapa lebihnya bebek yang dipunyai Pak Dodo dari yang dipunyai Pak Slamet?

b. Masalah Penerjemahan kompleks *(Complex Translation Problem)*

Sebenarnya masalah ini mirip dengan masalah penerjemahan yang sederhana, namun di dalamnya menuntut lebih dari satu kali penerjemahan dan ada lebih dari satu operasi hitung yang terlibat.

Contoh 6.4:

Suatu perusahaan produsen lampu mobil mengemas 12 lampu dalam satu paket. Setiap 36 paket dimasukkan dalam satu kardus. Toko Sabar adalah penjual suku cadang mobil. Toko Sabar memesan 5184 lampu kepada perusahaan tersebut. Berapa kardus lampu yang akan diterima oleh toko tersebut?

c. Masalah proses *(Process Problem)*

Penggunaan masalah tersebut dalam pembelajaran dimaksudkan untuk memberi kesempatan kepada peserta didik mengungkapkan proses yang terjadi dalam pikirannya.

Contoh 6.5:

Kelompok penggemar catur beranggota 15 orang akan mengadakan pertandingan. Jika setiap anggota harus bertanding dengan anggota lain dalam sekali pertandingan, berapa banyak pertandingan yang mereka mainkan?

d. Masalah Penerapan *(Applied Problem)*

Penggunaan masalah tersebut dalam pembelajaran dimaksudkan untuk untuk memberi kesempatan kepada peserta didik mengeluarkan berbagai keterampilan, proses, konsep, dan fakta untuk memecahkan masalah nyata (kontekstual). Masalah ini akan menyadarkan peserta didik pada nilai dan kegunaan matematika dalam kehidupan sehari-hari.

Contoh 6.6:

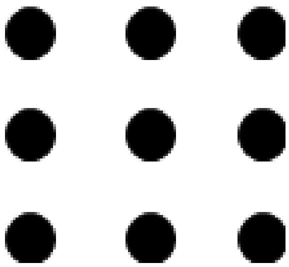
Berapa banyak kertas yang digunakan di sekolah Anda dalam satu tahun?

Berapa banyak pohon yang ditebang untuk membuat kertas-kertas yang digunakan di sekolah Anda tersebut dalam satu tahun?

e. Masalah Puzzle *(Puzzle Problem)*

Penggunaan masalah tersebut dalam pembelajaran dimaksudkan untuk memberi kesempatan kepada peserta didik mendapatkan pengayaan matematika yang bersifat rekreasi *(recreational mathematics)*. Mereka menemukan suatu penyelesaian yang terkadang fleksibel namun diluar perkiraan (memandang suatu masalah dari berbagai sudut pandang). Perlu diperhatikan di sini bahwa masalah puzzle tidak mesti berwujud teka-teki, namun dapat pula dalam bentuk aljabar yang penyelesaiannya di luar perkiraan.

Contoh 6.7:
Buatlah 4 garis melalui titik-titik berikut tanpa mengangkat alat tulis!



4. Langkah Penyelesaian Masalah Menurut Polya

Seperti telah dikemukakan sebelumnya bahwa belum adanya strategi tertentu untuk mencari jawaban masalah. Polya (1987) merumuskan empat langkah penyelesaian masalah yang dapat digunakan sebagai panduan, yaitu memahami masalah, membuat perencanaan, melaksanakan penyelesaian, dan mengecek kembali.

a. Memahami masalah

1). Anda harus memahami masalah.
2). Apa yang tidak diketahui? Apakah data? Apakah kondisi?
3). Apakah mungkin untuk memenuhi kondisi? Apakah kondisi cukup untuk menentukan yang tidak diketahui? Atau apakah itu cukup? Atau berlebihan? Atau bertentangan?
4). Buatlah gambar. Memperkenalkan notasi cocok.
5). Pisahkan berbagai bagian kondisi. Dapatkah Anda menuliskannya?

b. Merancang Strategi

1). Temukan hubungan antara data dan yang tidak diketahui. Anda mungkin harus mempertimbangkan masalah tambahan jika koneksi langsung tidak dapat ditemukan. Anda harus mendapatkan rencana akhir dari solusi.

2). Pernahkah Anda melihat sebelumnya? Atau apakah Anda melihat masalah yang sama dalam bentuk yang sedikit berbeda?
3). Apakah Anda tahu masalah yang berkaitan? Apakah Anda tahu sebuah teorema yang dapat berguna?
4). Lihatlah diketahui. Lalu cobalah untuk memikirkan masalah yang sama atau tidak diketahui sama!.
5). Berikut ini adalah masalah yang berkaitan dengan Anda dan dipecahkan sebelumnya. Bisakah Anda menggunakannya? Bisakah Anda menggunakan hasilnya? Bisakah Anda menggunakan metodenya? Jika Anda memperkenalkan Beberapa elemen tambahan, apakah penggunaannya memungkinkan?
6). Bisakah Anda menyatakan kembali masalah? Bisakah Anda menyatakan kembali masih berbeda? Kembali ke definisi.
7). Jika Anda tidak dapat memecahkan masalah yang diusulkan pertama kali, cobalah untuk memecahkan beberapa masalah terkait. Bisakah Anda membayangkan masalah yang terkait lebih mudah diakses? Masalah yang lebih umum? Masalah yang lebih khusus? Masalah serupa? Bisakah Anda memecahkan bagian dari masalah? Jauhkan hanya bagian dari kondisi tersebut, menjatuhkan bagian lai, sebarapa jauh adalah tidak diketahui kemudian ditentukan bagaimana bisa bervariasai? Bisakah Anda mendapatkan sesuatu yang berguna dari data Bisakah Anda memikirkan data lain yang sesuai untuk menentukan yang tidak diketahui Bisakah anda mengubah yang diketahui atau data, atau keduanya jika diperlukan sehingga tidak diketahui baru dan data baru lebih dekat satu sama lain?
8). Apakah anda menggunakan semua data? Apakah anda menggunakan seluruh kondisi? Apakah anda diperhitungkan semua gagasan penting yang terlibat dalam masalah?

c. Melaksanakan Rencana

1). Laksanakan rencana Anda.
2). Melaksanakan rencana Anda dari solusi, periksa setiap langkah.
3). Dapatkah Anda Melihat dengan jelas bahwa langkah ini benar?
4). Dapatkah Anda membuktkan bahwa itu benar?

d. Mengecek Kembali

1). Periksa solusi yang diperoleh.
2). Dapatkah Anda memeriksa hasilnya? Dapatkah Anda Memeriksa argument?
3). Dapatkah Anda Memperoleh solusi berbeda? Bisakah Andamelihat sekilas?
4). Dapatkah Anda menggunakan hasil,atau Metode, Untuk beberapa masalah lain?

5. Strategi Pemecahan Masalah

1). Cara dan gunakan pola:
Siswa mengidentifikasi pola dan memperluas pola untuk memecahkan masalah.

2). Bangun sebuah model:
Siswa menggunakan benda untuk mewakili situasi Caru dan gunakan pola: Siswa mengidentifikasi pola dan memperluas pola untuk memecahkan masalah.

3). Membuat gambar atau diagram:
Siswa menunjukkan apa yang terjadi dalam masalah dengan gambar atau diagram.

4). Membuat tabel atau grafik:
Siswa mengatur dan merekam datanya dalam tabel grafik atau grafik. Siswa lebih cenderung menemukan pola atau melihat hubungan saat ditujukan secara visual.

5). Menuliskan kalimat matematika:
Jika masalah yang melibatkan operasi bilangan dan angka strategi sering mengarah pada kalimat matematika atau ekspresi hubungan dengan angka atau symbol.

6). Tebak dan uji:
Dengan mencari berbagai solusi yang mungkin siswa dapat menemukan apa yang berhasil dan mana yang tidak sekalipun solusi potensial tidak berhasil hal itu mungkin memberi petunjuk tentang kemungkinan lain atau membantu siswa untuk memahami masalahnya.

7). Selesaikan masalah yang lebih sederhana atau hancurkan masalahnya menjadi beberapa bagian:
Jika masalah terlalu besar atau rumit untuk diselesaikan siswa dapat mengurangi ukuran masalah atau memecahnya menjadi beberapa bagian agar lebih mudah ditangani.

8). Bekerja mundur:
Menimbang tujuan pertama bisa membuat beberapa masalah menjadi lebih mudah dimulai dengan tujuan akhir membantu siswa mengembangkan strategi yang mengarah pada solusi dengan mendukung prosesnya.

6. Peran Pemecahan Masalah Dalam Pembelajaran

Stanick dan Klipatrick dalam Schoenfeld (1992) mengidentifikasi lima peran pemecahan masalah sebagi berikut.

1). Sebagai pembenaran untuk mengajar matematika. Secara historis, pemecahan masalah telah dimasukkan dalam kurikulum matematika di sekolah. Setidaknya beberapa masalah terkait dengan pengamalan dunia nyata dimasukkan dalam kurikulum untuk meyakinkan peserta didik dan guru bahwa matematika digunakan dalam kehidupan sehari-hari.
2). Untuk memberikan motivasi khusus untuk topik subjek. Masalah yang sering digunakan untuk di perkenalkan topik secara implisit atau eksplisit dinyatakan kepada peserta didik bahwa "ketika anda telah belajar pelajaran yang berikut. Anda akan mampu memecahkan masalah semacam ini."
3). Sebagai rekreasi masalah Sebagai rekreasi dimaksud untuk memotivasi peserta didik lebih luas dan dapat memberikan pengalaman kepada peserta didik bahwa matematika bisa menyenangkan.
4). Sebagai sarana untuk mengembangkan keterampilan baru pemecahan masalah dapat digunakan sebagai pengantar kepada materi pelajaran baru, dan sebagai konteks untuk mendiskusikan materi pokok.
5). sebagai praktik. sebagian besar guru memberi peserta didik masalah agar peserta didik berlatih menguasai keterampilan pemecahan masalah.

C. PENUTUP

1. Rangkuman

Masalah dalam matematika adalah situasi yang dihadapkan kepada seseorang atau kelompok yang belum ada cara atau prosedur untuk menemukan jawaban, sedangkan masalah yang sudah ada cara atau prosedur untuk menyelesaikan disebut latihan. Pemecahan masalah adalah proses kognitif dalam menemukan jawaban untuk mencapai tujuan atau hasil belajar yang ada metode atau cara untuk memecahkan masalah itu. Terdapat 5 tipe masalah yaitu; (1) Masalah Penerjemahan Sederhana, (2) Masalah Penerjemahan kompleks, (3) Masalah proses, (4) Masalah Penerapan, dan (5) Masalah Puzzle. Polya merumuskan empat langkah penyelesaian masalah yang dapat digunakan sebagai panduan, yaitu memahami masalah, membuat perencanaan, melaksanakan penyelesaian, dan mengecek kembali.

2. Tes Formatif

a. Siapakah tokoh tokoh pemecahan masalah dibidang mateamatika?
b. Apa yang dimaksud dari metode pemecahan masalah?
c. Sebutkan 3 kriteria masalah!

d. Sebutkan 4 langkah menyelesaikan masalah menurut Polya?
e. Siswa harus dapat memikirkan langkah-langkah apa saja yang penting dan saling menunjang untuk dapat memecahkan masalah yang di hadapinya.

   Dalam penjelasan di atas termasuk ke dalam tahapan Polya yang ke …. yaitu ….

f. Bacalah pertanyaan berikut dengan seksama.

   Masalah pertama:
   i. Andi dan Sasha adalah kakak beradik yang mempunyai tanggal dan bulan kelahiran yang sama. Tiga tahun yang lalu umur Andi lima kali umur Sasha. Dua tahun yang akan datang umur Andi tiga kali umur Sasha. Ditanya: Berapa umur Andi dan Sasha sekarang?

   Masalah Kedua:
   ii. Diketahui: Tika dan Anggi merupakan kakak beradik yang memiliki tanggal dan bulan kelahiran yang sama. Empat tahun yang lalu umur Tika adalah 4 kali umur Anggi. Selisih umur Tika dan Anggi adalah 3 tahun. Ditanya: Berapa umur Tika dan Anggi sekarang?

   Pertanyaan: Proses apakah yang harus dilakukan ketika menjumpai seperti dua masalah di atas?

g. Dalam mengajar siswa untuk memecahkan masalah perlu adanya perencanaan. Tuliskan perencanaan yang harus dilakukan!

h. Tuliskan 5 tipe masalah!

i. Beberapa masalah terkait dengan pengamalan dunia nyata dimasukkan dalam kurikulum untuk meyakinkan siswa dan guru bahwa matematika digunakan dalam kehidupan sehari-hari. Pernyataan tersebut termasuk ke dalam peran pemecahan masalah dalam pembelajaran yaitu sebagai …..

j. Memotivasi siswa lebih luas dan dapat memberikan pengalaman kepada peserta didik bahwa matematika bisa menyenangkan. Pernyataan tersebut termasuk ke dalam peran pemecahan masalah dalam pembelajaran yaitu sebagai …..

k. Amatilah soal berikut:

   Hani, Ratna dan Yuli membeli baju dan kaos bersama-sama di sebuah toko. Hani membeli tiga baju dan dua kaos seharga Rp280.000,00. Ratna membeli satu baju dan tiga kaos seharga Rp210.000,00.
   a. Tuliskan makna kata dari kata yang bercetak miring!
   b. Berapa yang akan dibayar Yuli jika membeli dua baju dan dua kaos?
   c. Tuliskan metode yang digunakan untuk menyelesaikan soal tersebut!

Jika jawaban siswa seperti ini, maka dimanakah letak kesalahan siswa tersebut?

Jawaban siswa seperti ini :

$$\begin{array}{l|l} 3x+2y == 280.00 & x1 \rightarrow 3x+2y = 280.000 \\ x+3y = 210.000 & x3 \rightarrow 3x+9y = 630.000 - \end{array}$$

$$-7y = -350.000$$

$$y = \frac{-350.000}{-7}$$

$$y = 50.000$$

$$\leftrightarrow 3x+2y = 280.000$$
$$\leftrightarrow 3x+2(50.000) = 280.000$$
$$\leftrightarrow 3x+100.000 = 280.000$$
$$3x = 280.000 - 100.000$$
$$x = \frac{180.000}{3}$$
$$x = 90.000$$

l. Buatlah soal pemecahan masalah untuk operasi bilangan.

m. Tuliskan penjelasan dari tahapan Polya yang ketiga yaitu melaksanakan rencana (*solving)!*

n. Tuliskan strategi dalam pemecahan masalah!

o. Lakukan analisis pada soal berikut:
Pak Indra membeli selembar tripleks seharga Rp. 125. 000. Pak Indra meminta agar tripleks tersebut dipotong menjadi 3 bagian yang sama, lalu beliau dikenakan biaya Rp. 3.500 sekali potong. Selanjutnya Pak Indra harus membayar biaya pengecatan sebesar 30% dari seluruh biaya setelah pemotongan. Toko memberikan tanda pembayaran sebagai berikut:

1 lembbar tripleks @Rp. 125.000	Rp. 125.000
3x Pemotongan @Rp. 3500	Rp. 10.500 +
	Rp. 135.000
Pengecatan	Rp. 40.650 +
	Rp. 176.150

Amatilah nota tersebut, lakukan analisis soal dan jawaban. Benar atau Salah nota tersebut?

3. **Umpan Balik dan Rencana Tindak Lanjut**

Cocokkan jawaban anda dengan kunci jawaban tes formatif pada bahan belajar ini yang terdapat pada bagian akhir buku ajar ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan anda terhadap materi pada bahan belajar ini.

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah jawaban yang benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Dengan arti tingkat penguasaan:
90 - 100% = Baik Sekali
80 - 89% = Baik
70 - 79% = Cukup
< 70% = Kurang

Apabila anda telah mencapai tingkat penguasaan sebesar kegiatan belajar selanjutnya. Akan tetapi bila hasil anda di bawah 70% maka anda harus mengulangi kembali materi pada bahan belajar ini, khususnya bagian yang belum ada pahami dan kuasai.

Self Evaluation

Selanjutnya mohon menjawab dengan jujur dan bertanggung jawab dengan memberikan tanda "✓" pada jawaban "Ya" atau "Tidak"

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1	Saya dapat menyelesaikan soal-soal dengan benar yang terkait dengan Pemecahan Masalah Matematika dalam kehidupan sehari-hari		
2	Saya dapat memilih cara penyelesaian yang tepat terkait permasalahan yang terkait dengan Pemecahan Masalah Matematika dalam kehidupan sehari-hari		
3	Saya mampu menjastifikasi permasalahan dengan tepat yang berkaitan dengan pemecahan Masalah Matematika dalam kehidupan sehari-hari		

Setelah anda melakukan "self evaluation" dengan jujur dan bertanggung jawab, mohon melakukan pengulangan pembelajaran secara mandiri pada bagian yang anda jawab "tidak", anda dapat berdiskusi dengan rekan anda dan meminta bantuan dosen untuk lebih memahami. Akan tetapi, anda dapat melanjutkan ke pembelajaran selanjutnya untuk bagian jawaban "ya"

GLOSARIUM

Masalah	:	situasi yang dihadapkan kepada seseorang atau kelompok yang belum ada cara atau prosedur untuk menemukan jawaban
Pemecahan masalah	:	proses kognitif dalam menemukan jawaban untuk mencapai tujuan atau hasil belajar yang ada metode atau cara untuk memecahkan masalah itu

BAHAN BELAJAR 7

PERMUTASI, KOMBINASI, DAN PELUANG

A. PENDAHULUAN

1. **Deskripsi Singkat Materi**

   Kehidupan manusia tidak terlepas dari kemungkinan-kemungkinan. Kemungkinan-kemungkina tersebut merupakan bagian dari konsep peluang yang akan kita pelajari bada bahan belajar 7 ini. Akan tetapi kemungkinan manusia tidaklah sama dengan ketentuan Allh, seperti dalam firmannya surat Yaasiin ayat 82 yang berbunyi

   اِنَّمَآ اَمْرُهٗٓ اِذَآ اَرَادَ شَيْـًٔاۖ اَنْ يَّقُوْلَ لَهٗ كُنْ فَيَكُوْنُ

   Artinya: Sesungguhnya keadaan-Nya apabila Dia menghendaki sesuatu hanyalah berkata kepadanya “Jadilah” maka ter jadilah ia.(QS 36:82)

   Ayat dia atas mencerminkan bahwa segala sesuatu bagi Allah adalah pasti jika Allah menghendakinya yang jika kita kaitkan dengan peluang maka bernilai “1” untuk kejadian yang pasti. Semoga ayat tersebut menambah ketaqwaan kita sebagai hamba Allah dan memahami integrasi Al-Quran dengan bahan belajar 7 ini. Pada bahan belajar 7 kita akan mempelajari terkait permutasi dan kombinasi yang menjadi pendahuluan awal sebelum kita masuk ke dalam materi peluang.

