TEORI BILANGAN

MODUL BILANGAN
Keterbagian, Faktor Bilangan, Bilangan Prima, Kelipatan Bilangan

Penulis:
Hastri Rosiyanti, M.PMat.

Prodi Pendidikan Matematika
Fakultas Ilmu Pendidikan
Universitas Muhammadiyah Jakarta
September 2023

A. Pendahuluan

Proses pembelajaran untuk materi yang sedang saudara ikuti sekarang ini, dapat berjalan dengan lebih lancar bila saudara mengikuti langkah-langkah belajar sebagai berikut.

1) Ingat kembali materi prasyarat tentang bilangan, operasi bilangan,dan jenis bilangan dalam mempelajari materi pada kegiatan belajar ini.
2) Pelajari materi pada setiap kegiatan belajar ini, selesaikan latihan padaforum diskusi, dan selesaikan tes formatifnya secara mandiri.
3) Cocokkan jawaban tes formatif saudara dengan kunci jawaban yang diberikan.
4) Apabila tingkat penguasaan saudara 80% atau lebih, saudara dapat melanjutkan ke kegiatan belajar berikutnya. Apabila tingkat pengusaan saudara kurang dari 80%, saudara harus mempelajari kembali materi pada kegiatan belajar ini.
5) Keberhasilan pembelajaran saudara dalam mempelajari materi pada kegiatan belajar ini, sangat tergantung kepada kesungguhan saudara dalam belajar dan mengerjakan tugas dan latihan. Untuk itu, berlatihlah secara mandiri atau berkelompok dengan teman sejawat.

Selanjutnya kami ucapkan selamat belajar, semoga saudara sukses mampu mengimplementasikan pengetahuan yang diberikan dalam kegiatan belajar ini.

B. Capaian Pembelajaran

Setelah mempelajari materi ini diharapkan mahasiswa mampu memahami, mengidentifikasi, menganalisis, merekonstruksi, memodifikasi secara terstruktur materi matematika sekolah dan advance material secara bermakna dalam penyelesaian permasalahan dari suatu sistem (pemodelan matematika) dan penyelesaian masalah praktis kehidupan sehari-hari melalui kerja problem solving, koneksi dan komunikasi matematika, critical thinking, kreatifitas berpikir matematis yang selaras dengan tuntutan masa depan. Mahasiswa juga diharapkan mampu menguasai materi esensial matematika meliputi keterbagian pada bilangan bulat, faktor bilangan, kelipatan bilangan, kongruensi modulo, pola barisan bilangan. Lebih lengkapnya dijabarkan berikut.

1. Mahasiswa dapat menyelesaikan masalah menggunakan faktorisasi bilangan.
2. Mahasiswa dapat menyelesaikan masalah menggunakan konsep bilangan prima.
3. Mahasiswa dapat menyelesaikan masalah menggunakan konsep kelipatan bilangan.

C. Pokok-pokok Materi

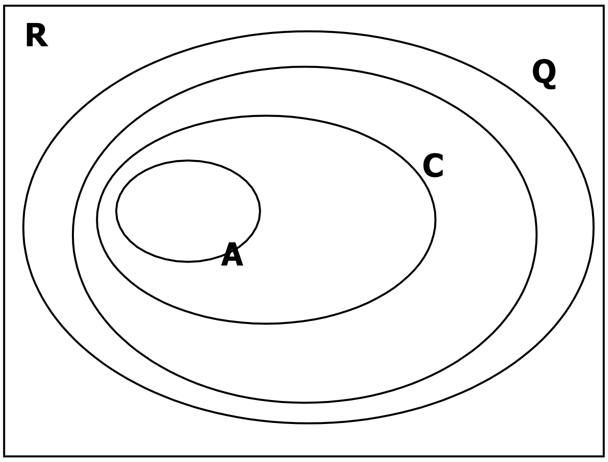
Materi yang dipelajari dalam kegiatan belajar ini antara lain:

1. Keterbagian.
2. Faktor Persekutuan Terbesar.
3. Bilangan Prima.
4. Kelipatan Persekutuan Terkecil

D. Uraian Materi

1. Keterbagian

Posisi himpunan bilangan bulat dalam himpunan bilangan dapat digambarkan dalam diagram Venn berikut ini:



Gambar 1.1

A = himpunan semua bilangan asli = $\{1,2,3,\ldots\}$, C = himpunan semua bilangan cacah = $\{0,1,2,3,\ldots\}$, B = himpunan semua bilangan bulat = $\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$, **Q** = himpunan semua bilangan rasional = $\{\frac{p}{q} | p \; dan \; q \; bilangan \; bulat \; dengan \; q \neq 0\}$, dan **R** = himpunan semua bilangan real. Di antara **Q** dan **R** ada himpunan bilangan irasional. Sehingga dapat dikatakan, himpunan bilangan real adalah gabungan antara himpunan bilangan rasional **(Q)** dengan himpunan semua bilangan irasional.

Dalam himpunan bilangan bulat, dapat dikenai relasi keterbagian. Sifat-sifat keterbagian pada bilangan bulat merupakan dasar pengembangan teori bilangan. Pengertian relasi keterbagian disajikan pada Definisi 1.1.

Definisi 1.1

Bilangan bulat a membagi habis bilangan bulat b (ditulis $a|b$) apabila terdapat bilangan bulat k sehingga $b = ak$. Jika a tidak membagi habis b maka dituliskan $a \nmid b$.

Contoh 1.1

$3|21$ karena terdapat bilangan bulat yakni 7 sehingga $21 = 3.7$

$5 \nmid 12$ karena tidak ada bilangan bulat k sehingga $12 = 5.k$

$-8|0$ karena terdapat bilangan bulat yakni 0 sehingga $0 = -8.0$

Istilah-istilah lain yang mempunyai arti sama dengan $a|b$ adalah "a faktor dari b" atau "a pembagi b" atau "b kelipatan a".

Relasi keterbagian pada bilangan bulat memenuhi sifat-sifat antara lain sebagai berikut:

Teorema 1.1

Jika $a|b$ dan $b|c$ maka $a|c$.

Bukti:

Diketahui $a|b$ dan $b|c$. Karena $a|b$ dan $b|c$ maka terdapat bilangan bulat m dan n sehingga $b = ma$ dan $c = nb$. Dengan mensubstitusikan $b = ma$ ke dalam $c = nb$ diperoleh $c = n(ma) = (nm)a$. Hal ini menunjukkan bahwa terdapat bilangan bulat mn sehingga berlaku $c = (mn)a$. Jadi dapat disimpulkan bahwa $a|c$.

Teorema 1.2

Jika $a|b$ dan $a|(b + c)$ maka $a|c$.

Bukti:

Diketahui $a|b$ dan $a|(b + c)$. Berarti terdapat bilangan bulat m dan n sehingga $b = ma$ dan $b + c = na$. Akibatnya $b + c - b = na - ma$.

$b + c - b = (n - m)a \Leftrightarrow c = (n - m)a$.

Karena terdapat bilangan bulat $(n - m)$ sehingga $c = (n - m)a$ maka $a|c$.

Teorema 1.3

Jika $p|q$, maka $p|qr$ untuk semua $r \in$ Z

Bukti:

Diketahui bahwa $p|q$. Berarti terdapat suatu $k \in Z$ sehingga $q = pk$.

Ambil sebarang $r \in$ Z.

Diperoleh $q = pk \Leftrightarrow qr = pkr$

$$\Leftrightarrow qr = p(k.r).$$

Karena $qr = p(k.r)$ untuk suatu $kr \in Z$, maka $p|qr$.

Teorema 1.4

Jika $p|q$ dan $p|r$, maka $p|q + r$

Bukti:

Karena $p|q$ dan $p|r$, maka terdapat $x, y \in Z$ sehingga $q = px$ dan $r = py$.

Diperoleh $q + r = px + py = p(x + y)$.

Kerena ada bilangan bulat $(x + y)$ sehingga $q + r = p(x + y)$, maka dapat disimpulkan $p|q + r$.

2. **Faktor Persekutuan Terbesar**

Untuk setiap bilangan bulat a positif, a paling sedikit memiliki dua faktor yaitu 1 dan dirinya sendiri kecuali 1. Suatu bilangan bulat dapat memiliki faktor selain 1 dan dirinya sendiri. Sebagai contoh 20 memiliki faktor 1, 2, 4, 5, 10 dan 20, sedangkan 30 memiliki faktor 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 dan 30. Dari contoh ini diperoleh bahwa 1, 2,5 dan 10 merupakan faktor dari 20 dan sekaligus faktor dari 30. Fakta tersebut mengantarkan ke konsep faktor persekutuan, dan faktor persekutuan terbesar.