2. **CPMK**

   Penulis berharap bagi pembaca yang telah mempelajari bahan belajar ini, secara umum diharapkan mahasisswa mampu menguasai permutasi, kombinasi, dan peluang Kombinasi, dan Peluang yang merupakan CPMK pada bahan belajar 7 ini.

3. **Sub CPMK**

   Berdasarkan CPMK yang telah dirancang, selanjutnya berikut merupakan sub – CPMK yang telah dirancang, yaitu mahasiswa mampu memahami konsep dan penerapan Permutasi, Kombinasi, dan Peluang

4. **Tujuan Pembelajaran**

   Setelah membaca dan mengikuti serangkaian kegiatan pada bagian ini, diharapkan:

   a. Mahasiswa dapat menyelesaikan soal-soal yang terkait dengan Permutasi, Kombinasi, dan Peluang

   b. Mahasiswa dapat memilih cara penyelesaian yang tepat terkait permasalahan yang terkait dengan Permutasi, Kombinasi, dan Peluang

   c. Mahasiswa mampu menjastifikasi permasalahan yang berkaitan dengan Permutasi, Kombinasi, dan Peluang**.**

5. **Petunjuk Penggunaan Modul**

   Bacalah petunjuk penggunaan modul berikut!

   a. Bacalah dan pahami materi yang ada pada bahan belajar ini.
   b. Kerjakan setiap tugas diskusi terhadap materi-materi yang dibahas dalam bahan belajar ini.
   c. Jika belum menguasai level materi yang diharapkan, ulangi lagi pada bahan belajar sebelumnya atau bertanyalah kepada dosen.

B. KEGIATAN BELAJAR

1. **Mengingat kembali (Faktorial)**

   Faktorial merupakan hasil kali bilangan positif yang kurang atau sama dengan n, dengan kondisi

$$n! = n \,.\, (n-1).\ (n-2).\ (n-3)\ .\ .\ .\ .\ 1$$

Contoh Soal 7.1:

Nilai dari 4! Adalah

$4! = 4 \,.\, 3.\ 2.\ 1 = 24$

Diskusi

Sekarang coba anda diskusikan dengan rekan anda mengapa 0! = 1, padahal jika kita lihat pada konsep factorial maka 1! Juga bernilai 1, mengapa hal tersebut bias terjadi?

Diskusikan lah dengan rekan anda dan dosen

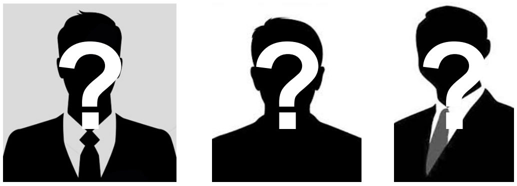
2. Permutasi

Permutasi adalah sebuah susunan dari sekumpulan objek dengan memperhatikan urutannya. Agar kalian lebih memahami silakan memperhatikan contoh 7.2 berikut

Contoh 7.2:

3 orang yaitu Amanah, Shidiq, Fathonah akan dipilih menjadi warek 1 dan warek 2 untuk mendampingi rektor baru UMJ. Berapa banyak kemungkinan pasangan yang bisa dipilih?

Jika kita melihat urutan maka kemungkinan yang dapat terbentuk seperti pada table berikut



Warek 1	Warek 2
Amanah	Shidiq
Amanah	Fathonah
Shidiq	Amanah
Shidiq	Fathonah
Fathonah	Amanah
Fathonah	Shidiq

Berdasarkan tabel maka terdapat 6 kemungkinan dalam penyusunan pasangan yang dapat dipilih.

Mengapa kita harus memperhatikan urutan karena yang jika yang menjadi warek 1 adalah Amanah akan tidak sama ketika yang menjadi warek 1 adalah Shidiq. Oleh karena itu kita harus memperhatikan urutan dalam permutasi. Untuk objek yang sedikit kita dapat membuat sketsa dengan tabel tetapi jika banyak tentuk akan sulit, maka kita bias menggunakan rumus permutasi.

Perhitungan permutasi dirumuskan sebagai berikut

$$_{n}P_{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Dengan
n adalah banyaknya objek yang ada
k adalah objek yang akan diambil/dipilih

Berdasarkan contoh 7.2 jika kita menghitung menggunakan rumus permutasi maka

$${}_3P_2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = \frac{6}{1} = 6$$

Terdapat emapt macam tipe dalam permutasi, yaitu:

a. Permutasi dengan semua objek diambil
b. Permutasi dengan sebagian objek diambil
c. Permutasi pengulangan
d. Permutasi melingkar

Secara lebih lengkao akan dibahas berikut ini!

a. Semua objek diambil

Permutasi dengan semua objek diambil jika objek-objek yang ada akan dipilih semua. Untuk kasus ini maka

Contoh 7.3

Terdapat 5 macam bunga yang akan disusun di dalam sebuah buket bunga, maka banyaknya cara menyusun bunga tersebut adalah...

Untuk contoh 7.3 maka berlaku

$${}_nP_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

sehingga 5 macam bunga yang akan disusun di dalam sebuah buket bunga, maka banyaknya cara menyusun bunga tersebut adalah...

$${}_5P_{5=}5! = 120$$

Jadi, ada 120 cara dalam menyusun buket bunga tersebut

b. Sebagian diambil

Untuk permutasi yang sebagian di ambil adalah dari objek yang maka tidak semua akan dipilih hanya sebagian saja, seperti pada contoh 7.2, dan contoh berikut ini:

Contoh 7.4:

Terdapat 10 calon warek UMJ untuk mengisi posisi warek 1 s.d. 4, maka banyak cara menyusun kepengurusan warek tersebut adalah...

$$_{10}P_4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10.9.8.7.6!}{6!} = 30.240$$

Jadi, ada **30.240** cara dalam menyusun kepengurusan tersebut

c. Pengulangan

Untuk permutasi dengan pengulangan adalah permutasi yang terdapat objek yang sama atau berulang. Untuk mengerjakan permutasi dengan pengulangan berlaku rumus berikut

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\,...\,n_k!}$$

Dengan n adalah objek yang ada dan n_1 sampai dengan n_k adalah objek yang berulang

Secara lebih jelas konsep dan penggunaan permutasi pengulangan dapat dilihat pada contoh 7.5 berikut:

Contoh 7.5:

Banyaknya cara menyusun huruf dari kata "**MATEMATIKA**" adalah

Dari contoh diatas kita mengetahui bahwa dalam kata "MATEMATIKA" ada huruf (objek) yang berulang yaitu

M = 2, A = 3, dan T = 2

Sehingga

$$\frac{10!}{2!\,3!\,2!} = 151.200$$

Jadi, ada **151.200** cara dalam menyusun huruf dari kata "MATEMATIKA"

d. Melingkar

Permutasi melingkar adalah permutasi dimana objek-objeknya berada dalam posisi melingkar. Untuk mengerjakan permutasi dengan melingkar maka berlaku rumus berikut

$$(n-1)!$$

Agar lebih jelas memahami konsep dan aplikasinya silakan melihat pada contoh berikut

Contoh 7.6:

Terdapat 5 orang yang mengikuti bimtek di suatu organisasi Muhammadiyah. Ke-5 orang tersebut duduk mengelilingi meja bundar, maka berapa banyak cara susunan yang dapat terjadi

Berdasarkan rumus yang berlaku maka,

(5-1)!=4!=24

Jadi, ada **24** cara dalam menyusun posisi duduk tersebut

3. Kombinasi

Kombinasi adalah sebuah susunan dari sekumpulan objek tanpa memperhatikan urutannya, berbeda dengan permutasi yang memperhatikan urutannya. Untuk kombinasi berlaku

$$ {}_{n}C_{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} $$

Untuk lebih jelas terkait kombinasi dapat melihat pada contoh berikut ini:

Contoh 7.7:

3 orang yaitu Amanah, Shidiq, Fathonah akan bersalam satu dengan yang lainnya. Berapa banyak jabat tangan yang terjadi.

Dari kasus tersebut untuk jabat tangan tentu tidak perlu memperhatikan siapa yang bersalaman dahulu, sehingga kombinasi tidak memperhatikan urutan

Setiap jabat tangan ada 2 orang yang melakukan, maka

$$ 3C_2 = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3 $$

Jadi, jabat tangan yang terjadi adalah 3

4. Peluang

Peluang digunakan untuk melihat kemungkinan terjadinya sebuah kejadian. Dalam peluang ada hal-hal yang harus diperhatikan adalah:

a. Ruang Sampel
   Ruang sampel adalah himpunan semua kemungkinan yang dapat terjadi pada suatu percobaan. Misalkan kita melempar sebuah uang logam. Pada sebuah uang logam terdapat angka (A) dan gambar (G), maka ruang sampel dari percobaan itu adalah {A, G}.

b. Titik Sampel
   Anggota dari ruang sampel. Pada contoh melempar uang logam, titik sampelnya adalah A dan G.

c. Nilai Peluang
   Nilai dari sebuah peluang adalah 0 ≤ (A) ≤ 1, sebuah kejadian yang memiliki nilai peluang nol merupakan kejadian yang mustahil, dan sebuah kejadian memiliki nilai peluang satu merupakan kejadian yang pasti

Setelah kalian mengetahui terkait hal-hal yang harus diperhatikan dalam peluang, maka selanjutnya kita selanjutnya kita akan mempelajari kondisi yang berlaku pada peluang. Jika A adalah suatu kejadian dengan ruang sampel S, maka peluang kejadian A (ditulis P(A)) adalah

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Contoh 7.8:
Pada sebuah kelas, guru akan memilih satu orang perwakilan untuk membacakan hasil pengamatannya. Jika pada kelas tersebut terdapat 18 siswa laki-laki dan 12 siswa perempuan, maka berapakah peluang terpilihnya murid laki-laki?

Dari soal kita ketahui bahwa

n(A) = 18

n(S) = 30

Maka P(A) = $\frac{18}{30} = \frac{3}{5}$

Hint:

Dalam Bahasa matematika jika

Dan maka menggunakan operasi kali

Atau maka menggunakan operasi tambah

Sebagai contoh jika disoal ada menyatakan di dalam pertanyaannya seperti 2 laki dan 3 perempuan, maka dalam perhitungan banyaknya cara akan menggunakan operasi kali yaitu hasil dari 2 anak laki-laki **dikalikan** dengan hasil dari 3 anak perempuan

Akan tetapi jika soal 2 laki atau 3 perempuan, maka dalam perhitungan banyaknya cara akan menggunakan operasi tambah yaitu hasil dari 2 anak laki-laki **ditambahkan** dengan hasil dari 3 anak perempuan

5. Forum Diskusi

Rekam Jejak Sejarah 'Penyakit Kerajaan'

JAKARTA, ULTIMAGZ.com — Sejak 1998, dunia merayakan Hari Hemofilia Sedunia setiap 17 April agar dapat meningkatkan pemahaman serta kesadaran masyarakat mengenai hemofilia. Kerap kali, masyarakat memberi predikat penyakit ini dengan julukan '*The Royal Diseases*' atau 'Penyakit Kerajaan'.

Julukan tersbut muncul karena salah satu Ratu Inggris, Ratu Victoria (1837-1901) merupakan pembawa sifat atau *carrier* penyakit hemofilia. Untuk mengenal penyakit keturunan ini secara lebih dalam, berikut penjelasan dan rekam jejak sejarah hemofilia.

Dilansir dari situs resmi **Kementerian Kesehatan Republik Indonesia** (Kemenkes RI), hemofilia merupakan kondisi kelainan darah yang sulit untuk menggumpal atau membeku karena tubuh kekurangan protein pembekuan darah. Alhasil, darah penyintas tidak dapat dihentikan apabila terluka. Ketika pendarahan terlambat ditangani, hemofilia dapat membawa penderita pada kecacatan fisik dan berujung pada kematian.

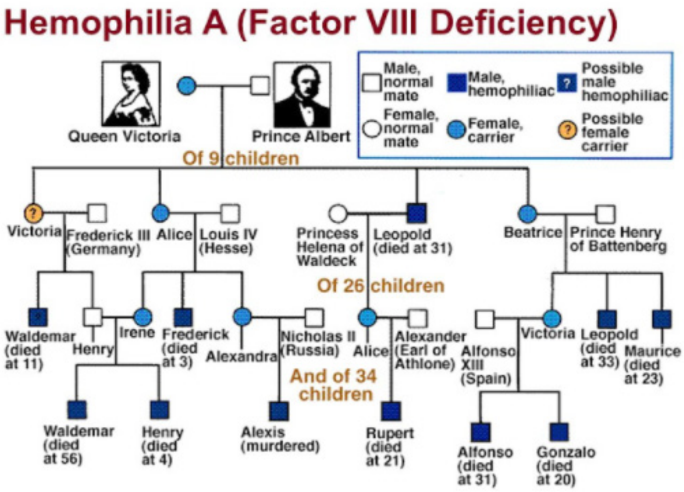
Kata hemofilia sendiri pertama kali ditemukan dalam tulisan karya Hopff di Universitas Zurich pada 1828. Namun, 100 tahun kemudian seorang dokter dan guru besar kedokteran di Jerman Johann Lukas Schonlein baru memperkenalkan istilah hemofilia atau *haemophilia*. Jejak ini ditemukan dalam ensiklopedia Britanica. Schonlein membuat istilah ini sejak ia harus menggunakan mikroskop agar dapat melakukan analisis kimiawi terhadap urin dan darah seorang pasien untuk menegakkan diagnosis penyakit.

Kemudian penyakit ini mendapatkan julukan 'Penyakit Kerajaan' ketika Ratu Victoria (nenek buyut Ratu Elizabeth II) melahirkan anak kedelapannya, Pangeran Leopold. Berdasarkan pemberitaan British Medical Journal pada 1868, Ratu Victoria dan Dokter Kerajaan tidak tahu anak laki-lakinya itu sakit apa. Padahal Leopod adalah penderita hemofilia sehingga luka memarnya sulit untuk pulih dan sering mengalami pendarahan. Dengan kondisi pengetahuan dunia dan tenaga medis tentang penanganan pasien hemofilia yang minim, akhirnya Leopod meninggal dunia pada saat berumur 31 tahun karena pendarahan otak.

Potret Ratu Victoria, Pangeran Leopod, dan Ratu Elizabeth II (kiri-kanan). (Foto: tribunnews.com)

Penyebab Ratu Victoria dapat menjadi pembawa penyakit genetik hemofilia pernah dijelaskan dalam situs ***kompas.com***. Pasalnya, beberapa keluarga kerajaan besar di Eropa akrab dengan praktik perkawinan sedarah atau inses. Padahal pernikahan antar-saudara di keluarga dapat menimbulkan efek buruk untuk keturunannya. Walaupun Ratu Victoria bukan pelaku inses, tetapi tindakan keluarganya yang membuat ia menjadi pembawa penyakit hemofilia. Hal ini terbukti dari kasus yang terjadi pada anak kedelapannya, Leopod dan tiga anak-anak perempuannya, Putri Victoria, Putri Alice, serta Putri Beatrice.

Meski ketiga putrinya tidak positif hemofilia, tetapi mereka menjadi pembawa genetik penyakit tersebut. Buktinya pada 1928, Viscount Trematon, anak laki-laki Alice, meninggal dengan penyebab yang sama seperti Leopod, yaitu pendarahan otak. Masalahnya, ketiga putri Ratu Victoria menikahi pria yang merupakan bangsawan dari Spanyol, Jerman, dan Rusia. Akibatnya, penyebaran penyakit ini menjadi semakin meluas ke kerajaan lain.



Silsilah penyakit hemofilia dalam keluarga kerajaan Ratu Victoria. (Foto: tribunnews.com)

Sebenarnya hemofilia sering terjadi pada laki-laki yang hanya memiliki satu kromosom X karena penyakit genetik ini berasal dari kelainan kromosom X. Dalam perhitungan genetis, perempuan memiliki dua kromosom X yang dapat membuatnya hanya sebagai pembawa atau *carrier* penyakit hemofilia. Maka dari itu, peluang keturunan laki-laki untuk terkena hemofilia lebih tinggi. Di sisi lain, perempuan dapat terjangkit hemofilia bila ayahnya hemofilia dan ibunya merupakan *carrier*. Namun, kasus ini jarang terjadi.

Hingga saat ini, diagnosa hemofilia hanya bisa diketahui lewat tes darah yang dilakukan oleh dokter. Dengan tes darah, dokter dapat mengetahui berapa lama waktu yang dibutuhkan tubuh untuk pembekuan darah, faktor pembekuan mana yang hilang, dan tingkat faktor pembekuannya. Sebelum memutuskan untuk tes darah, *Ultimates* dapat menyimak gejala-gejala penderita hemofilia yang disadur dari ***tirto.id***.

1. Setiap luka, gigitan, goresan, atau cedera gigi menyebabkan pendarahan eksternal yang berlebihan.
2. Sering mengalami mimisan tanpa sebab.
3. Terdapat memar-memar yang besar atau dalam di kulit.
4. Pendarahan yang tidak bisa dijelaskan setelah mendapatkan vaksin.
5. Nyeri dan bengkak di persendian seperti di lutut dan siku. Kemudian saat disentuh akan terasa panas, bengkak, dan sulit bergerak.
6. Terdapat darah di dalam urine atau feses.
7. Pendarahan di otak, termasuk sakit kepala, muntah, lesu, pengelihatan kabur, kelumpuhan hingga kejang-kejang.

Penulis: Elisabeth Diandra Sandi
Editor: Abel Pramudya
Foto: pexels.com, tribunnews.com
Sumber: kompas.com, tribunnews.com, tirto.id, cnnindonesia.com, idntimes.com

Tugas Analisis Kasus

1. Deskripsikan kaitan kasus di atas dengan hukum M?
2. Berdasarkan gambar silsilah penyakit hemophilia pada kerajaan Ratu Victoria, maka tentukan peluang cicit ratu Elizabeth II yaitu Putri Charlotte menjadi carrier hemofilia?
3. Deskripsikan hal-hal apa saja yang harus dipertimbangkan atas dugaan peluang tersebut?

C. PENUTUP

1. Rangkuman

a. Permutasi adalah sebuah susunan dari sekumpulan objek dengan memperhatikan urutannya, sedangkan kompinasi tidak memperhatikan urutan

b. Terdapat empat macam permutasi, yaitu semua objek diambil, sebagian objek diambil, permutasi berulang, dan melingkar.

c. Peluang merupakan kemungkinan suatu kejadian, dan nilai dari sebuah peluang adalah $0 \leq P(A) \leq 1$,

d. 3 hal yang harus diketahui dalam peluang adalah, titik sampel, ruang sampel, dan nilai peluang.

2. Tes Formatif

1. Berapa banyak susunan kata yang dapat dibentuk dari kata "POLINOMINAL"?
2. Berapa banyak susunan kemenngan yang akan terbentuk untuk juara 1, juara 2, runner up 1, runner 2, dan runner up 3 dari 5 kandidat?
3. Berapa banyak urutan bekerja yang dapat disusun dari Ana, Bani, Caca, dan Danu jika Danu selalu diberikan urutan yang terakhir?
4. Jika diketahui dalam suatu ruang ujian terdapat 7 kursi dan 9 orang yang akan mengikuti ujian. Berapa cara pengaturan yang terbentuk jika satu orang peserta harus duduk di kursii tersebut?

5 Bu guru menanyakan soal kepada Muham yang berbunyi 15 orang teman Amir dan Amir sendiri akan membentuk tim sepak bola. Berapa banyak tim yang dapat terbentuk dengan syarat Amir harus menjadi bagian dari tim tersebut.Ketika bu guru selesai membacakan soal tersebut, Muha langsung berkata bahwa soal tersebut menggunakan permutasi. Jastifikasi jawaban Muha apakah benar/salah, berikan alasanmu atas jastifikasi tersebut dan jawablah berapa tim yang dapat dibentuk!

6 Terdapat 6 laki-laki dan 5 wanita yang akan dibentuk menjadi panitia yang terdiri dari 5 orang. Berapa banyak cara yang dapat dibentuk jika harus terdiri dari 3 laki-laki dan 2 wanita

7 Bu guru membacakan soal kepada Ani utnuk dijawabnya, soal tersebut berbunyi dari 10 siswa yang terdiri dari 6 putra dan 4 putri akan dibentuk tim yang terdiri 5 orang. Berapa banyak tim yang dapat terbentuk jika disyaratkan anggota putri terbanyak yang boleh diikutsertakan sebanyak 2 orang?. Setelah menghitung

Ani menjawab 43.200, jastifikasi apakah jawaban Ani benar/salah. Berikan alasanmu atas jastifikasi tersebut jika benar dan ungkapkan kesalahan Ani jika salah. Tentukan berapa jawaban atas soal tersebut?

8 Sebuah kartu diambil dari setumpuk kartu bridge, probabilitas yang terambil kartu King adalah...

9 Sebuah kotak berisi 15 kelereng merah dan 13 kelereng biru. Berapa peluang yang terjadi jika diambil dua kali berturut-turut tanpa pengembalian yaitu pertama kelereng merah dan kedua kelereng biru

10 Sebuah kotak berisi 13 kelereng merah dan 10 kelereng biru. Berapa peluang yang terjadi jika diambil dua kali berturut-turut dengan pengembalian yaitu pertama dan kedua adalah kelereng merah

11 Dua mata dadu di lempar secara bersamaan, maka peluang yang muncul mata dadu kembar atau mata dadu yang berjumlah 9 adalah...

12 3 laki-laki dan 4 perempuan akan mengikuti turnamen. Probabilitas penunjukkan yang dipilih jenis kelamin yang sama adalah sama. Akan tetapi, probabilitas penunjukkan perempuan 2 kali laki-laki. Maka probabilitas jika

   a. Laki-laki yang ditunjuk

   b. Perempuan yang ditunjuk

13 Ada 20 lampu dengan komposisi 12 menyala dan 8 mati. Dipilih 5 lampu secara acak. Probabilitas lampu yang dipilih tidak ada yang rusak adalah

14 Probabilitas hari ini cerah adalah 0,78, maka peluang hari ini tidak cerah adalah...

15 Percobaan melempar 2 keping uang logam, jika kedua uang tersebut dilempar sebanyak 100 kali, maka frekuensi yang muncul adalah keduanya gambar adalah

3. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Cocokkan jawaban anda dengan kunci jawaban tes formatif pada bahan belajar ini yang terdapat pada bagian akhir buku ajar ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan anda terhadap materi pada bahan belajar ini.

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah jawaban yang benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Dengan arti tingkat penguasaan :

90 - 100% = Baik Sekali

80 - 89% = Baik

70 - 79% = Cukup

< 70% = Kurang

Apabila anda telah mencapai tingkat penguasaan sebesar kegiatan belajar selanjutnya. Akan tetapi bila hasil anda di bawah 80% maka anda harus mengulangi kembali materi pada bahan belajar ini, khususnya bagian yang belum ada pahami dan kuasai.

SELF EVALUATION

Selanjutnya mohon menjawab dengan jujur dan bertanggung jawab dengan memberikan tanda "✓" pada jawaban "Ya" atau "Tidak"

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1	Saya dapat menyelesaikan soal-soal yang terkait dengan Permutasi, Kombinasi, dan Peluang		
2	Saya dapat memilih cara penyelesaian yang tepat terkait permasalahan yang terkait dengan Permutasi, Kombinasi, dan Peluang		
3	Saya mampu menjastifikasi permasalahan yang berkaitan dengan Permutasi, Kombinasi, dan Peluang.		

Setelah anda melakukan "self evaluation" dengan jujur dan bertanggung jawab, mohon melakukan pengulangan pembelajaran secara mandiri pada bagian yang anda jawab "tidak", anda dapat berdiskusi dengan rekan anda dan meminta bantuan dosen untuk lebih memahami. Akan tetapi, anda dapat melanjutkan ke pembelajaran selanjutnya untuk bagian jawaban "ya"

GLOSARIUM

Permutasi : sebuah susunan dari sekumpulan objek dengan memperhatikan urutan

Kombinasi : sebuah susunan dari sekumpulan objek tanpa memperhatikan urutannya

Ruang sampel : himpunan semua kemungkinan yang dapat terjadi pada suatu percobaan

Titik sampel : anggota dari ruang sampel

BAHAN BELAJAR 8

BARISAN, DERET, DAN POLA BILANGAN

A. PENDAHULUAN

1. **Deskripsi Singkat Materi**

   Perhatikan surat berikut, yaitu surat Ash Shaff ayat 4, yaitu

   إِنَّ ٱللَّهَ يُحِبُّ ٱلَّذِينَ يُقَٰتِلُونَ فِي سَبِيلِهِۦ صَفّٗا كَأَنَّهُم بُنۡيَٰنٞ مَّرۡصُوصٞ ٤

   Artinya: Sesungguhnya Allah menyukai orang-orang yang berperang di jalan-Nya dalam barisan yang teratur seakan-akan seperti suatu bangunan yang tersusun kokoh.

   Ayat diatas secara eksplisit menggunakan kata "barisan" yang terkait dengan bahan belajar 8 ini. Barisan, deret, dan pola bilangan merupakan topic yang sangat erat dengan kehidupan manusia baik di bidang ekonomi (penjualan perusahann) maupun bidang yang lain. Diharapkan bahan belajar 8 dapat membantu kita dalam mengadapi permasalahan di kehidupan sehari-hari.

2. **CPMK**

   Penulis berharap bagi pembaca yang telah mempelajari bahan belajar ini, secara umum diharapkan mahasisswa mampu menguasai barisan, deret, dan pola bilangan merupakan CPMK pada bahan belajar 8 ini.

3. **Sub CPMK**

   Berdasarkan CPMK yang telah dirancang, selanjutnya berikut merupakan sub – CPMK yang telah dirancang, yaitu mahasiswa mampu memahami konsep dan penerapan barisan, deret, dan pola bilangan.

4. **Tujuan Pembelajaran**

   Setelah membaca dan mengikuti serangkaian kegiatan pada bagian ini, diharapkan:

a. Mahasiswa dapat menyelesaikan soal-soal dengan benar yang terkait dengan Barisan, Deret, dan Pola Bilangan.

b. Mahasiswa dapat memilih cara penyelesaian yang tepat terkait permasalahan yang terkait dengan Barisan, Deret, dan Pola Bilangan.

c. Mahasiswa mampu menjastifikasi dengan tepat permasalahan yang berkaitan dengan Barisan, Deret, dan Pola Bilangan.

5. Petunjuk Penggunaan Modul

Bacalah petunjuk penggunaan modul berikut!

a. Bacalah dan pahami materi yang ada pada bahan belajar ini.

b. Kerjakan setiap tugas diskusi terhadap materi-materi yang dibahas dalam bahan belajar ini.

c. Jika belum menguasai level materi yang diharapkan, ulangi lagi pada bahan belajar sebelumnya atau bertanyalah kepada dosen.

B. KEGIATAN BELAJAR

1. Barisan, Deret, dan Pola Bilangan Aritmatika

Barisan aritmatika merupakan barisan yang memiliki sifat satu bilangan ke bilangan lainnya memiliki langkah (beda) yang sama. Sebagai contoh adalah barisan 3,5,7,9, dimana dari satu bilangan ke bilangan berikutnya memiliki perbedaan sebanyak 2.

Secara matematis barisan aritmatika dinyatakan sebagai

Sebuah barisan U_1, $U_{2,}$ $U_{3,}$ . . . , $U_{n-1,}$ U_n disebut barisan aritmatika jika setiap U_n - U_{n-1} = b, dengan b(beda) **merupakan konstanta**.

Sebuah barisan dinamakan **barisan aritmatika** jika dan hanya jika selisih dua suku yang berturutan selalu tetap

$$Un = a + (n-1)b$$

$$S_n = \frac{1}{2}n(a + U_n)$$

$$U_t = \frac{U_1 + U_n}{2}$$

Dengan

a merupakan suku pertama atau bias juga disebut U_1

b merupakan beda

n merupakan banyaknya suku

U_n merupakan suku ke-n

Sn merupakan jumlah suku n pertama

U_t merupakan suku tengan

Contoh 8.1
Suatu barisan -7, -11, -15, -19, …, maka rumus suku ke n adalah...

Dari soal kita ketahui bahwa a =-7 dan b = -5, maka

Un = a + (n - 1)b

↔ -7 + (n-1) (-5)

↔ -7 - 5n + 5

↔ -2 - 5n

Maka rumus suku ke –n adalah U_n = -2 -5n

Contoh 8.2:

Diketahui suatu barisan aritmatika 84, 82 $\frac{1}{2}$, ... Jika suku U_n = 0, maka nilai n adalah...

Dari soal diketahui a = 84, b = 1$\frac{1}{2}$, dan U_n = 0, maka

$$Un = a + (n-1)b$$

$$\leftrightarrow \; 0 = 84 + (n-1)\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$\leftrightarrow \; \frac{3}{2}n = 85\frac{1}{2}$$

$\leftrightarrow \; \frac{3}{2}n = \frac{171}{2}$, kemudian kedua ruas di kali 2

$$\leftrightarrow \; 3n = 171$$

$$\leftrightarrow \; n = \frac{171}{3}$$

$\leftrightarrow \; n = 57$, k

Maka nilai n adalah 57

Contoh 8.3:
Jika diketahui U_n = 3n - 5, maka rumus jumlah suku n pertama adalah...

Dari soal kita ketahui bahwa U_n = 3n – 5, maka untuk mengetahuin S_n, maka terlebih dahulu kita mencari a

U_n =3n – 5

U_1 =3.1 – 5 = -2 → a

Maka $S_n = \frac{1}{2} n(a + U_n)$

$\leftrightarrow \frac{1}{2}n(-2+3n-5)$

$\leftrightarrow \frac{1}{2}n(3n-7)$

$\leftrightarrow \frac{3n^2-7n}{2}$

Maka rumus jumlah suku ke n adalah $\frac{3n^2-7n}{2}$

Contoh 8.4:

Jika diketahui U_4 = 17 dan U_7 = 29, maka suku ke 20 dari barisan tersebut adalah...

Dari soal kita ketahui bahwa U_4 = 17 dan U_7 = 29

U_4 = 17

↔ 17 = a + 3b .... persamaan 1)

U_7 = 29

↔ 29 = a + 6b .... persamaan 2)

Dari persamaan 1) dan 2) kita eliminasi

29 = a + 6b

17 = a + 3b

12 = 3b - , maka nilai b = 4

Karena b = 4 kita masukan ke persamaan 1) diperoleh nilai a adalah

17 = a + 3.4

↔ 17 = a + 12

↔ 5 = a

Sehingga U_{20} adalah a + 19b = 5 + 19.4 = 81

Contoh 8.5

Jika diketahui U_4 = 7 dan $U_6 + U_8$ = 23, maka suku ke 25 dari barisan tersebut adalah...

Dari soal kita mengetahui U_4 = 7 dan $U_6 + U_8$ = 23

U_4 = 7, maka a + 3b = 7..................... persamaan 1)

$U_6 + U_8 = 23$ maka 2a + 12b = 23 ……… persamaan 2)

Kita lakukan eliminasi dari persamaan 1 dan 2

2a + 13b = 23

a + 3b = 7 → kalikan dengan 2, sehingga

2a + 12b = 23

<u>2a + 6b = 14 -</u>

6b = 9, maka $b = \frac{3}{2}$

Masukan nilai b ke persamaan 1), sehingga

$a + 3.\frac{3}{2} = 7$, maka nilai $a = \frac{5}{2}$

Maka $U_{25} = a + 24b = \frac{5}{2} + 24\frac{3}{2} = 28$

2. **Barisan, Deret, dan Pola Bilangan Geometri**

Barisan geometri merupakan barisan yang memiliki sifat satu bilangan ke bilangan lainnya memiliki rasio yang sama. Sebagai contoh adalah barisan 3, 6,12, 24, dimana dari satu bilangan ke bilangan berikutnya memiliki rasio sebanyak 2. Secara matematis, barisan geometri dinyatakan

Sebuah barisan U_1, U_2, U_3, . . . , U_{n-1}, U_n disebut barisan aritmatika jika setiap $\frac{U_n}{U_{n-1}} = r$, dengan r (rasio) merupakan konstanta.

Sebuah barisan dinamakan barisan geometri jika dan hanya jika rasio dua suku yang berturutan selalu tetap

$$Un = ar^{n-1}$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, r \neq 1$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, r > 1$$

$$S_{\sim} = \frac{a}{1 - r}$$

Hubungan U_n dan S_n pada barisan geometri adalah

$U_n = S_n - S_{n-1}$

Untuk n ganjil maka berlaku $U_t = \sqrt{aU_n}$

Agar lebih memahami deret geometri silakan dipelajari contoh-contoh soal berikut ini:

Contoh 8.6:
Suatu barisan diketahui U_5 = 48 dan U_8 = 384, maka rasio dari barisan tersebut adalah...

Dari soal kita ketahui U_5 = 48 dan U_8 = 3, maka

U_5 = 48

↔ ar^4 = 48 ....1) U_8 = 3

↔ ar^7 = 3   .... 2)

Dari persamaan 1) dan 2) maka diperoleh

$$\frac{ar^7}{ar^4} = \frac{3}{48}$$

$$\leftrightarrow r^3 = \frac{1}{16}$$

$$\leftrightarrow r = \frac{1}{4}$$

Contoh 8.7

Diketahui suatu barisan geometri dengan U_2 = $\frac{4}{3}$ dan U_5 = 36, maka U_6 dari barisan tersebut adalah...

Cara pengerjaan contoh 8.7 hampir sama dengan contoh 8.6 yaitu mencari r, silakan anda mencari r telebih dahulu secara mandiri

Setelah kalian mencari maka nilai r adalah 3

Lalu selanjutnya kita mencari nilai U_6

U_6 = ar^5 = ar^4r = 36 . 3 = 108

Contoh 8.8
Jika diketahui suatu deret geometri dengan a = 2, r = 3 , dan S_n = 80, maka tentukan nilai n

Kita ketahui bahwa rumus $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$, $r > 1$, maka

$$S_{20} = \frac{2(3^n - 1)}{3 - 1}$$

$$\leftrightarrow 80 = \frac{2(3^n - 1)}{2}$$

$$\leftrightarrow 80 = 3^n - 1$$

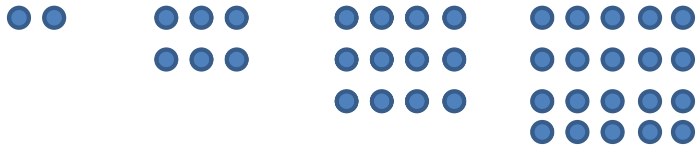
$$\leftrightarrow 81 = 3^n$$

$$\leftrightarrow 4 = n$$

3. Barisan, Deret, dan Pola Istimewa

Terdapat 4 pola istimewa, yaitu

- Pola Persegi Panjang

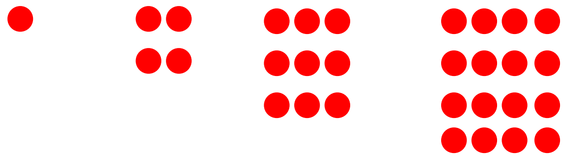


U_1 U_2 U_3 U_4 dst

Dari susunan barisan kita bisa menentukan pola persegi panjang yaitu

U_1	2	1 x 2
U_2	6	2 x 3
U_3	12	3 x 4
U_4	20	4 x 5
dst		
Pola bilangan		n (n +1)

- Pola Persegi

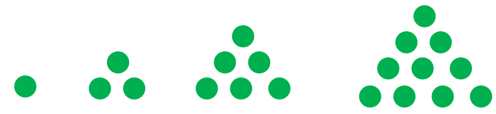


U_1 U_2 U_3 U_4 dst

Dari susunan barisan kita bisa menentukan pola persegi yaitu

U_1	1	1^2
U_2	4	2^2
U_3	9	3^2
U_4	16	4^2
dst		
Pola bilangan		n^2

- Pola Segitiga



U_1 U_2 U_3 U_4 dst

Dari susunan barisan kita bisa menentukan pola segitiga yaitu

U_1	1	1
U_2	3	2+1
U_3	6	3+2+1
U_4	10	4+3+2+1
dst		
Pola bilangan		$\frac{n(n+1)}{2}$

- Pola Fibonacci

  Pola Fibonacci sudah kita bahas di bahan belajar 1, yaitu bilangan setelahnya adalah hasil penjulahan dua suku sebelumnya. Coba kalian diskusikan bentuk rumus pola bilangan untuk Fibonacci dengan rekan-rekan dan dosen

4. Forum Diskusi

Perhatikan gambar berita berikut!

Benua Australia memang ada di atas lempeng tektonik yang memang paling aktif bergerak dan bertabrakan dengan lempeng Pasifik.

Tak hanya lempeng di bawah Australia, lempeng Pasifik dilaporkan juga bergerak tiap tahunnya. Dari data yang ada sejak tahun 1994, benua Australia sudah bergeser ke arah utara sejauh 1,5 meter. Karena hal itu, para ilmuwan di Australia sampai menghitung ulang posisi garis bujur dan garis lintang Australia. Kalau kamu bertanya-tanya apa yang terjadi pada Bumi saat kedua lempeng bertumbukkan?

Tugas Analisis Kasus

Misalkan anda merupakan orang yang diminta oleh Negara Indonesia bertanggung jawab atas berita diatas, maka

1. Deskripsikan apa yang menyebabkan lempengan tektonik bergerak?
2. Analisislah apa yang terjadi jika kedua lempengan bertumbukan, serta deskripsikan dari segala aspek kemungkinan yang terjadi?
3. Berdasarkan berita diatas simulasikan diperlukan berapa waktu sampai lempengan tersebut akan bertumbukan!
4. Analisislah hal-hal apa yang harus dilakukan supaya tidak terjadi hal-hal yang diinginkan?