Definisi 1.2

Suatu bilangan bulat d disebut faktor persekutuan dari a dan b apabila $d|a$ dan $d|b$.

Perlu diketahui bahwa untuk setiap dua bilangan bulat a dan b memiliki paling sedikit satu faktor persekutuan yaitu 1. Jika d adalah faktor persekutuan dari a dan b maka $d|ma + nb$ untuk setiap bilangan bulat m dan n. Jika a dan b dua bilangan bulat tak nol, maka a dan b hanya memiliki sejumlah hingga faktor dan oleh karenanya himpunan faktor persekutuan dari a dan b juga berhingga. Karena elemen-elemen himpunan faktor persekutuan dari a dan b merupakan bilangan-bilangan bulat maka himpunan tersebut memiliki elemen terbesar. Bilangan bulat terbesar ini disebut faktor persekutuan terbesar (FPB) dari a dan b. Konsep FPB disajikan pada Definisi 1.3.

Definisi 1.3

Bilangan bulat positif d disebut FPB dari a dan b jika dan hanya jika:

(i). $d|a$ dan $d|b$

(ii). jika $c|a$ dan $c|b$ maka $c \leq d$.

Faktor persekutuan terbesar dari a dan b dinotasikan dengan $FPB(a, b)$. Beberapa hal yang perlu diketahui tentang FPB antara lain:

(i). $FPB\ (0,0)$ tidak didefinisikan.

(ii). $FPB\ (a, b)$ selalu bilangan bulat positif, sehingga $FPB\ (a, b) \geq 1$.

(iii). $FPB\ (a, b) = FPB\ (a, -b) = FPB\ (-a, b) = FPB\ (-a, -b)$.

Contoh 1.2

a). FPB dari 30 dan 105 adalah 15, sehingga ditulis $FPB\ (30, 105) = 15$.

b). FPB dari 9 dan 20 adalah 1, sehingga ditulis $FPB\ (9,20) = 1$.

Teorema 1.5

Jika $FPB\ (a, b) = d$ maka $FPB\ (a{:}\, d, b{:}\, d) = 1$.

Bukti:

Misalkan $FPB\ (a{:}\,d, b{:}\,d) = c$.

Akan ditunjukkan bahwa $c = 1$, yaitu dengan menunjukkan $c \leq 1$ dan $c \geq 1$.

Karena c adalah FPB dari dua bilangan bulat yaitu $a{:}\,d$ dan $b{:}\,d$ maka $c \geq 1$ ...(*).

Karena $FPB\ (a{:}\ d, b{:}\ d) = c$ maka $c|(a{:}\ d)$ dan $c|(b{:}\ d)$. Akibatnya ada bilangan bulat q dan r sedemikian sehingga berlaku $a{:}\ d = cq$ dan $b{:}\ d = cr$. Menurut definisi pembagian diperoleh $a = d(cq) = (cd)q$ dan $b = d(cr) = (cd)r$. Ini berarti cd merupakan faktor persekutuan dari a dan b. Karena d adalah FPB dari
a dan b maka $cd \leq d$. Karena d positif maka $c \leq 1$ ……. (**).

Dari (*) dan (**) disimpulkan $c = 1$.

Contoh 1.3

Karena $FPB\ (24,30) = 6$ maka $FPB\ (24{:}\,6, 30{:}\,6) = FPB\ (4,5) = 1$.

Definisi 1.4

Bilangan bulat a dan b disebut relatif prima (saling prima) jika $FPB\ (a, b) = 1$.

Dari contoh 1.2 diperoleh bahwa 9 dan 20 saling prima, sedangkan dari contoh 1.3 diperoleh bahwa 4 dan 5 saling prima.