C. PENUTUP

1. Rangkuman

a. Barisan aritmatika adalah barisan antara satu bilangan dengan bilangan lainnya memiliki beda yang sama
b. Barisan geometri adalah barisan antara satu suku dengan suku lainnya memiliki rasio yang sama
c. Terdapat 4 pola istimewa yaitu pola persegi panjang, pola persegi, pola segitiga, dan pola Fibonacci.

2. Tes Formatif

a. Diketahui suatu deret 1, 3, 5, 7, ... Jika diketahui S_n = 225, maka tentukan nilai $U_{n?}$
b. Jumlah $S_n = 4n^2(n+1)$, maka besar suku ke 4 adalah...
c. Jika diketahui $S_n = 2n^2 - 6n$, maka beda deret tersebut adalah...
d. Diketahui barisan aritmatika 5, 8, 11, . . ., 125, 128, 131. Tentukan suku tengah dari barisan tersebut?
e. Jika diketahui $U_t = 32$ dan $S_n = 672$ maka banyaknya suku dalam deret tersebut adalah...
f. Diketahui $U_6 + U_9 + U_{12} + U_{15} = 20$ maka S_{20} sama dengan...

g. Antara 2 suku berurutan 3, 18, 33, . . . Disisipkan 4 bilangan sehingga membentuk barisan baru. Maka S_{10} dari barisan tersebut adalah...

h. Banyaknya bilangan antara 100 sampai dengan 300 yang habis dibagi dengan 5 adalah...

i. Bu guru bertanya kepada Mia untuk mengkaitakn hubungan dari suatu barisan geometri diketahui adalah r, q, s maka tentukan hubungan dari ketiganya . Kemudia Mia menjawab bahwa hub ketiganya adalah pasti bahwa s > q > r. Jastifikasi apakah pernyataan Mia benar atau salah dan bantulah Mia mencari hubungan dari ketiganya!

j. Diketahui suatu barisan geometri adalah $\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \ldots$ maka tentukan suku ke 12?

k. Diketahui barisan geometri $U_3 = 16$ dan $U_5 = 64$, maka U_9 adalah...

l. Diketahui barisan geometri $U_1 = 3$ dan $U_6 = 96$, maka 3072 merupakan suku ke...

m. Bu guru bertanya kepada Alan tentang soal, yaitu jika diketahui $S_n = 2^{n+2} - 4$, maka tentukan r dari barisan tersebut. Alan diminta tanpa menghitung menduga apakah nilai r nya > 1 atau ≠1. Kemudian Alan menjawan > 1. Jastifikasi pernyataan Alan apakah benar atau salah dan tentukan besar nilai r nya!

n. Diketahui barisan geometri a = 4 dan $U_5 = 324$, maka S_8...

o. Jika diketahui S = 10 dan a = 2 maka tentukan r dari barisan tersebut

3. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Cocokkan jawaban anda dengan kunci jawaban tes formatif pada bahan belajar ini yang terdapat pada bagian akhir buku ajar ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan anda terhadap materi pada bahan belajar ini.

Dengan arti tingkat penguasaan:

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{Jumlah\ jawaban\ yang\ benar}{Jumlah\ Soal} \times 100\%$$

90 - 100% = Baik Sekali

80 - 89% = Baik

70 - 79% = Cukup

< 70% = Kurang

Apabila anda telah mencapai tingkat penguasaan sebesar kegiatan belajar selanjutnya. Akan tetapi bila hasil anda di bawah 80% maka anda harus mengulangi kembali materi pada bahan belajar ini, khususnya bagian yang belum ada pahami dan kuasai.

SELF EVALUATION

Selanjutnya mohon menjawab dengan jujur dan bertanggung jawab dengan memberikan tanda "✓" pada jawaban "Ya" atau "Tidak"

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1	Mahasiswa dapat menyelesaikan soal-soal dengan benar yang terkait dengan Barisan, Deret, dan Pola Bilangan.		
2	Mahasiswa dapat memilih cara penyelesaian yang tepat terkait permasalahan yang terkait dengan Barisan, Deret, dan Pola Bilangan.		
3	Mahasiswa mampu menjastifikasi dengan tepat permasalahan yang berkaitan dengan Barisan, Deret, dan Pola Bilangan.		

Setelah anda melakukan "self evaluation" dengan jujur dan bertanggung jawab, mohon melakukan pengulangan pembelajaran secara mandiri pada bagian yang anda jawab "tidak", anda dapat berdiskusi dengan rekan anda dan meminta bantuan dosen untuk lebih memahami. Akan tetapi, anda dapat melanjutkan ke pembelajaran selanjutnya untuk bagian jawaban "ya"

GLOSARIUM

Barisan aritmatika	:	barisan antara satu bilangan dengan bilangan lainnya memiliki beda yang sama
Barisan geometri	:	barisan Antara satu suku dengan suku lainnya memiliki rasio yang sama
Beda	:	selisih Antara dua suku yang saling berurutan
Ratio	:	perbanidngan Antara dua suku yang saling berurutan

BAHAN BELAJAR 9

EKSPONEN, PENARIKAN AKAR, DAN LOGARITMA

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat Materi

Al-Qur'an yang merupakan mu'jizat yang diberikan Allah SWT kepada Nabi Muhammad SAW memiliki banyak keterkaitannya dengan hitungan atau matematika. Dimana Al-Qur'an berbicara aljabar, yakni relasi dan operasi bilangan. Relasi bilangan dalam matematika meliputi operasi lebih dari (*fauqa* atau *aktsara*), kurang dari (*adna*) dan lebih dari sama dengan. Operasi bilangan dalam Al-Qur'an meliputi operasi penjumlahan, pengurangan dan pembagian. Operasi perkalian disebutkan secara tersirat sebagai penjumlahan berulang.

Sesuai dengan firman Allah SWT dalam surah Yunus ayat 5 yang artinya: *"Dia-lah yang menjadikan matahari bersinar dan bulan bercahaya, dan Dialah yang menetapkan tempat-tempat orbitnya agar kamu mengetahui bilangan tahun dan perhitungan (waktu). Allah tidak menciptakan yang demikian itu melainkan dengan benar. Ia menjelaskan tanda-tanda (kebesaran-Nya) kepada orang-orang yang mengetahui." (Yunus : 5)*

Dari ayat diatas diketahui bahwa Allah SWT mengatakan dengan mengetahui perhitungan tahun, waktu hari dan sebagainya manusia dapat dengan mudah melakukan perhitungan tanpa kesulitan. Begitu banyak pembahasan matematika didalam Al-Qur'an sehingga dapat membuka pola pikiran kita agar senang mempelajari matematika. Pada bahan belajar ini kalian akan mempelajari terkait pangkat, akar, dan logaritma

2. CPMK

Penulis berharap bagi pembaca yang telah mempelajari bahan belajar ini, secara umum diharapkan mahasisswa mampu memahami memahami konsep dan penerapan Eksponen, Penarikan Akar dan Logaritma yang merupakan CPMK pada bahan belajar ini.

3. Sub CPMK

Berdasarkan CPMK yang telah dirancang, selanjutnya berikut merupakan sub – CPMK yang telah dirancang, yaitu memahami konsep dan penerapan Eksponen, Penarikan Akar dan Logaritma dan penerapannya dalam kehidupan sehari-hari

4. Tujuan Pembelajaran

Setelah membaca dan mengikuti serangkaian kegiatan pada bagian ini, diharapkan:

a. Mahasiswa dapat menyelesaikan soal-soal denganbenar yang terkait dengan Eksponen, Penarikan Akar dan Logaritma dan aplikasinya dalam kehidupan sehari-hari

b. Mahasiswa dapat memilih cara penyelesaian yang tepat terkait permasalahan yang terkait dengan Eksponen, Penarikan Akar dan Logaritma dan aplikasinya dalam kehidupan sehari-hari

c. Mahasiswa mampu menjastifikasi permasalahan dengan tepat yang berkaitan dengan Eksponen, Penarikan Akar dan Logaritma dan aplikasinya dalam kehidupan sehari-hari

5. Petunjuk pengunaan modul

Bacalah petunjuk penggunaan modul berikut!

a. Bacalah dan pahami materi yang ada pada bahan belajar ini.

b. Kerjakan setiap tugas diskusi terhadap materi-materi yang dibahas dalam bahan belajar ini.

c. Jika belum menguasai level materi yang diharapkan, ulangi lagi pada bahan belajar sebelumnya atau bertanyalah kepada dosen.

B. KEGIATAN BELAJAR

Permasalahan dalam kehidupan sehari – hari dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep dan aturan matematika. Sebagai contoh, konsep eksponen dan logaritma berperan penting dalam menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan aritmatika sosial, peluruhan zat kimia, perkembangan bakteri dan lain – lain. Untuk itu perhatikan dan selesaikan dengan cermat permasalahan – permasalahan yang diberikan pada bahan belajar ini. Di dalam proses pemecahan masalah-masalah yang diberikan diminta untuk mencermati objek-objek yang dilibatkan dalam permasalahan yang diberikan tersebut.

1. Eksponen (Bentuk Pangkat)

Fungsi eksponen adalah suatu fungsi yang dapat dinyatakan dalam bentuk perpangkatan.

a. Pangkat Bulat Positif

Definisi pangkat bulat positif

Jika a adalah bilangan riil dan n adalah bilangan bulat positif, maka berlaku;

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots\ldots \times a}_{\text{sebanyak n kali}}$$

Keterangan:

a^n dibaca a pangkat n, dimana a disebut bilangan pokok (basis) dan n disebut pangkat.

a) Sifat-sifat pangkat bulat positif

Untuk a, b merupakan bilangan riil dan m, n merupakan bilangan bulat, maka berlaku sifat-sifat berikut:

a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

c) $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

d) $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$; dengan syarat b ≠ 0

e) $(a^n)^m = a^{n \times m}$

f) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ atau $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$; dengan syarat a ≠ 0

g) $a^0 = 1$

b) Sifat-sifat pangkat pecahan

Untuk a, b merupakan bilangan riil dan m, n merupakan bilangan bulat, maka berlaku sifat-sifat berikut:

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n};$$

dengan syarat m adalah bilangan bulat positif tak nol.

b. Persamaan Eksponen

Persamaan eksponen adalah persamaan bentuk pangkat dimana pangkatnya memuat suatu variabel, umumnya yang digunakan adalah variabel x.

Beberapa bentuk persamaan eksponen sebagai berikut:

1. Jika diperoleh bentuk persamaan $a^{f(x)} = 1$ dengan syarat $a > 0$ dan $a \neq 1$
2. Untuk $a^{f(x)} = a^p$ dengan syarat $a > 0$ dan $a \neq 1$
3. Untuk $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ dengan syarat $a > 0$ dan $a \neq 1$
4. Untuk $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ dengan syarat $a, b > 0$ dan $a \neq 1, b \neq 1, a \neq b$,
5. Untuk $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ dengan syarat $a,b > 0$ dan $a \neq 1, b \neq 1, a \neq b$,
6. Persamaan eksponen yang berbentuk
   $A(a^{px})^2 + B(a^{px}) + C = 0$

c. Pertidaksamaan Eksponen

Pertidaksamaan eksponen adalah suatu bentuk hubungan yang melibatkan (>,<, ≤, ≥). diberikan sifat-sifat eksponen berikut:

- Untuk $0 < a < 1$ atau dengan kata lain a merupakan bilangan pecahan antara nol dan satu maka mengalami perubahan tanda.
  Jika $a^{f(x)} < a(g(x)$ maka penyelesaiannya $f(x) > g(x)$ dan
  Jika $a^{f(x)} > a^{(g(x)}$ maka penyelesaiannya $(x) < g(x)$
- Untuk $a > 1$ maka tidak mengalami perubahan tanda atau tanda tetap.

2. Bentuk Akar

Bentuk Akar Dalam bilangan bentuk akar (radikal), ada tiga bagian yang perlu diketahui, yaitu lambang akar, radikan, dan indeks. Secara umum bentuk akar ditulis dalam bentuk √ (dibaca "akar pangkat n dari a") dengan a adalah radikan dan n adalah indeks dimana a adalah bilangan real positif dan n bilangan asli, n ≥ 2. Jika n = 2, maka dalam penulisan bentuk akar tidak dicantumkan. Contoh: √ (dibaca "akar 5" atau "akar pangkat 2 dari 5") 4.

Bentuk akar terbagi atas dua jenis, yaitu:

- Akar Senama

  Suatu bentuk akar dikatakan akar senama jika indeksnya sama.

  Contoh 9.1:

  $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ... mempunyai indeks 2

  $\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{10},$ ... mempunyai indeks 3

- Akar sejenis

  Suatu bentuk akar dikatakan akar sejenis jika indeks dan radikannya sama

  Contoh 9.2:

  $\sqrt[3]{2}, 5\sqrt[3]{2},$ mempunyai indeks 3, dan radikannya 2.

a. Definisi Bentuk Akar

Bentuk akar adalah akar dari suatu bilangan yang nilainya memuat tidak terhingga banyaknya angka di belakang koma dan tidak berulang.

Contoh 9.3:

$\sqrt{2} = 1{,}414 \ldots$

$\sqrt{3} = 1{,}7320 \ldots$

b. Menyederhanakan Bentuk Akar

Bentuk akar dapat disederhanakan dengan cara mengubah bilangan di dalam akar tersebut menjadi dua bilangan dengan bilangan yang satu dapat diakarkan, sedangkan bilangan yang lain tidak dapat diakarkan.

Contoh 9.4:

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \,.\, 2} = \sqrt{16} \,.\, \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{27 \,.\, 3} = \sqrt[3]{27} \,.\, \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3}$$

c. Mengoperasikan Bentuk Akar

1) Penjumlahan dan pengurangan

$$\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a + b)\sqrt{c}$$

$$\sqrt{c} - b\sqrt{c} = (a - b)\sqrt{c}$$

2) Perkalian dan Pembagian

$$\sqrt{a^2} = a$$

$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \text{ x } \sqrt{b}$

a$\sqrt{b}$ x c$\sqrt{d}$ = (a x c)$\sqrt{(b \text{ x } d)}$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$\frac{a\sqrt{b}}{c\sqrt{d}} = \frac{a}{c}\sqrt{\frac{b}{d}}$

3) Akar dalam akar

$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{(a+b) + 2\sqrt{a \times b}}$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{(a+b) - 2\sqrt{a \times b}}$, dengan a > b

$\sqrt{a.\sqrt{a.\sqrt{a\ldots}}}$ = a

$\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots}}} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4a}\,)$

4) Bentuk umum yang biasanya dirasionalkan (menggunakan akar sekawannya)

a + $\sqrt{b}$, a + $\sqrt{b}$ = a + $\sqrt{b}$ x $\frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} = \frac{a^2-b}{a-\sqrt{b}}$

a - $\sqrt{b}$, a - $\sqrt{b}$ = a - $\sqrt{b}$ x $\frac{a+\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}} = \frac{a^2-b}{a+\sqrt{b}}$

$\sqrt{a}$ - $\sqrt{b}$, $\sqrt{a}$ - $\sqrt{b}$ = $\sqrt{a}$ - $\sqrt{b}$ x $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

$\sqrt{a}$ + $\sqrt{b}$, $\sqrt{a}$ + $\sqrt{b}$ = $\sqrt{a}$ + $\sqrt{b}$ x $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

3. Logaritma

Logaritma merupakan kebalikan (invers) eksponen. Jika eksponen adalah bentuk perpangkatan, maka logaritma dapat dikatakan kebalikan dari eksponen.

1) Pengenalan Logaritma

a) Definisi Logaritma

Jika dalam bentuk perpangkatan diperoleh bentuk persamaan **b = a^c**, maka invers dari bentuk pangkat tersebut adalah **^{a}log b = c**. sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$^a\log b = c \Leftrightarrow b \Leftrightarrow a^c$$

Keterangan:
a : basis logaritma dengan 0 < a < 1 atau a > 1
b : numerus dimana b > 0
c : hasil logaritma

b) Sifat-sifat logaritma

Diberikan sifat-sifat logaritma berikut, berikut penjelasan bukti singkat dan hubungan antar sifat-sifat berikut:

a) $^a\log a = 1$ dan $^a\log b^n = n.\ ^a\log^b$ sehingga $^a\log a^n = n.\ ^a\log a$
jadi $^a\log a^n = n$
b) $^a\log a = 1$
c) $^a\log b + {}^a\log c = {}^a\log bc$
d) $^a\log b - {}^a\log c = {}^a\log \frac{b}{c}$
e) $^a\log b = \frac{^b\log b}{^c\log a}$; 0 < c < 1 ∪ c > 1
f) $^a\log b = \frac{1}{^b\log b}$
g) $^a\log b \times {}^b\log c = {}^a\log c$
h) $a^{a \log b} = b$
i) $^{a^m}\log b^n = \frac{n}{m} .\ ^a\log b$

c) Sifat-sifat Persamaan Logaritma

a. Jika $^a\log f(x) = {}^a\log b$ dengan syarat a > 0 dan a ≠ 1, dengan f(x) > 0

Contoh 9.5:
Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan
$^2\log (6x – 1) = 3$ untuk $x > \frac{1}{6}$

Jawab :

$$^2\log (6x – 1)\ 3 \Leftrightarrow 6x – 1 = 2^3$$
$$6x – 1 = 8$$
$$x = \frac{8+1}{6} = \frac{9}{6}$$
$$x = \frac{3}{2}$$

b. Jika $^a\log f(x) = {}^a\log g(x)$ dengan syarat $a > 0$ dan $a \neq 1$, dengan $f(x) > 0$, $g(x) > 0$

Contoh 9.6:
Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan

$^2\log (6x - 1) = {}^2\log (4x + 5)$, untuk $x > \frac{1}{6}$ dan $x > -\frac{5}{6}$

Jawab :

$^2\log (6x - 1) = {}^2\log (4x + 5)$

$6x - 1 = 4x + 5$

$2x = 6$

$x = 3$

c. Jika $^a\log f(x) = {}^b\log f(x)$ dengan syarat $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, dan $a \neq b$.

d. Persamaan logaritma yang berbentuk persamaan kuadrat : $A ({}^a\log x)^2 + B ({}^a\log x)^2 + C = 0$

dengan $a > 0$, $a \neq 1$, A, B, C, bilangan riil dengan $A \neq 0$.

d) Sifat-sifat Pertidaksamaan Logaritma

1) Untuk $0 < a < 1$ atau dengan kata lain a merupakan bilangan pecahan antara nol dan satu maka mengalami perubahan tanda.

- Jika $^a\log f(x) < {}^a\log g(x)$,

  maka penyelesaiannya $f(x) > g(x)$, dan

- Jika $^a\log f(x) > {}^a\log g(x)$,

  maka penyelesaiannya $f(x) < g(x)$

2) Untuk $a > 1$ maka tidak mengalami perubahan tanda atau tanda tetap.