Jika $|a|$ dan $|b|$ adalah bilangan-bilangan bulat yang kecil maka $FPB\ (a, b)$ dapat dihitung dengan mudah (singkat). Tidak demikian halnya $|a|$ dan $|b|$ adalah bilangan-bilangan yang besar. Sebagai contoh jika $a = 26020473$ dan $b = 26020867$ maka $FPB\ (a, b)$ tidak dapat dihitung dengan singkat. Berikut ini akan sajikan cara yang efisien untuk menentukan FPB dari dua bilangan bulat.

Teorema 1.6 (Algoritma Pembagian Bilangan Bulat)

Untuk setiap bilangan bulat positif a dan b terdapat dengan tunggal bilangan bulat q dan r sedemikian sehingga $b = qa + r$ dengan $0 \leq r < a$.

Bukti:

Bentuk barisan bilangan berikut:

$$\ldots, (b-3a), (b-2a), (b-a), b, (b+a), (b+2a), (b+3a), \ldots .$$

Misalkan r adalah bilangan bulat tak negatif terkecil dari barisan tersebut. Akibatnya $r \geq 0$ dan $r = b - qa$ untuk suatu bilangan bulat q. Diperoleh $b = qa + r$ dengan $r \geq 0$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $r < a$.

Andaikan $r \geq a$, maka $r = a + k$ untuk suatu $k \geq 0$. Sehingga $k = r - a$.

Karena $r = b - qa$ maka $k = b - (q+1)a$. Ini berarti bahwa k adalah suatu suku dari barisan tersebut, dengan $0 \leq k = r - a < r$. Kontradiksi dengan r adalah bilangan bulat tak nol terkecil dari barisan tersebut. Pengandaian salah, yang benar $r < a$.

Jadi ada q dan r sedemikian sehingga $b = qa + r$, dengan $0 \leq r < a$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa q dan r tunggal.

Misalkan terdapat q_1 dan r_1 sedemikian sehingga $b = aq_1 + r_1$, dengan $0 \leq r_1 < a$.

Karena $b = qa + r$ dan $b = aq_1 + r_1$, maka diperoleh

$(q - q_1)a + (r - r_1) = 0$ ... (*)

Karena $a|(q - q_1)a$ dan $a|0$, maka $a|(r - r1)$.

Tetapi karena $0 \leq r < a$ dan $0 \leq r_1 < a$, maka $-a < r - r_1 < a$.

Sehingga diperoleh $r - r_1 = 0$ atau $r = r_1$.

Selanjutnya dari persamaan (*) diperoleh $(q - q_1)a = 0$ atau $q = q_1$, sebab $a = 0$.

Jadi diperoleh $r = r_1$ dan $q = q_1$. Dengan kata lain q dan r yang memenuhi $b = qa + r$ dengan $0 \leq r < a$ adalah tunggal.

Contoh 1.4

Jika $a = 24$ dan $b = 81$ maka $q = 3$ dan $r = 9$, sebab $81 = (3).(24) + 9$.

Terlihat bahwa FPB $(81,24) = 3$ dan FPB $(24,9) = 3$.

Jika a dan b sebarang bilangan bulat, maka Teorema 1.6 tetap berlaku tetapi dengan syarat $0 \leq r < |a|$.

Teorema 1.7

Jika $b = qa + r$, maka FPB $(b, a) = FPB$ (a, r).

Bukti:

Misalkan $FPB(b, a) = d$. Maka $d|a$ dan $d|b$.

Karena $d|a$ dan $d|b$ dan $r = b - qa$ maka $d|r$. Ini berarti d adalah faktor persekutuan dari a dan r. selanjutnya akan ditunjukkan bahwa d adalah FPB dari a dan r.

Misalkan c adalah sebarang faktor persekutuan dari a dan r, yang berarti $c|a$ dan $c|r$.

Karena $b = qa + r$ maka $c|b$, sehingga c merupakan faktor persekutuan dari a dan b. Tetapi $FPB(a, b) = d$, sehingga $c \leq d$. Ini berarti d adalah FPB dari a dan r. Jadi $FPB(b, a) = FPB(a, r)$.

Selanjutnya dengan menggunakan Teorema 1.6 dan Teorema 1.7 dapat ditentukan FPB dari sebarang dua bilangan bulat.

Contoh 1.5

Tentukan $FPB(5767,4453)$.