C. PENUTUP

1. Rangkuman

- Sifat-sifat pangkat (eksponen)

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$(a \times b)^{n} = a^{n} \times b^{n}$

$(\frac{a}{b})^{n} = \frac{a^n}{b^n}$; dengan syarat b ≠ 0

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ atau $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$; dengan syarat a ≠ 0

$a^0 = 1$

$(a^n)^m = a^{n \times m}$

$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$;

- Sifat-sifat Logaritma

a) $^{a}\log a = 1$ dan $^{a}\log b^{n} = n.\ ^{a}\log^{b}$ sehingga $^{a}\log a^{n} = n.\ ^{a}\log a$ jadi $^{a}\log a^{n} = n$

b) $^{a}\log a = 1$

c) $^{a}\log b + {}^{a}\log c = {}^{a}\log bc$

d) $^{a}\log b - {}^{a}\log c = {}^{a}\log \frac{b}{c}$

e) $^{a}\log b = \frac{^{b}\log b}{^{c}\log a}$; 0 < c < 1 c > 1

f) $^{a}\log b = \frac{1}{^{b}\log b}$

g) $^{a}\log b \times {}^{b}\log c = {}^{a}\log c$

h) $a^{^{a}\log b} = b$

i) $^{a^m}\log b^{n} = \frac{n}{m}, {}^{a}\log b$

2. Tes Formatif

Hitunglah!

1. Hasil dari $81^{\frac{3}{4}}$ = ...
2. $100^{4} : 50^{4}$ = ...
3. $(\frac{1}{4})^{-3}$ = ...
4. Sederhanakanlah $\frac{2a^3b^{-5}c^2}{6a^9b^2c^{-1}}$ = ...
5. $\sqrt{125}$ = ...
6. $4\sqrt{5} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{5} + 7\sqrt{3}$ = ...

7. $3.\left(4\sqrt{2}+\sqrt{162}\right)$

8. $\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}$ = ...

9. $\sqrt{12-2\sqrt{20}}$ = ...

10. 3^{2x+3} = ...

11. Jumlah akar – akar persamaan $7^{x+1} + 7^{5-x} - 17 = 0$

12. $^{3}\log 27$ = ...

13. log 5 + log 4 – log 2 + log 10 = ... (2)

14. Tentukan himpunan penyelesaian dari :

    $^{2}\log (2x - 1) = {}^{5}\log (2x - 1)$, untuk $x > \dfrac{1}{2}$

15. Nilai dari $^{5}\log 7 . {}^{7}\log 625$ = ...

3. Umpan Balik dan Rencana Tindak Lanjut

Cocokkan jawaban anda dengan kunci jawaban tes formatif pada bahan belajar ini yang terdapat pada bagian akhir buku ajar ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan anda terhadap materi pada bahan belajar ini.

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\textit{Jumlah jawaban yang benar}}{\textit{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Dengan arti tingkat penguasaan:

90 - 100% = Baik Sekali

80 - 89% = Baik

70 - 79% = Cukup

< 70% = Kurang

Apabila anda telah mencapai tingkat penguasaan sebesar kegiatan belajar selanjutnya. Akan tetapi bila hasil anda di bawah 70% maka anda harus mengulangi kembali materi pada bahan belajar ini, khususnya bagian yang belum ada pahami dan kuasai.

SELF EVALUATION

Selanjutnya mohon menjawab dengan jujur dan bertanggung jawab dengan memberikan tanda “✓” pada jawaban “Ya” atau ”Tidak”

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1	Saya dapat menyelesaikan soal-soal dengan benar yang terkait dengan Eksponen, Penarikan Akar dan Logaritma dan aplikasinya dalam kehidupan sehari-hari		
2	Saya dapat memilih cara penyelesaian yang tepat terkait permasalahan yang terkait dengan Eksponen, Penarikan Akar dan Logaritma dan aplikasinya dalam kehidupan sehari-hari		
3	Saya mampu menjastifikasi permasalahan dengan tepat yang berkaitan dengan Eksponen, Penarikan Akar dan Logaritma dan aplikasinya dalam kehidupan sehari-hari		

Setelah anda melakukan “self evaluation” dengan jujur dan bertanggung jawab, mohon melakukan pengulangan pembelajaran secara mandiri pada bagian yang anda jawab “tidak”, anda dapat berdiskusi dengan rekan anda dan meminta bantuan dosen untuk lebih memahami. Akan tetapi, anda dapat melanjutkan ke pembelajaran selanjutnya untuk bagian jawaban “ya”

GLOSARIUM

Basis	: bilangan pokok.
Eksponen	: Pangkat, bilangan atau variabel yang ditulis di sebelah kanan atas bilangan lain (variabel) yang menunjukkan pangkat.
Himpunan penyelesaian	: himpunan semua penyelesaian suatu persamaan, sistem persamaan, dan pertidaksamaan.
Logaritma	: Eksponen pangkat yang diperlukan untuk memangkatkan bilangan dasar supaya mendapatkan bilangan tertentu (jika bilangan dasarnya 10, maka log 100 = 2, artinya 10 pangkat 2 = 100).
Persamaan	: kalimat terbuka yang menyatakan hubungan “sama dengan”.
Pertidaksamaan	: kalimat terbuka yang menggunakan tanda ketidaksamaan

BAHAN BELAJAR 10

TRIGONOMETRI

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat Materi

Perhatikan ayat berikut ini!

لَقَدْ اَحْصٰىهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّاۗ

Artinya : Dia (Allah) benar-benar telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan perhitungan yang teliti.

Ayat di atas berada pada surat Maryam ayat 94, ayat tersebut secara eksplisit menyatakan bahwa Allah melakukan perhitungan yang teliti termasuk dalam menciptakan alam semesta perputaran planet dan bintang yang yang mendukung ilmu navigasi yang memelurkan ilmu trigonometri dalam aplikasinya. Pada bahan belajar 10, kita akan mempelajari topic trigonometri yang memuat sudu-sudut, sin, cos, tangen, secan, cosecant, dan cotangent.

2. CPMK

Penulis berharap bagi pembaca yang telah mempelajari bahan belajar ini, secara umum diharapkan mahasisswa mampu menguasai trigonometri yang merupakan CPMK pada bahan belajar 10 ini.

3. Sub CPMK

Berdasarkan CPMK yang telah dirancang, selanjutnya berikut merupakan sub – CPMK yang telah dirancang, yaitu mahasisw mampu memahami konsep dan penerapan trigonometri yang terkait dengan kehidupan sehari-hari.

4. **Tujuan Pembelajaran**

Setelah membaca dan mengikuti serangkaian kegiatan pada bagian ini, diharapkan:

a. Mahasiswa mampu menerapkan konsep trigonometri dalam menyelesaikan permasalahan yang terkait dalam kehidupan sehari-hari

b. Mahasiswa mampu menunjukkan hubungan suatu konsep antar trigonometri

c. Mahasiswa mampu menjastifikasi permasalahan yang berkaitan dengan trigonometri

5. **Petunjuk Penggunaan Modul**

Bacalah petunjuk penggunaan modul berikut!

a. Bacalah dan pahami materi yang ada pada bahan belajar ini.

b. Kerjakan setiap tugas diskusi terhadap materi-materi yang dibahas dalam bahan belajar ini.

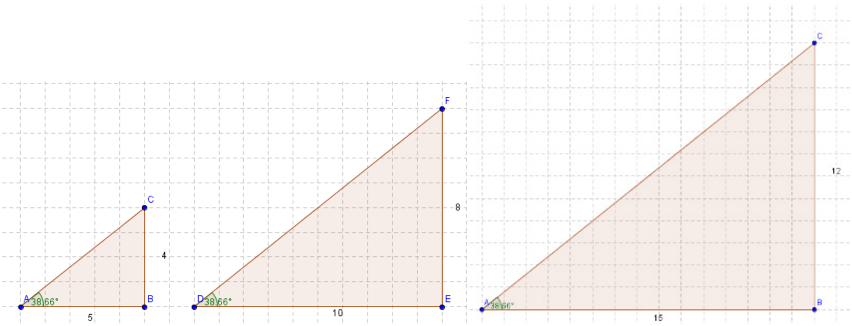
c. Jika belum menguasai level materi yang diharapkan, ulangi lagi pada bahan belajar sebelumnya atau bertanyalah kepada dosen.

B. KEGIATAN BELAJAR

1. **Definisi Trigonometri**

Adalah ilmu mengenai hubungan antara sisi dan sudut dalam suatu segitiga, khususnya pada segitiga siku-siku. Pada awalnya, para ahli matematika menemukan bahwa jika dua buah sisi yang saling tegak lurus pada segitiga siku-siku dengan sudut lancip yang besarnya sama, maka akan membentuk rasio tertentu yang sama besarnya

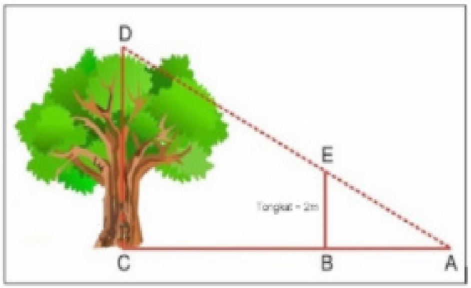
Ilustrasi dapat dilihat pada gambar berikut



Gambar 10.1 Ilustrasi Rasio Dua Buah Sisi Saling Tegak Lurus

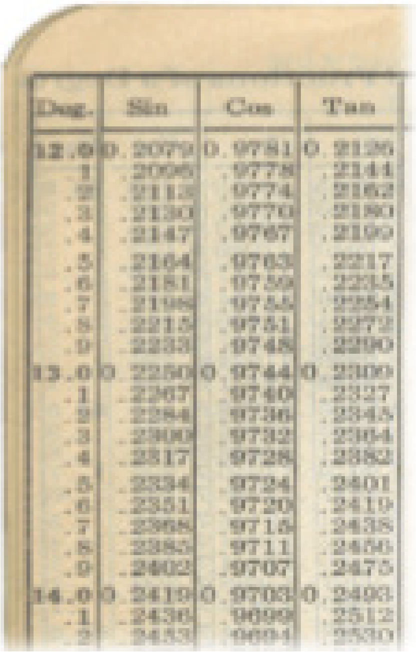
Perhatikan gambar diatas, terdapat 3 buah segitiga siku-siku dengan besar sudut lancipnya sama yaitu sebesar 38,66°, maka ketiga segitiga tersebit memenuhi rasio antara dua sis yang saling tegak lurus adalah $\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{12}{15}$ yaitu memiliki nilai $\frac{3}{5}$

Atas dasar itulah maka para ahli matematika membuat kesepakatan bahwa rasio tersebut memiliki nilai dengan sebutan tangent atau disingkat tan, dengan nilai tan 38,66° sama dengan 0,8 yang memiliki nilai kurang lebih sama dengan $\frac{4}{5}$



Dalam kehidupan sehari-hari kita dapat menggunakan ratio tersebut digunakan untuk mencari tinggi suatu benda dengan sudut tertentu, sebagai contoh gambar disamping

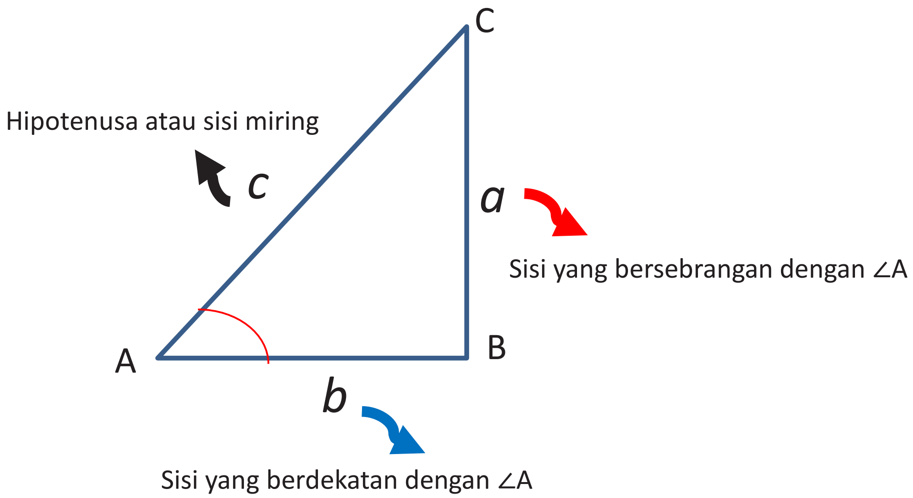
Untuk memudahkan perhitungan maka para ahli matematika membuat tabel rasio yang menghubungan panjang sisi dengan besaran sudut lancip yang terbentuk, seperti pada gambar berikut



Deg.	Sin	Cos	Tan
12.0	0.2079	0.9781	0.2126
.1	.2096	.9778	.2144
.2	.2113	.9774	.2162
.3	.2130	.9770	.2180
.4	.2147	.9767	.2199
.5	.2164	.9763	.2217
.6	.2181	.9759	.2235
.7	.2198	.9755	.2254
.8	.2215	.9751	.2272
.9	.2233	.9748	.2290
13.0	0.2250	0.9744	0.2309
.1	.2267	.9740	.2327
.2	.2284	.9736	.2345
.3	.2300	.9732	.2364
.4	.2317	.9728	.2382
.5	.2334	.9724	.2401
.6	.2351	.9720	.2419
.7	.2368	.9715	.2438
.8	.2385	.9711	.2456
.9	.2402	.9707	.2475
14.0	0.2419	0.9703	0.2493
.1	.2436	.9699	.2512
.2	.2453	.9694	.2530

Gambar 10.2 Tabel Trigonometri Pertama Yang Dibuat

Berikut adalah aturan dalam trigonometri



Berdasarkan gambar di atas maka aturan dalam trigonometri adalah

$Sin\ A = \frac{a}{c}$ $\quad Cos\ A = \frac{b}{c}$ $\quad Tan\ A = \frac{a}{b}$

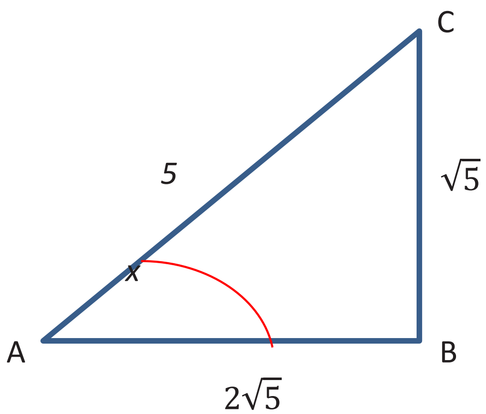
$$Cosec\ A = \frac{1}{Sin\ A} = \frac{c}{a} \qquad Sec\ A = \frac{1}{Cos\ A} = \frac{c}{b}$$

$$Cotangen\ A = \frac{1}{Tan\ A} = \frac{b}{a}$$

Setelah kita mengetahui hubungan antara ketiga sisi tersebut, berikut contoh soal yang dapat kalian pelajari agar lebih memahmi penerapan trigonometri

Contoh 10.1

Tentukan nilai sin, cos, tan, cosecant, sec, cotangent dari gambar berikut ini!



Berdasarkan gambar di atas kita telah mengetahui panjang masing-masing sisi pada segitiga, maka nilai dari

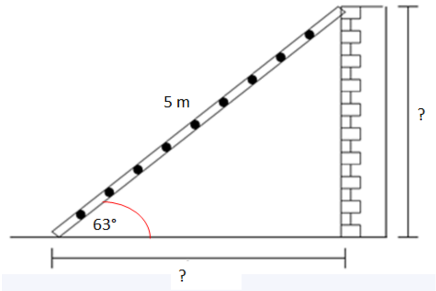
$Sin\ x = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ $\quad$ $Cosec\ x = \frac{c}{a} = \sqrt{5}$

$Cos\ x = \frac{b}{c} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\quad$ $Sec\ x = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$tan\ x = \frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ $\quad$ $Cota\ x = \frac{b}{a} = 2$

Contoh 10.2:

Sebuah tangga yang panjangnya 5 m bersandar pada sebuah tembok. Jika tangga tersebut membentuk sudut 63° dengan lantai, maka



a. Jarak ujung tangga dengan tembok adalah . . . m

Untuk menjawab berapa jarak ujung tangga dengan tembok, maka kita menggunakan aturan cos x, yaitu

$$Cos\ 63 = \frac{b}{c}$$
$$\leftrightarrow 0{,}4539 = \frac{x}{5}$$
$$\leftrightarrow 0{,}4539 \times 5 = x$$
$$\leftrightarrow 2{,}2695 = x$$

Jadi, jarak a ujung tanggak ke tembok adalah sekitar 2,3 m

b. Tinggi tembok adalah . . . m

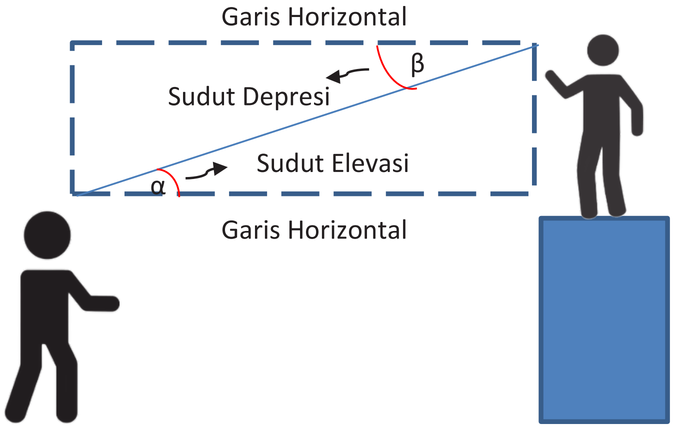
Untuk menjawab berapa tinggi tembok, maka kita menggunakan aturan sin x, yaitu

$$Sin\ 63 = \frac{a}{c}$$
$$\leftrightarrow 0{,}89121 = \frac{x}{5}$$
$$\leftrightarrow 0{,}89121 \times 5 = x$$
$$\leftrightarrow 4{,}45605 = x$$

Jadi, tinggi tembok adalah sekitar 4,5 m

2. Sudut Elevasi dan Sudut Depresi

Seperti yang telah kita ketahui bahwa trigonometri bisa kita aplikasikan dalam permasalahan sehari-hari menggunakan segitiga siku-siku. Melalui segitiga siku-siku kita biasanya diminta untuk menghitung tinggi suatu objek yang membentuk dua macam sudut yaitu sudut elevasi dan sudut depresi. Perhatikan gambar berikut ini:



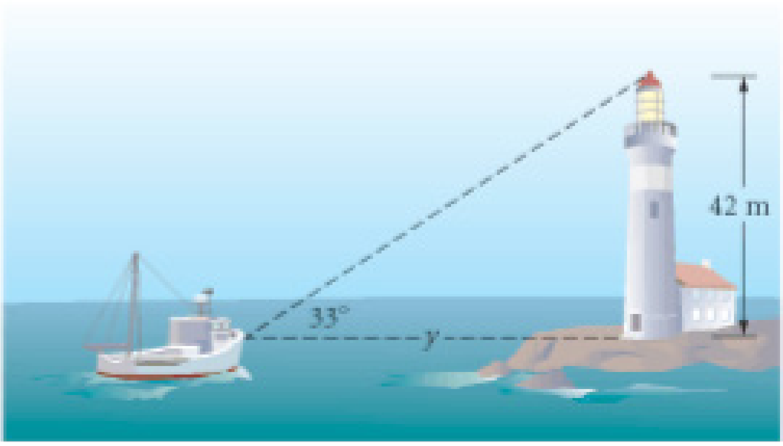
Gambar 10.3 Ilustrasi Sudut Elevasi & Depresi

Sudut elevasi adalah kondisi ketika kita melihat ke atas maka kita menggunakan sudut elevasi

Sudut Depresi adalah kondisi ketika kita melihat ke bawah kita akan menggunakan sudut depresi

Contoh 10.3:

Sudut elevasi dari suatu kapal ke puncak mercusuar yang memiliki tinggi 42 m adalah 33°. Berapa jauh jarak kapal ke mercusuar? (Asumsikan garis pandang horizontal bertemu dengan dasar mercusuar)



Untuk mencari jarak antara kapal dengan mercusuar, kita akan menggunakan tangent, yaitu

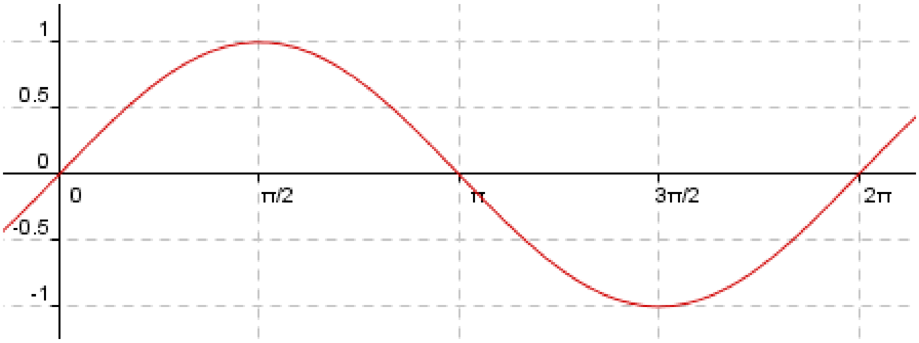
$$tan\ 33 = \frac{a}{b}$$
$$\leftrightarrow 0,649 = \frac{42}{y}$$
$$\leftrightarrow y = \frac{42}{0,649}$$
$$\leftrightarrow y = 64,7149 \approx 64,72$$

Jadi, jarak antara kapal dengan mercusuar adalah 64,72 m

3. Grafik Fungsi Trigonometri

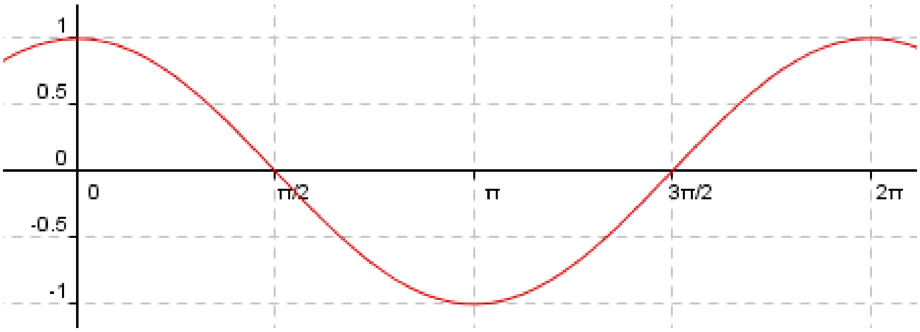
Berikut grafik fungsi-fungsi dalam trigonometri

- Grafik Sinus
  F(x) = sin x



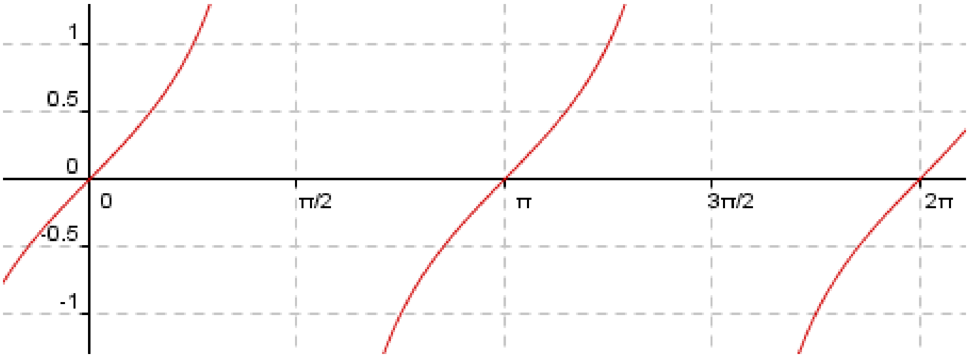
Gambar 10.4 Grafik fungsi Sinus x

- Grafik Cosinus
  F(x) = cos x



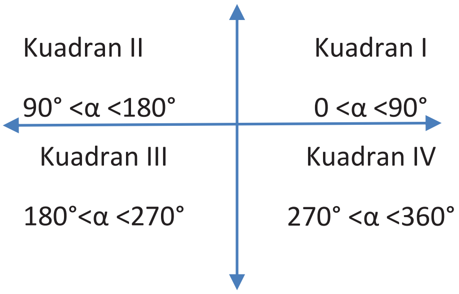
Gambar 10.5 Grafik fungsi Cosinus x

- GrafikTangen
  F(x) = tan x



Gambar 10.6 Grafik fungsi Tangen x

Berdasarkan grafik diketahui bahwa sudut-sudut yang terletak pada kuadran I, II, III, dan IV memenuhi kondisi berikut:



Kuadran I = Semua positif

Kuadarn II = Sinus positif

Kuadran III = Tangen positif

Kuadran IV = Cosinus positif

Berikut sudut-sudut istimewa dalam fungsi trigonometri

Tabel 10.1 Sudut Istimewa

	0°	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
Sin	0				1
Cos	1				0
Tan	0		1		

Setelah kita melihat grafik di atas silakan kalian coba membuat grafik secara mandiri bersama rekan-rekan anda fungsi f(x)=2 sin x, 2 cos x, 2 tan x

4. Perbandingan Trigonometri Sudut Berelasi

- Perbandingan Trigonometri Sudut di Kuadran Pertama

Sin (90-α)°= Cos α°	Cotan (90-α)°=Tan α°
Cos (90-α)°= Sin α°	Sec (90-α)°= Cosec α°
Tan (90-α)°=Cotan α°	Cosec (90-α)°= Sec α°

- Perbandingan Trigonometri Sudut di Kuadrat Kedua

Sin (180-α)°= Sin α°	Cosec (180-α)°= Cosec α°
Cos (180-α)°= -Cos α°	Sec (180-α)°= -Sec α°
Tan (180-α)°=-Tan α°	Cotan (180-α)°= -Cotan α°

- Perbandingan Trigonometri Sudut di Kuadran Ketiga

Sin (180+α)°= -Sin α°	Cosec (180+α)°= -Cosec α°
Cos (180+α)°= -Cos α°	Sec (180+α)°= -Sec α°
Tan (180+α)°=Tan α°	Cotan (180+α)°= Cotan α°

- Perbandingan Trigonometri Sudut di Kuadran Ketiga

Sin (360-α)°= -Sin α°	Cosec (360-α)°= -Cosec α°
Cos (360-α)°= Cos α°	Sec (360-α)°= Sec α°
Tan (360-α)°=-Tan α°	Cotan (360-α)°= -Cotan α°

atau

Sin (-α)°= -Sin α°	Cosec (-α)°= -Cosec α°
Cos (-α)°= Cos α°	Sec (-α)°= Sec α°
Tan (-α)°=-Tan α°	Cotan (-α)°= -Cotan α°

- Perbandingan Trigonometri Sudut yang Lebih dari 360°

Sin (α+n.360)°= Sin α°	Cosec (α+n.360)°=Cosec α°
Cos (α+n.360)°= Cos α°	Sec (α+n.360)°= Sec α°
Tan (α+n.360)°=Tan α°	Cotan (α+n.360)°= Cotan α°

Contoh 10.4:

Tentukan nilai dari Cos 1.200° adalah

Dari soal kita ketahui bahwa besar sudut di atas 360°

Maka Cos 1.200° = Cos (120° + 3.360°)

= Cos 120°

= - Cos 60

= - $\frac{1}{2}$

Contoh 10.5:

Tentukan nilai dari $\frac{tan^2 30° sin^2 60° + tan^2 60° Cos^2 30°}{sin\ 30° cos60°}$

Maka $\frac{(tan30°)^2 (sin60°)^2 + tan\ 60°)^2 (cos30°)^2}{sin\ 30° cos60°}$

$\frac{tan^2 30° sin^2 60° + tan^2 60° Cos^2 30°}{sin\ 30° cos60°}$

$\leftrightarrow \frac{(tan30°)^2 (sin60°)^2 + (tan\ 60°)^2 (cos30°)^2}{sin\ 30° cos60°}$

$\leftrightarrow \frac{(\frac{1}{3}\sqrt{3})^2 (\frac{1}{2}\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 (\frac{1}{2}\sqrt{3})^2}{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}}$

$\leftrightarrow \frac{\frac{1}{3}.\frac{3}{4} + 3.\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}$

$\leftrightarrow 10$

5. **Identitas Trigonometri**

Identitas trigonometri merupakan suatu relasi atau kalimat terbuka yang memuat fungsi-fungsi trigonometri dan yang bernilai benar untuk setiap penggantian variabel dengan konstanta anggota domain fungsinya.

$Sin^2 \alpha + Cos^2 \alpha = 1$

$1 + Tan^2 \alpha = Sec^2 \alpha$

$1 + Cotangen^2 \alpha = Cosecan^2 \alpha$

Contoh 10.6:

Tentukan hasil dari (1 - Sin^2 α).Tan^2 α=...

Untuk mengerjakan soal di atas menggunakan identitas trigonometri

$(1 - Sin^2\alpha).Tan^2\alpha$

$\leftrightarrow Cos^2\alpha.\frac{Sin^2\alpha}{Cos^2\alpha}^2$,menggunakan $Sin^2\alpha + Cos^2\alpha = 1$

$\leftrightarrow Sin^2\alpha$

6. Rumus Trigonometri Lainnya

a. $sin(\alpha + \beta) = sin\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sin\ \beta$

b. $sin(\alpha - \beta) = sin\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sin\ \beta$

c. $cos(\alpha + \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta - sin\ \alpha\ sin\ \beta$

d. $cos(\alpha - \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta + sin\ \alpha\ sin\ \beta$

e. $tan(\alpha + \beta) = \frac{tan\alpha + tan\beta}{1 - tan\alpha\ tan\beta}$

f. $tan(\alpha - \beta) = \frac{tan\alpha + tan\beta}{1 + tan\alpha\ tan\beta}$

g. $sin2\alpha = 2\ sin\ \alpha\ cos\ \beta$

h. $cos2\alpha = cos^2\ \alpha - sin^2\ \alpha$

i. $cos2\alpha = 2\ cos^2\ \alpha - 1$

j. $cos2\alpha = 1 - 2\ sin^2\ \alpha$

k. $tan2\alpha = \frac{2\ tan\alpha}{1 - tan^2\alpha}$

l. $sin^2\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos2\alpha$

m. $cos^2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2\alpha$

n. $sin3\alpha = 3\ sin\ \alpha - 4\ sin^2\ \alpha$

o. $cos3\alpha = 4\ cos^3\ \alpha - 3\ cos\ \alpha$

p. $2\ sin\ \alpha\ cos\ \beta = sin(\alpha + \beta) + sin(\alpha - \beta)$

q. $2\ cos\ \alpha\ sin\ \beta = sin(\alpha + \beta) - sin(\alpha - \beta)$

r. $-2\ sin\ \alpha\ cos\ \beta = cos(\alpha + \beta) - cos(\alpha - \beta)$

s. $sin\alpha + sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

t. $sin\alpha - sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

u. $cos\alpha + cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\, cos\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

v. $cos\alpha - cos\beta = -2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\, sin\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

7. Forum Diskusi

Penyebab Atlet Kena Serangan Henti Jantung Saat Berolahraga

Penulis Mochamad Sadheli | Editor Mochamad Sadheli KOMPAS.com - Dua hari setelah insiden Christian Eriksen pada laga Denmark vs Finlandia di ajang Piala Euro atau Euro 2020, pencinta olahraga Indonesia kembali harus berhadapan dengan tragedi yang sama, bahkan lebih parah. Christian Eriksen diduga mengalami henti jantung ketika laga Denmark vs Finlandia, 12 Juni 2021 malam WIB. Kini, masyarakat Indonesia kehilangan sosok legenda bulu tangkis, Markis Kido, akibat henti jantung. Berdasarkan keterangan legenda ganda putra Indonesa, Candra Wijaya, yang berada di lapangan, penyebab Markis Kido meninggal seperti yang dialami Eriksen, henti jantung. “Saya saat itu sedang menonton dari belakang. Saya kemudian kaget dan panik ketika melihat Markis Kido terjatuh dan tengkurap. Tidak normal. Dia tidak sadarkan diri dan mengorok,” ucap Candra Wijaya. Dua deretan kejadian tersebut tentu membuat banyak orang bertanya, apa benar seorang atlet atau pegiat olahraga pada umumnya rentan terkena henti jantung? Lalu, apa benar olahraga bisa memicu henti jantung? Mengutip Kompas Lifestyle, perlu diketahui terlebih dahulu antara serangan jantung dengan henti jantung. Serangan henti jantung berbeda dengan serang jantung biasa, meskipun keduanya bisa menyebakan jantung gagal berfungsi sebagai mana mestinya dan menyebabkan kematian. Serangan henti jantung atau istilah medisnya disebut dengan sudden cardiac arrest (SCA) adalah berhentinya detak jantung secara medadak yang disebabkan adanya gangguan aliran listrik di jantung, sehingga menghambat aktivitas pemompaan darah dan menghentikan sirkulasi darah dalam tubuh. Umumnya seseorang yang terkena serangan henti jantung saat berolahraga dikarenakan telah memiliki riwayat penyakit jantung ini, hanya saja mereka tidak menyadari hal tersebut. Sedangkan serangan jantung atau heart attack kebanyakan disebabkan oleh penyakit jantung yang berlangsung kronik dalam waktu lama. Serangan ini terjadi karena adanya penyumbatan mendadak di dalam pembuluh darah koroner sehingga aliran darah ke otot jantung menjadi terhambat dan akhirnya merusak otot jantung. Penyebab henti jantung saat olahraga Kejadian yang menimpa Christian Eriksen dan Markis Kido kemungkinan besar SCA, bukan serangan jantung. Ini disebabkan karena hipertropik kardiomiopati. Kardiomiopati adalah suatu penyakit genetik yang menyebabkan terjadinya penebalan tidak normal di otot-otot jantung.Sedangkan, penyebab kematian mendadak pada usia yang lebih tua berbeda–lebih dari 50 tahun, umumnya disebabkan karena mereka memiliki penyakit jantung koroner dan pernah mengalami serangan jantung sebelumnya.Serangan jantung mengakibatkan beberapa otot jantung mati dan sekaligus mengganggu aliran listrik jantung. Maka tidak heran, bila di kemudian hari mereka menjadi rentan mengalami SCA.

Saat melakukan aktivitas olahraga, semua otot bergerak, termasuk otot jantung. Ketika melakukan olahraga dengan intensitas tinggi, seseorang yang memiliki faktor kardiomiopati, otot jantungnya akan semakin menebal saat olahraga. Hal ini membuat jantung bekerja lebih keras untuk memompa oksigen dan aliran listrik menjadi terganggu. Nah, biasanya banyak orang yang tidak menyadari hal tersebut karena sebelumnya tidak merasakan keluhan. Sehingga ketika seseorang melakukan olahraga terutama olahraga kompetitif dengan intensitas tinggi seperti sepak bola, futsal, tenis, ataupun lari maraton, jantung akan memompa dengan keras.

Terkadang, pada mereka yang kurang beruntung (sekitar 1% dari populasi), jantung berhenti mendadak dan mengakibatkan kematian. Olahraga bukan pemicu utama henti jantung Kendati dua kejadian soal Christian Eriksen dan Markis Kido berlatar belakang sosok atlet, bukan berarti olahraga menjadi pemicu utama serangan henti jantung. Menurut Journal Of The American College Of Cardiology, sebanyak 52 serangan jantung terjadi di tempat olahraga biasa, 84 peristiwa di tempat olahraga alternatif, dan sebanyak 713 kasus serangan jantung lainnya terjadi di tempat-tempat yang tidak berhubungan dengan olahraga. Dalam Journal of American Medical Association, disebutkan bahwa risiko terkena penyakit jantung yang ditimbulkan akibat aktivitas fisik sangat rendah. Yang lebih penting lagi, penelitian tersebut menemukan bahwa risiko kelangsungan hidup seseorang saat melakukan aktivitas fisik yang dilakukan secara rutin menurunkan risiko mengalami serangan jantung sekitar 45 persen dibandingkan dengan orang sehat yang jarang berolahraga.

Pasalnya, rutin beraktivitas terbukti dapat menurunkan risiko kematian mendadak saat berolahraga, entah karena serangan jantung biasa maupun henti jantung. Dapatkan informasi, inspirasi dan insight di email kamu. Daftarkan email Hal ini dikarenakan tubuh sudah terbiasa untuk beradaptasi dengan peningkatan aktivitas tubuh. Pengendalian faktor risiko tersebut diperlukan untuk menurunkan faktor risiko terjadinya henti jantung saat berolahraga. Jadi, bukan olahraganya yang menyebabkan seseorang terkena serangan jantung. Pasalnya, rutin beraktivitas terbukti dapat menurunkan risiko kematian mendadak saat berolahraga, entah karena serangan jantung biasa maupun henti jantung.

Hal ini dikarenakan tubuh sudah terbiasa untuk beradaptasi dengan peningkatan aktivitas tubuh. Pengendalian faktor risiko tersebut diperlukan untuk menurunkan faktor risiko terjadinya henti jantung saat berolahraga.

Tugas Analisis Kasus

1. Deskripsikan kaitan kasus di atas dengan bentuk irama jantung yang terdeteksi di alat EKG?
2. Berdasarkan jawaban anda di no.1 kaitan kan hasil EKG tersebut dengan grafik trigonometri, analisislah grafik apa yang lebih memnuhi?
3. Deskripsikan hal-hal apa saja yang harus dipertimbangkan atas jawaban anda pada no.2?