Penyelesaian:

Dengan menggunakan Teorema 1.6 berkali-kali maka diperoleh:

$$5767 = 4453\,.\,1 + 1314$$

$$4453 = 1314\,.\,3 + 511$$

$$1314 = 511.\,2 + 292$$

$$511 = 292\,.\,1 + 219$$

$$292 = 219\,.\,1 + 73$$

$$219 = 73\,.\,3 + 0$$

Berdasarkan Teorema 1.7 diperoleh $FPB(5767,4453) = FPB(4453,1314) = FPB(1314,511) = FPB(511,292) = FPB(292,219) = FPB(219,73) = FPB(73,0) = 73$. Jadi $FPB(5767,4453) = 73$.

Teorema 1.8

Misalkan a dan b bilangan-bilangan bulat positif. Menggunakan algoritma pembagian diperoleh persamaan-persamaan berikut:

$a = bq + r$, dengan $0 \leq r < b$

$b = rq_1 + r_1$, dengan $0 \leq r_1 < r$

$r = r_1q_2 + r_2$, dengan $0 \leq r_2 < r_1$

:

:

$r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k$, dengan $0 \leq r_k < r_{k-1}$

$r_{k-1} = r_k q_k + 1.$

Diperoleh $FPB(a, b) = r_k$.

Petunjuk: Teorema 1.8 dapat dibuktikan dengan proses rekursif menggunakan Teorema 1.7. Merujuk pada Definisi 1.3, jika a atau b bilangan bulat negatif, maka $FPB(a, b) = FPB(a, -b) = FPB(-a, b) = FPB(-a, -b)$.

Teorema 1.9

Untuk setiap bilangan bulat tak nol a dan b terdapat bilangan bulat m dan n sedemikian sehingga $FPB(a, b) = am + bn$.

Petunjuk: Teorema 1.9 dapat dibuktikan dengan menggunakan Teorema 1.8.

Contoh 1.6

Jika $a = 247$ dan $b = 299$, maka diperoleh:

$299 = 247 \,.\, 1 + 52$

$247 = 52 \,.\, 4 + 39$

$52 = 39 \,.\, 1 + 13$

$39 = 13 \,.\, 3$

Berdasarkan Teorema 1.6 diperoleh $FPB(a, b) = 13$.

Selanjutnya akan ditentukan bilangan bulat m dan n sehingga $13 = 247m + 299n$.

Caranya sebagai berikut.

$13 = 52 - 39 . 1$

$= 52 - (247 - 52 . 4)$

$= 52 . 5 - 247$

$= (299 - 247 . 1) . 5 - 247$

$= 299 . 5 - 247 . 6$

Jadi $m = -6$ dan $n = 5$.

Akibat Teorema 1.9

Jika a dan b relatif prima maka ada bilangan bulat m dan n sehingga $am + bn = 1$.

Teorema 1.10

Jika $d|ab$ dan $FPB(d, a) = 1$, maka $d|b$.

Bukti:

Karena $FPB(d, a) = 1$ maka ada m dan n sehingga $dm + an = 1$.

Akibatnya diperoleh:

$$b(dm) + b(an) = b \Leftrightarrow d(bm) + (ab)n = b$$

Karena $d|ab$ maka $d|b$.

Teorema 1.11

Jika $c|a$ dan $c|b$ dengan $(a, b) = d$ maka $c|d$.

Bukti:

Karena $FPB\ (a, b) = d$ maka $d = am + bn$ untuk suatu bilangan bulat m dan n.

Karena $c|a$ dan $c|b$ maka $c|am$ dan $c|bn$, sehingga $c|(am + bm) = d$.

Teorema 1.11 menyatakan bahwa setiap faktor persekutuan dari dua bilanganbulat merupakan faktor dari FPB dua bilangan tersebut. Sehingga dengan menggunakan Teorema 1.10 maka definisi FPB dari dua bilangan bulat dapat dinyatakan sebagai berikut.

Suatu bilangan bulat positif d disebut FPB dari bilangan bulat a dan b jika memenuhi:

(i). d adalah faktor dari a dan b,

(ii). untuk sebarang faktor dari a dan b merupakan faktor dari d.

Contoh 1.7

Karena $2|32$ dan $2|40$, maka $2|8 = FPB\ (32{,}40)$.