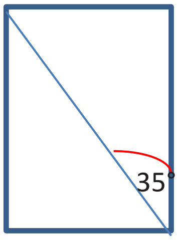
C. PENUTUP

1. Rangkuman

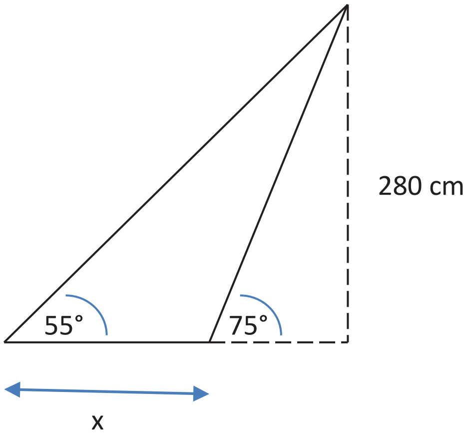
a. Trigonometri merupakan rasio dari sis-sisi tegak lurus dalam segitiga siku-siku
b. Terdapat sudut elevasi dan depresi dalam trigonometri
c. Terdapat 6 aturan dalam trigonometri, yaitu sinus, cosinus, tangen, cosecant, secan, cotangent.
d. Terdapat identitas trigonometri dan rumus-rumus trigonometri terkait jumlah dan selisih sudut.

2. Tes Formatif

1. Ubahlah 150° menjadi bentuk kuadran (π)
2. Diketahui nilai Cos Ø $\frac{4}{5}$ dengan Ø berada pada kuadran IV, maka tentukan nilai 2 *Sin* Ø
3. Tentukan nilai Cos 1140° adalah...
4. Tentukan keliling dari gambar persegi panjang di bawah ini, jika diketahui panjang diagonalnya adalah 85cm



5. Tentukan nilai x!



6. Berdasarkan legenda China dari dinasti Han (260 B.C.E.-22- C.E.), Jendral Han Xin menerbangkan layng-layang dari istana ke tempat musuhnya untuk menetukan jarak antara musuh dengan istana. Jika jendral membutuhkan benang sepanjang 800 m dengan sudut elevasi layang-layang adalah 35°? (Bulatkan hasilnya)

7. Seorang ahli meteorologi menyorotkan lampu sorot secara vertikal ke dasar formasi awan. Dia kemudian menempatkan alat pengukur sudut 165 meter dari lampu sorot dan mengukur 84° sudut elevasi dari tanah ke titik cahaya di awan. Berapa tinggi awan?(Bulatkan hasilnya)

8. Di papan tulis bu guru menuliskan 4 kondisi di papan tulis kepada 4 kelompok siswa, yaitu

   a. Sin x = Sin y

   b. Sin x = Cos y

   c. Cos x = Cos y

   d. Tan x = tan y

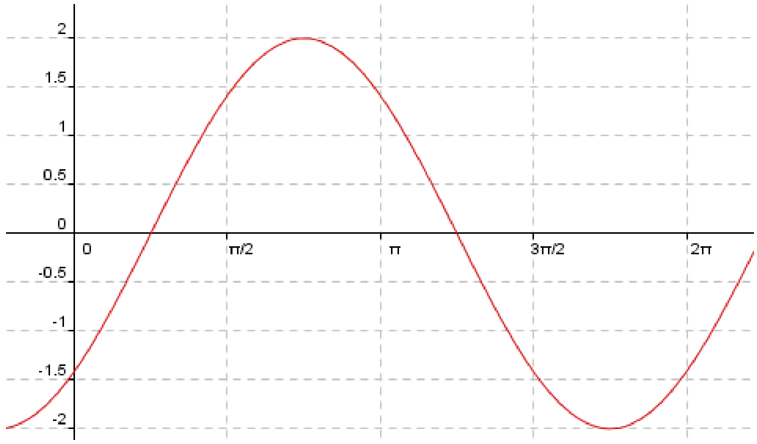
   dengan $90° < x < 180°$ dan $270° < y < 360°$. Kelompok A berkata hanya 1 kondisi yang benar, kelompok B menyatakan 3 kondisi benar, Kelompok

C menyatakan semua kondisi benar, sedangkan kelompok D menyatakan hanya 2 kondisi yang benar. Jastifikasi mana dari keempat kelompok yang memberikan pernyataan dengan benar serta buktikanlah!

9. Ubahlah persamaan trigonometri *sin 2α* dalam bentuk tan!

10. Jika diketahui tan β = 1, maka tentukan nilai dari cos 2β! (Berikan 3 macam cara penyelesaian)

11. Buatlah persamaan yang tepat dari grafik fungsi trigonometri berikut ini:



12. Buatlah hubungan x dan y dari masing-masing kondisi sin, cos, tan, atau kondisi lainnya ika diketahui $0 < x < y < \frac{1}{4}\pi$ (open ended problem)

13. Tentukan nilai dari *sin* 54° *sin* 18° =...

14. Jika x = $\frac{3\pi}{4}$, maka analisilah hubungan yang dpat terjadi antara sin x dan cos x!(open ended)

15. Jika diketahui x + y = 270°, maka analisislah hubungan antara sin dan cos! (open enden)

3. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Cocokkan jawaban anda dengan kunci jawaban tes formatif pada bahan belajar ini yang terdapat pada bagian akhir buku ajar ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan anda terhadap materi pada bahan belajar ini.

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{Jumlah\ jawaban\ yang\ benar}{Jumlah\ Soal} \times 100\%$$

Dengan arti tingkat penguasaan :

90 - 100% = Baik Sekali

80 - 89% = Baik

70 - 79% = Cukup

< 70% = Kurang

Apabila anda telah mencapai tingkat penguasaan sebesar kegiatan belajar selanjutnya. Akan tetapi bila hasil anda di bawah 80% maka anda harus mengulangi kembali materi pada bahan belajar ini, khususnya bagian yang belum ada pahami dan kuasai.

SELF EVALUATION

Selanjutnya mohon menjawab dengan jujur dan bertanggung jawab dengan memberikan tanda "✓" pada jawaban "Ya" atau "Tidak"

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1	Mahasiswa mampu menerapkan konsep trigonometri dalam menyelesaikan permasalahan yang terkait dalam kehidupan sehari-hari		
2	Mahasiswa mampu menunjukkan hubungan suatu konsep antar trigonometri		
3	Mahasiswa mampu menjastifikasi permasalahan yang berkaitan dengan trigonometri		

Setelah anda melakukan "self evaluation" dengan jujur dan bertanggung jawab, mohon melakukan pengulangan pembelajaran secara mandiri pada bagian yang anda jawab "tidak", anda dapat berdiskusi dengan rekan anda dan meminta bantuan dosen untuk lebih memahami. Akan tetapi, anda dapat melanjutkan ke pembelajaran selanjutnya untuk bagian jawaban "ya"

GLOSARIUM

Trigonometri	: ilmu mengenai hubungan Antara sisi dan sudut dalam suatu segitiga siku-siku
Sudut elevasi	: kondisi ketika kita melihat ke atas maka kita menggunakan sudut elevasi
Sudut Depresi	: kondisi ketika kita melihat ke bawah kita akan menggunakan sudut depresi
Identitas trigonometri	: suatu relasi atau kalimat terbuka yang memuat fungsi-fungsi trigonometri dan yang bernilai benar untuk setiap penggantian variabel dengan konstanta anggota domain fungsinya.

INDEKS

KUNCI JAWABAN

HAKIKAT MATEMATIKA

1. Pola pikir
2. Aktivitas manusia
3. Banyak ilmu yang memiliki perhitungan matematika
4. Sepanjang aliran sungai
5. Kemampuan peserta didik untuk menafsirkan dan menganalisis tanda atau kode dan penggunaannya dalam kehidupan sehari-hari
6. Titik, garis, dan bidang
7. Al-Quran mendasari ilmu matematika
8. Teorema
9. Postulat
10. QS Adz-Dzariyat [51]: 49
11. Pencerminan
12. Bentuk Candi
13. Bentuk/Susunan candi
14. Design menggunakan computer
15. Dhepa

HIMPUNAN

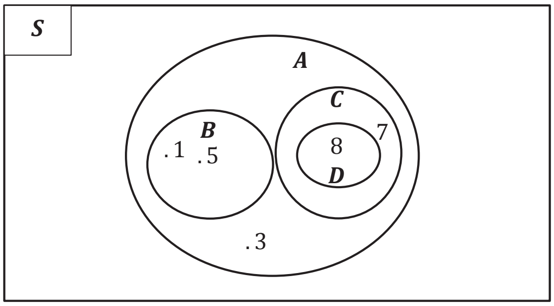
1. A = {7, 11, 13, 17,…}
   B = {x|x ≤ 5, x "bilangan asli"}
2. A = {2, 3}
   B = {x|-6< x <0, x "bilangan bulat"}
3. $C \subset A$; $D \subset B$;
   A dan B saling berpotongan ; A dan D saling berpotongan ;
   B||C ; C||D ; $B \cong C$

4. a) tak berhingga
   b) berhingga
   c) berhingga
   d) berhingga

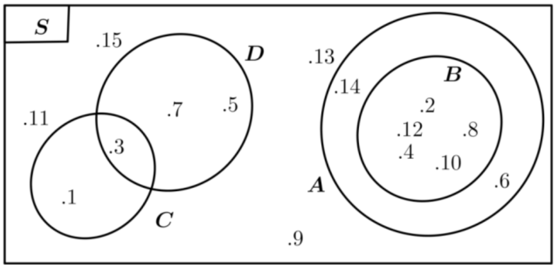
5. a) Himpunan tak terbatas
   b) Himpunan tak terbatas
   c) Himpunan tak terbatas
   d) Himpunan terbatas

6. a) Himpunan tak kosong
   b) Himpunan kosong
   c) Himpunan kosong
   d) Himpunan tak kosong

7. Diagram Venn



8. Diagram Venn



9. A = {2, 3, 4, 5}

   P(A) = {Ø, {2}, {3}, {4}, {5}, {2, 3}, {2, 4}, {2, 5}, {3, 4}, {3, 5}, {4, 5}, {2, 3, 4}, {2, 3, 5}, {2, 4, 5}, {3, 4, 5}, {2, 3, 4, 5}}

   $|P(A)| = 2^{|A|} = 2^4 = 16$

10. a) $(A \cap B)' - (C \Delta A)' = \{2, 7, 13\}$

    b) $(B - C')\ \ (C - B') = \{3, 5, 11, 13, 17\}$

    c) $(A \oplus C') - (B' \cap A')' = \{\ \}$

11. $A \times B = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (\{1\}, 1), (\{1\}, 2), (\{1\}, 3)\}$

12. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

    $15 = 3 + 14 - n(A \cap B)$

    $n(A \cap B) = 2$

13. $n(S) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(A \cup B)'$

    $26 = n(A) + 10 - 7 + 8$

    $n(A) = 15$

14. a) Misalkan S = himpunan mahasiswa semester 7, A = himpunan mahasiswa mengikuti kegiatan olahraga, B = himpunan mahasiswa mengikuti paduan suara.

    $n(S) = 38$

    $n(A) = 25$

    $n(B) = 16$

    $n(A \cup B)' = 4$

    $n(S) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(A \cup B)'$

    $38 = 25 + 16 - n(A \cap B) + 4$

    $n(A \cap B) = 7$

    Jadi jumlah mahasiswa yang mengikuti kegiatan keduanya adalah sebanyak 7 mahasiswa.

    b) Misalkan S = himpunan mahasiswa semester 7, A = himpunan mahasiswa mengikuti kegiatan olahraga, B = himpunan mahasiswa mengikuti paduan suara.

    $n(S) = 38$

    $n(A) = 25$

    $n(B) = 16$

    $n(A \cup B)' = 4$

    $n(A \cap B) = 7$

    $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 25 - 7 = 18$

Jadi jumlah mahasiswa yang mengikuti kegiatan olahraga adalah sebanyak 18 mahasiswa.

c) Misalkan S = himpunan mahasiswa semester 7, A = himpunan mahasiswa mengikuti kegiatan olahraga, B = himpunan mahasiswa mengikuti paduan suara.

$n(S) = 38$

$n(A) = 25$

$n(B) = 16$

$n(A \cup B)' = 4$

$n(A \cap B) = 7$

$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 16 - 7 = 9$

Jadi jumlah mahasiswa yang mengikuti kegiatan paduan suara adalah sebanyak 9 mahasiswa.

15. Misalkan S = himpunan sampel kebiasaan belajar, A = himpunan cara belajar dengan menghapal, B = himpunan cara belajar dengan merangkum, C = himpunan cara belajar dengan mendengarkan musik.

$n(S) = 60$

$n(A) = 25$

$n(B) = 26$

$n(C) = 26$

$n(A \cap C) = 9$

$n(A \cap B) = 11$

$n(B \cap C) = 8$

$n(A \cup B \cup C)' = 8$

Terlebih dahulu mengerjakan $n(A \cap B \cap C)$ diperoleh:

$n(S) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$

$+ n(A \cap B \cap C) + n(A \cup B \cup C)'$

$60 = 25 + 26 + 26 - 11 - 9 - 8 + n(A \cap B \cap C) + 8$

$n(A \cap B \cap C) = 3$

Jadi terdapat 3 orang yang menggunakan 3 cara tersebut untuk belajar. Selanjutnya akan menentukan jumlah orang yang hanya belajar dengan menggunakan cara menghapal

$n(A - (B \cup C)) = n(A) - n(A \cap (B \cup C))$

$n(A - (B \cup C)) = n(A) - (n(A) + n(B \cup C) - n(A \cup B \cup C))$

$n(A - (B \cup C)) = n(A) - (n(A) + (n(B) + n(C) - n(B \cap C))$

$- (n(S) - n(A \cup B \cup C)')$

$n(A - (B \cup C)) = 25 - (25 + (26 + 26 - 8) - (60 - 8) = 8$

Jadi jumlah orang yang hanya belajar dengan menggunakan cara menghapal adalah sebanyak 8 orang.

LOGIKA DAN PENALARAN MATEMATIKA

1. Jawaban:
   a. Kalimat terbuka
   b. Kalimat terbuka
   c. Kalimat terbuka
   d. Proposisi dengan nilai salah
   e. Proposisi dengan nilai benar

2. Jawaban:
   a. Proposisi bernilai benar
   b. Proposisi bernilai salah
   c. Proposisi bernilai benar
   d. Kalimat terbuka
   e. Kalimat terbuka

3. Jawaban:
   a. $-5 + 5 \neq 0$
   b. $-5 + 5 \geq 0$
   c. Hari ini tidak hujan
   d. Saya mengikuti ujian akhir
   e. Beberapa mahasiswa tidak belajar matematika dasar

4. Jawaban:

   a. Saya tidak menjadi mahasiswa

   b. Jika saya tidak lulus ujian maka saya tidak masuk perguruan tinggi

   c. Saya lulus ujian dan saya masuk perguruan tinggi atau saya tidak masuk perguruan tinggi tetapi saya lulus ujian

   d. Saya lulus ujian jika dan hanya jika saya masuk perguruan tinggi

   e. Saya tidak lulus ujian atau saya menjadi mahasiswa

5. Jawaban:

   a. $p \wedge q$

   b. $p \wedge {\sim}q$

   c. ${\sim}p \wedge {\sim}q$

   d. $p \rightarrow q$

   e. $(p \vee q) \wedge (p \rightarrow q)$

6. Jawaban:

   a. $({\sim}p \wedge q) \rightarrow q$

   b. $((p \wedge q) \wedge {\sim}r) \vee (p \wedge q) \wedge r)$

7. $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$

p	**q**	**r**	**p ∨ q**	**(p ∨ q) ∨ r**	**q ∨ r**	**p ∨ (q ∨ r)**
B	B	B	B	B	B	B
B	B	S	B	B	B	B
B	S	B	B	B	B	B
B	S	S	B	B	S	B
S	B	B	B	B	B	B
S	B	S	B	B	B	B
S	S	B	S	B	B	B
S	S	S	S	S	S	S

Perhatikan kolom yang diarsir memiliki nilai kebenaran yang sama sehingga $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$

8. p ∧ (q ∧ r) = (p ∧ q) ∧ r

p	q	r	q ∧ r	p ∧ (q ∧ r)	p ∧ q	(p ∧ q) ∧ r
B	B	B	B	B	B	B
B	B	S	S	S	B	S
B	S	B	S	S	S	S
B	S	S	S	S	S	S
S	B	B	B	S	S	S
S	B	S	S	S	S	S
S	S	B	S	S	S	S
S	S	S	S	S	S	S

Perhatikan kolom C dan F memiliki nilai kebenaran yang sama, sehingga p ∧ (q ∧ r) = (p ∧ q)∧ r

9. p ∧ (q ∨ r) = (p ∧ q) ∨ (p ∧ r)

p	q	r	q ∨ r	p ∧ (q ∨ r)	p ∧ q	p ∧ r	(p ∧ q) ∨ (p ∧ r)
B	B	B	B	B	B	B	B
B	B	S	B	B	B	S	B
B	S	B	B	B	S	B	B
B	S	S	S	S	S	S	S
S	B	B	B	S	S	S	S
S	B	S	B	S	S	S	S
S	S	B	B	S	S	S	S
S	S	S	S	S	S	S	S

Perhatikan kolom C dan F memiliki nilai kebenaran yang sama, sehingga p ∧ (q ∨ r) = (p ∧ q) ∨ (p ∧ r)

10. p ∨ (q ∧ r) = (p ∨ q) ∧ (p ∨ r)

Penyelesaian:

p	q	r	q ∧ r	p ∨ (q ∧ r)	p ∨ q	p ∨ r	(p ∨ q) ∧ (p ∨ r)
B	B	B	B	B	B	B	B
B	B	S	S	B	B	B	B
B	S	B	S	B	B	B	B
B	S	S	S	B	B	B	B

S	B	B	B	B	B	B	B
S	B	S	S	S	B	S	S
S	S	B	S	S	S	B	S
S	S	S	S	S	S	S	S

Perhatikan kolom C dan F memiliki nilai kebenaran yang sama, sehingga $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

11. $(p \wedge q) \rightarrow r = p \rightarrow (q \rightarrow r)$

    Penyelesaian:

    Misalkan:

    $p \wedge q = A$

    $A \rightarrow r = C$

    $q \rightarrow r = D$

    $p \rightarrow D = E$

    Perhatikan tabel kebenaran berikut.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$
B	B	B	B	B	B	B
B	B	S	B	S	S	S
B	S	B	S	B	B	B
B	S	S	S	B	B	B
S	B	B	S	B	B	B
S	B	S	S	B	S	B
S	S	B	S	B	B	B
S	S	S	S	B	B	B

Perhatikan kolom C dan E memiliki nilai kebenaran yang sama, sehingga $(p \wedge q) \rightarrow r = p \rightarrow (q \rightarrow r)$

12. Jawaban

    a. $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$
B	B	B	B	B
B	S	S	B	B
S	B	S	B	B

S	S	S	S	B

Perhatikan kolom terakhir memiliki nilai kebenaran B (benar) semua, sehingga proposisi majemuk ini merupakan tautologi

b. $((p \vee q) \oplus (r \wedge p)) \rightarrow \sim r$

p	**q**	**r**	**~r**	**p ∨ q**	**r ∧ p**	**(p ∨ q) ⊕ (r ∧ p)**	**((p ∨ q) ⊕ (r ∧ p)) → ~r**
B	B	B	S	B	B	S	B
B	B	S	B	B	S	B	B
B	S	B	S	B	B	S	B
B	S	S	B	B	S	B	B
S	B	B	S	B	S	B	S
S	B	S	B	B	S	B	B
S	S	B	S	B	S	B	S
S	S	S	B	S	S	S	B

Perhatikan kolom terakhir memiliki nilai kebenaran B (benar) dan S (salah), sehingga proposisi majemuk ini merupakan kontingen

c. $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \wedge \sim(p \rightarrow q)$

p	**q**	**r**	**~p**	**p → q**	**~(p → q)**	**q → r**	**(p → q) ∧ (q → r)**	**((p → q) ∧ (q → r)) ∧ ~(p → q)**
B	B	B	S	B	S	B	B	S
B	B	S	S	B	S	S	S	S
B	S	B	S	S	B	B	S	S
B	S	S	S	S	B	B	S	S
S	B	B	B	B	S	B	B	S
S	B	S	B	B	S	S	S	S
S	S	B	B	B	S	B	B	S
S	S	S	B	B	S	B	B	S

Perhatikan kolom terakhir memiliki nilai kebenaran (salah) semua, sehingga proposisi majemuk ini merupakan kontradiksi

13. Jika <u>mahasiswa rajin belajar</u>, maka <u>ia menjadi pintar.</u>
p q

Jika menjadi mahasiswa bodoh, maka masa depannya tidak cerah.
~q ~r

Mahasiswa rajin belajar atau menjadi mahasiswa bodoh.
p ~q

Jadi, mahasiswa harus menjadi pintar atau mempunyai masa depan yang tidak cerah.
p ~q

Misalkan dilambangkan:

$p \rightarrow q$

$\sim q \rightarrow \sim r$

$p \vee \sim q$

$(\therefore q \vee \sim r)$

Dengan metode deduksi dinyatakan:

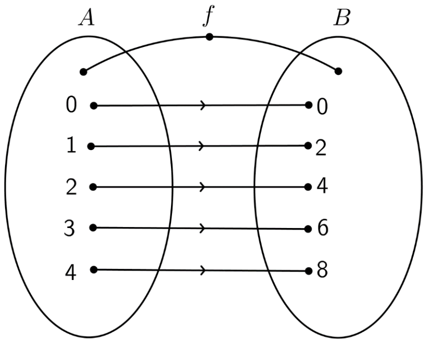
a. $p \rightarrow q$ premis 1 (diketahui)
b. $\sim q \rightarrow \sim r$ premis 2 (diketahui)
c. $p \vee \sim q$ premis 3 (diketahui)
d. $\sim p \rightarrow \sim q$ premis 4 (ekuivalensi dari premis 3)
e. $q \rightarrow p$ premis 5 (ekuivalensi dari premis 4)
f. $r \rightarrow q$ premis 6 (ekuivalensi dari premis 2)
g. $r \rightarrow p$ premis 7 (premis 5 dan 6 menggunakan silogisme)
h. $r \rightarrow q$ premis 8 (premis 1 dan 7 menggunakan silogisme)
i. $\sim q \rightarrow \sim r$ premis 9 (ekuivalensi dari premis 8)
j. $q \vee \sim r$ konklusi (ekuivalensi dari premis 9)

Jadi KLP valid

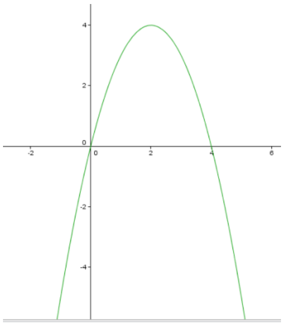
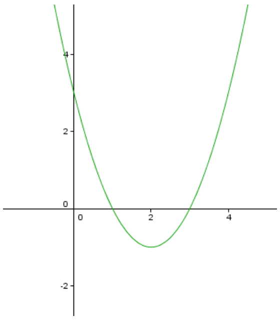
14. Bernilai salah karena tidak benar bahwa setiap nilai x ∈ R memenuhi $\frac{y}{x} = 3$, untuk suatu y ∈ R. Contohnya untuk x = 0 tidak ada y ∈ R yang memenuhi $\frac{y}{x} = 3$. Negasinya adalah $\exists_x \forall_y \left(\frac{y}{x}\right) = 3$

15. $\sim(\exists_x \forall_y (S(x, y)))$

RELASI, FUNGSI, DAN PERSAMAAN LINIER

1. A = {0, 1, 2, 3, 4}, B = {0, 2, 4, 6, 8}
2. 

3. Setiap anggota di himpunan A dua kali di himpunan B, jadi dapat didefinisikan f(x) = 2x, untuk setiap x ∈ {0, 1, 2, 3, 4}.
4. (a) dan (b)
5. D_g = {-3, -2, -1, 0, 1}
6. R_g = {2, 3, 6, 11}
7. Bukan fungsi injektif, surjektif, dan bijektif
8. $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$
9. g(x)=3x-8
10. y=-2x-9
11. $x = \frac{11}{10}$
12. $\{\frac{11}{7}, \frac{13}{7}\}$
13. {8,7}
14. $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ dan $x_2 = 1$.
15. $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ dan $x_3 = 0$.

1. $-\frac{7}{10}$
2. (0,6)
3. 1 atau $12\frac{1}{4}$
4. x^2-36=0
5. 
6. 
7. $y = x^2 - 4x + 9$
8. $y = x^2 + 4x - 2$
9. $x^2 + (a - 7) x - 4 = 0$
10. $2x^2 - 15 x + 10 = 0$
11. $y = 2x^2 - 4x + 4 = 0$
12. $y = -2x^2 - 4x + 6 = 0$
13. Benar nilai p = 0 atau p = 4
14. Benar
15. $y = x^2 - 4$ dan $y = -x^2 - 4$ (open ended)

1. Polya
2. Suatu metode pembelajaran yang melibatkan siswa untuk aktif, kreatif dan mampu berpikir logis, kritis dan mampu berpikir tingkat tinggi dalam menyampaikan gagasan untuk memecahkan suatu masalah yang dihadapinya.
3. (1) Membuat orang ingin menyelesaikan masalah; (2) Belum ada prosedur untuk menyelesaikan masalah; (3) Memerlukan usaha dan ketekunan untuk menemukan jawaban.
4. memahami masalah, membuat perencanaan, melaksanakan penyelesaian, dan mengecek kembali.
5. Tahapan kedua yaitu merancang strategi (planning)
6. Tahapan Polya yang pertama yaitu memahami masalah.
7. Merumuskan tujuan, memerlukan pra-syarat, dan mengajarkan pemecahan masalah.
8. Masalah Penerjemahan Sederhana, Masalah Penerjemahan kompleks, Masalah proses, Masalah Penerapan, dan Masalah Puzzle.
9. Sebagai pembenaran untuk mengajar matematika.
10. Sebagai rekreasi masalah
11. Dari jawaban siswa tersebut, siswa melakukan kesalahan pada letak kesalahan sebagai berikut:
    - ✓ Kesalahan membaca soal. Tidak menuliskan semua makna kata yang diminta.
    - ✓ Kesalahan memahami soal. Tidak menuliskan apa yang diketahui dan Tidak menuliskan apa yang ditanyakan.
    - ✓ Kesalahan tranformasi soal. Tidak menuliskan metode yang akan digunakan.
    - ✓ Kesalahan ketrampilan proses. Kesalahan dalam komputasi.
    - ✓ Kesalahan menuliskan jawaban akhir soal. Tidak menuliskan jawaban akhir. Menuliskan encoding yang tidak sesuai dengan konteks soal
12. Suatu pertandingan sepak bola dihadiri 2.750 penonton putra dan 4% penonton putri. Sebelum pertandingan berakhir, jumlah penonton

yang telah pulang 372. berapa orang jumlah penonton yang pulang setelah pertandingan berakhir ?

13. Laksanakan rencana Anda, Melaksanakan rencana Anda dari solusi, periksa setiap langkah, Dapatkah Anda Melihat dengan jelas bahwa langkah ini benar?, Dapatkah Anda membuktkan bahwa itu benar?
14. Membuat gambar atau diagram, membuat daftar, dan membuat tabel beserta contoh-contohnya dan pemecahan masalahnya.
15. Benar

PERMUTASI, KOMBINASI, DAN PELUANG

1. 2.494.800 cara
2. 60 cara
3. 6 cara
4. 28 cara
5. Salah, seharusnya kombinasi karena tidak memperhatikan urutan. 3.003 cara
6. 300 cara
7. Salah, Ani menghitung dengan cara mengkali dari hasil-hasil kemungkinan yang seharusnya dijumlahkan. 186 cara
8. $\frac{1}{13}$
9. $\frac{65}{252}$
10. $\frac{169}{529}$
11. $\frac{5}{18}$
12. a. $\frac{1}{5}$; b. $\frac{1}{10}$
13. $\frac{99}{2584}$
14. 0,22
15. 25 kali

BARISAN, DERET, DAN POLA BILANGAN

1. 29
2. 176
3. 4
4. 68
5. 21
6. 100
7. 150
8. 39
9. Salah, $Q^2=RS$
10. 128
11. 1024
12. 10
13. Benar, 2
14. 4.372
15. $\frac{4}{5}$

PANGKAT, PENARIKAN AKAR, DAN LOGARITMA

1. 27
2. 16
3. 64
4. $\frac{c^3}{3a^6b^7}$)
5. $5\sqrt{5}$
6. $2\sqrt{5} + 9\sqrt{3}$
7. $39\sqrt{2}$
8. $\sqrt{3} - 1$
9. $\sqrt{10}$ - $\sqrt{2}$

10. $\sqrt[3]{27^{x+5}}$

11. 4

12. 3

13. 2

14. x = 1

15. 4

TRIGONOMETRI

1. $\frac{5}{6}\pi$
2. $-\frac{6}{5}$
3. $\frac{1}{2}$
4. 48,77 cm
5. 121 cm
6. 655 m
7. 1.570 m
8. Kelompok D
9. $\frac{2\, tan\alpha}{1+tan^2\alpha}$
10. 0, (note: x = y dengan x, y ϵ Rasional)si
11. $f(x) = 2\sin(x - \frac{\pi}{4})$
12. sin x < siny : cos x > cos y ; tan x < tan y ; dan cot x > cot y
13. 0,25
14. Sin x = - cos x; sin x + cos x = 0 ; cos x < sin x
15. Cos x + sin y = 0; cos x = -sin y; sin x – cos y = 0 ; sin x = cos y

DAFTAR PUSTAKA

National Council of Teacher of Mathematics. (2000). *Principle and Standar for School Mathemati.*. Reston*, VA:* National Council of Teacher of Mathematics

Risdiyanti, I., Prahmana, R. C. I. (2020). Ethnomathematics (Teori dan Implementasinya: Suatu Pengantar). Yogjakarta: UAD Press

Sutawidjaja, A., Dahlan, J A. 2011. Pembelajaran Matematika. Jakarta: Universitas Terbuka

Turmudi. 2009. *Taktik dan Strategi Pembelajaran Matematika Referensi Untuk Guru SMK, mahasiswa, dan Umum*. Jakarta: PT Leuser Cita Pustaka

Widyasari, N., Hayyun, M. (2017). Pengembangan Pembelajaran Matematika SD Untuk Mahasiswa Tingkat 3. Ciputat: Fakultas Ilmu Pendidikan Universitas Muhammadiyah Jakarta.

Rosiyanti, Hastri. (2017). *Matematika Dasar untuk Mahasiswa Tingkat Pertama*. Jakarta: Fakultas Ilmu Pendidikan Universitas Muhammadiyah Jakarta.

Yahya, Y., Suryadi, Agus. (2004). *Matematika Dasar untuk Perguruan Tinggi*. Jakarta: Ghalia Indonesia.

Windows on Teaching Math: Case of Middle and Secondary Classroom. (2003). Merseth, K. K. (Eds). New York: Teachers College Press

Durbin, John R. 2009. *Modern Algebra An Instroduction*. New York: John Wley& Sons, Incorporated.

Jeffrey, Alan. 2010.*Matrix Operations for Engineers and Scientists*. New York: Springer.

Kolman, Bernard. dan Hill, David R.2005. *Introductory Linear Algebra*. United States Of America: Pearson Prentice Hall.

Rosiyanti, Hastri. 2017. Matematika Dasar untuk Mahasiswa Tingkat Pertama. Ciputat: Fakultas Ilmu Pendidikan Universitas Muhammadiyah Jakarta.

Abels, M.; de Jong, J. A.; Dekker, T.; Meyer, M. R.; Shew, J. A.; Burrill, G.; and Simon, A. N. (2006). Ups and downs. In Wisconsin Center for Education Research & Freudenthal Institute (Eds.), Mathematics in Context. Chicago: Encyclopædia Britannica, Inc

Firiani, A. D. (2019). *Pendalaman Materi Matematika*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Irawan, E. I., Cunayah, C., (2013). *1700 Bank Soal Bimbingan Pemantapan Matematika Untuk SMA/MA*. Bandung: Yrama Widya

Akyuz, H. I., Yetik,S. S., dan Keser, H. 2012. Preservice Teachers Perceptions About Their Probelm Solving Skills in the Scenario Based Blended Learning Environment. Turkish Online Journal of Distance Education. 13 (2): Articel 7

Charles, R. dan Lester, F. 1982. Teaching Problem Solving: What, Why & How. USA: Dale Seymour Publications.

Jonassen, D.H. 2011. *Learning to Solve Problem*. New York: Routledge

Krulik, S. dan J.A. Rudnick. 1995. Teaching Reasoning dan Problem Solving in Elementary School. Boston: Allyn and Bacon.

Schoenfeld, A. H. 1992. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D Grouws (Ed.), Handbook for research on mathematics teaching and learning (pp. 334-337). New York, NY: Macmillan.

Polya, G. 1973. How To Solve It (A New Aspect of Mathematical Method). New Jersey: Priceton University Press.

Wardhani, S., S.S. Purnomo., E. Wahyuningsih. 2010. Pembelajaran Kemampuan Pemecahan Masalah di SD. Jakarta: PPPPTK Matematika

Rosen, Kenneth. H. (2007). Discrete Mathematics and Its Applications (Sixth Edition. New York: McGraw-Hill Education

Kindt, M., Dekker, T., and Burrill, G. (2006). Algebra rules. In Wisconsin Center for Education Research & Freudenthal Institute (Eds.), Mathematics in Context. Chicago: Encyclopædia Britannica, Inc.

Entis Sutisna, 2020. Modul Pembelajaran SMA Matematika Peminatan. Direktorat SMA, Direktorat Jenderal PAUD, DIKDAS dan DIKMEN

Feijs, E., deLange, J., van Reeuwijk, M., Spence, M., S., Brendefur, J., and Pligge, M., A. (2006). Looking at an angle. In Wisconsin Center for Education Research & Freudenthal Institute (Eds.), Mathematics in Context. Chicago: Encyclopædia Britannica, Inc.

Serra. M. (2008). Discovering Geometry An Investigative Approach. CA: Key Curricculum Press

PROFIL PENULIS

Nurbaiti Widyasari merupakan anak ketiga dari empat bersaudara yang lahir dari pasangan Muhammad Saifuddin (Alm) dan Pangastuti. Menyelesaikan pendidikan strata 1 pada tahun 2007 dengan mengantongi gelar sarjana pendidikan matematika Universitas Negeri Jakarta.

Kemudian melanjutkan dan menyelesaikan pendidikan strata 2 di Universitas Pendidikan Indonesia pada tahun 2013 dengan gelar magister pendidikan matematika. Saat ini mengajar sebagai dosen tetap di prodi PGSD Fakultas Ilmu Pendidikan Universitas Muhammadiyah jakarta. Saat ini menjabat sebagai Sekretaris Program Studi sejak tahun 2018. Penelitian dan pengabdian yang selama ini yang digeluti terkait bidang pendidikan matematika baik itu kemampuan matematis, teknologi (Augmented Reality), TPACK, dan Readiness siswa, guru, dan orang tua dalam pembelajaran matematika

Linda Astriani, lahir di Cirebon, Jawa Barat tahun 1992. Menghabiskan masa SD, SMP, dan SMA di Cirebon, dan kemudian melanjutkan studi S-1 pada tahun 2010 di Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Jakarta, pada tahun 2014 berhasil meraih gelar Sarjana Pendidikan untuk Pendidikan Matematika.

Pada tahun 2017 berhasil meraih gelar Magister Pendidikan untuk Pendidikan Matematika di FMIPA – Universitas Negeri Jakarta. Kariernya diawali menjadi Instructor mathematic pada Eye Level Learning Center PT. Daekyo Indonesia. Tahun 2018 mengajar di Sekolah Islam Harapan Ibu jenjang Sekolah Dasar. Sejak tahun 2019 sampai sekarang tercatat sebagai dosen di Fakultas Ilmu Pendidikan Universitas Muhammadiyah Jakarta

Hastri Rosiyanti. Penulis merupakan anak ketiga dari tiga bersaudara yang lahir di Jakarta, 14 Desember 1987. Pada tahun 2010 penulis lulus S1 di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Islam Negeri (UIN) Syarif Hidayatullah Jakarta dengan predikat Cum laude. Lanjut kuliah S2 dengan Beasiswa Unggulan (BU) Dikti, penulis belajar selama 2 tahun di Program Studi Pengajaran

Matematika Institut Teknologi Bandung (ITB) dan lulus pada tahun 2013 dengan predikat cum laude. Sejak lulus penulis mengajar di Prodi Pendidikan Matematika FIP UMJ dan diangkat menjadi dosen tetap pada tahun 2014 hingga sekarang. Selain dosen tetap, saat ini penulis menduduki jabatan menjadi ketua Pusat Penelitian Pengabdian Masyarakat FIP UMJ sejak 2019 hingga sekarang. Penulis telah membuat buku olimpiade SMP tahun 2014, dan sejak 2014 pula penulis menjadi Juri olimpiade matematika MA Olimpiade Matematika (OPTIKA) UIN Jakarta hingga tahun 2019. Dalam pengabdian masyarakat, penulis melakukan pelatihan mengenai software media pembelajaran untuk guru – guru sekolah. Sejak menjadi dosen, penulis telah melakukan beberapa penelitian. Sumber dana penelitian yang penulis dapatkan diantaranya dari LPPM UMJ dan dari Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.

Rahmita Nurul Muthmainnah, M.Pd., M.Sc. Lahir di Surabaya tanggal 15 Juli 1986. Telah menyelesaikan pendidikan S1 Matematika di Universitas Negeri Surabaya tahun 2008. Judul skripsi yang ditulis yaitu "Graf yang Mempunyai Graf Kuosien Non-Trivial". Pada tahun 2013 telah menyelesaikan pendidikan S2 di Universitas Negeri Surabaya (Pendidikan Matematika) dan Curtin University of Technology, Perth, Australia (Science and Mathematics Education). Judul tesis yang ditulis yaitu "Blind Students' Understanding of Triangle and Quadrilateral" Saat ini mengajar di Universitas Muhammadiyah Jakarta, Fakultas Ilmu Pendidikan, Program Studi Pendidikan Matematika.