3. **Bilangan Prima**

Setiap bilangan asli lebih dari 1, mempunyai paling sedikit 2 faktor yakni 1 dan bilangan itu sendiri. Jika bilangan asli hanya memiliki 2 faktor tersebut, maka bilangan tersebut dinamakan bilangan prima. Pada Kegiatan Belajar 2 telah dikaji bahwa dua bilangan bulat a dan b dikatakan saling prima (relatif prima) apabila $FPB(a, b) = 1$. Selanjutnya jika $FPB(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = 1$ maka $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ dikatakan saling prima. Jika $FPB(a_i, a_j) = 1$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$ dengan $i \neq j$ maka $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ saling prima dua-dua. Sebagai contoh 4, 7, 9 dikatakan saling prima dan sekaligus saling prima dua-dua karena $FPB(4,7,9) = 1$ dan $FPB(4,7) = FPB(4,9) = FPB(7,9) = 1$.

Teorema 1.12

Jika sisa pembagian b oleh a relatif prima dengan a maka b relatif prima dengan a.

Bukti:

Misalkan $b = qa + r$ dengan $0 \leq r < |a|$ dan $FPB(b, a) = d$ dengan $d \geq 1$.

Maka $d|a$ dan $d|b$. Karena $r = b - qa$ maka $d|r$, sehingga d merupakan faktor persekutuan dari a dan r. Karena a dan r relatif prima maka $FPB(a,\ r) = 1$. Akibatnya $d \leq 1$.

Dari $d \geq 1$ dan $d \leq 1$ disimpulkan $d = 1$. Jadi b dan a relatif prima.

Contoh 1.8

Jika $a = 25$ dan $b = 142$ maka $b = qa + r$ dengan $q = 5$ dan $r = 17$.

Karena $FPB(r, a) = FPB(17,25) = 1$ maka 142 dan 25 relatif prima.

Definisi 1.5

Bilangan bulat $p > 1$ disebut bilangan prima jika mempunyai faktor positif hanya 1 dan p. Bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 dan bukan bilangan prima disebut bilangan komposit (bilangan tersusun).

Menurut Definisi 1.5, bilangan 1 bukan bilangan prima dan bukan bilangan komposit. Selanjutnya 1 disebut unit. Dengan demikian himpunan bilangan asli terdiri atas unit, semua bilangan prima dan semua bilangan komposit.

Teorema 1.13

Setiap bilangan positif yang lebih besar dari 1 dapat dibagi oleh suatu bilangan prima.

Bukti:

Ambil sebarang bilangan bulat positif $n > 1$.

Jika n suatu bilangan prima maka bukti selesai.

Jika n suatu bilangan komposit, maka terdapat $d_1 \neq 1$ dan $d_1 \neq n$ sedemikian sehingga $d_1|n$.

Akibatnya ada bilangan bulat positif n_1 sedemikian sehingga $n = d_1.n_1$ dengan $1 < n_1 < n$.

Jika d_1 atau n_1 suatu bilangan prima maka bukti selesai.

Jika n_1 suatu bilangan komposit maka terdapat $d_2 \neq 1$ dan $d_2 \neq n_1$ sedemikian sehingga $d_1|n_1$.

Akibatnya ada bilangan bulat positif n_2 sedemikian sehingga $n_1 = d_2.n_2$ dengan $1 < n_2 < n_1$. Jika d_2 atau n_2 suatu bilangan prima maka bukti selesai.

Jika n_2 suatu bilangan komposit maka terdapat $d_3 \neq 1$ dan $d_3 \neq n_2$ sedemikian sehingga $d_3|n_2$.

Akibatnya ada bilangan bulat positif n_3 sedemikian sehingga $n_2 = d_3.n_3$ dengan $1 < n_3 < n_2$.

Jika d_3 atau n_3 suatu bilangan prima maka bukti selesai.

Jika n_3 suatu bilangan komposit maka dengan proses yang sama akan diperoleh barisan bilangan $n, n_1, n_2, n_3, \ldots$ dengan $n > n_1 > n_2 > n_3 > \cdots > 1$.

Penguraian faktor-faktor komposit akan berakhir pada suatu faktor prima, karena faktor-faktor tersebut selalu kurang dari bilangan yang diuraikan dan selalu lebih dari 1. Misalkan penguraian berakhir pada faktor prima n_k, maka $n_k | n_{k-1}$.

Karena $n_{k-1} | n_{k-2}$, $n_{k-2} | n_{k-3}$, ... maka $n_1 | n$. Jadi $n_k | n$.

Teorema 1.14

Setiap bilangan bulat $n > 1$ merupakan bilangan prima atau n dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan-bilangan prima tertentu.

Dari Teorema 1.14 diperoleh bahwa untuk setiap bilangan bulat $n > 1$ dapat dinyatakan sebagai $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} \dots p_m^{k_m}$ dengan $p_1, p_2, p_3, \dots, p_m$ adalah faktor-faktor prima dari n dan $k_1, k_2, k_3, \dots, k_m$ adalah eksponen-eksponen tak negatif.

Selanjutnya $p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} \dots p_m^{k_m}$ disebut representasi n sebagai perkalian bilangan-bilangan prima atau bentuk kanonik dari n.

Teorema 1.14 dapat digunakan untuk menentukan KPK dan FPB dari dua bilangan bulat atau lebih. Misalkan a, b dan c adalah bilangan-bilangan bulat positif yang lebih dari 1 yang mempunyai bentuk kanonik

$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} \dots p_m^{k_m}$,

$b = p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} \dots p_m^{n_m}$, dan

$c = p_1^{t_1} p_2^{t_2} p_3^{t_3} \dots p_m^{t_m}$.

FPB dan KPK dari ketiga bilangan tersebut adalah:

(i).$FPB(a, b, c) = p_1^{\min(k_1, n_1, t_1)} . p_2^{\min(k_2, n_2, t_2)} . \dots . p_m^{min(k_m, n_m, t_m)}$.

(ii).$KPK(a, b, c) = p_1^{\text{maks}(k_1, n_1, t_1)} . p_2^{\text{maks}(k_2, n_2, t_2)} . \dots . p_m^{maks(k_m, n_m, t_m)}$

Dengan $min(k_i, n_i, t_i)$ = nilai minimum dari k_i, n_i, t_i dan $maks(k_i, n_i, t_i)$ = nilai maksimum dari k_i, n_i, t_i.

Contoh 1.9

Hitung KPK dan FPB dari 198, 216 dan 252.

Penguraian atas faktor-faktor prima dari bilangan-bilangan tersebut adalah:

$$198 = 2 . 32 . 11 = 21 . 32 . 70 . 111$$

$$216 = 23 . 33 = 23 . 33 . 70 . 110$$

$$252 = 22 . 32 . 7 = 22 . 32 . 71 . 110$$

Jadi diperoleh:

$FPB(198, 216, 252) = 2^{\min(1,3,2)}. 3^{min(2,3,2)}. 11^{min(1,0,0)} = 2^1. 3^2. 7^0. 11^0 = 18.$

$KPK[198,216,252] = 2^{maks(1,3,2)}. 3^{maks(2,3,2)}. 11^{maks(1,0,0)} = 2^3. 3^3. 7^1. 11^1 = 16632.$

Teorema 1.15

Jika n suatu bilangan komposit maka n memiliki faktor k dengan $1 < k \leq \sqrt{n}$.

Bukti

Karena n suatu bilangan komposit maka ada bilangan bulat positif k dan m sedemikian sehingga $km = n$ dengan $1 < k < n$ dan $1 < m < n$. Jika $k > \sqrt{n}$ dan $m > \sqrt{n}$ maka $n = km > \sqrt{n}. \sqrt{n} = n$. Hal ini tidak mungkin terjadi. Akibatnya k atau m harus lebih kecil dari $\sqrt{n}$, misalkan k dengan $1 < k \leq \sqrt{n}$. Jadi n mempunyai faktor prima k dengan $1 < k \leq \sqrt{n}$.

Teorema 1.15 dapat digunakan untuk menentukan apakah suatu bilangan bulat positif n merupakan bilangan prima. Jika suatu bilangan bulat positif n tidak mempunyai faktor prima

yang lebih kecil atau sama dengan $\sqrt{n}$ maka n merupakan bilangan prima.

Contoh 1.10

Misalkan $n = 227$. Maka bilangan prima yang kurang dari atau sama dengan $\sqrt{227}$ adalah 2, 3, 5, 7, 11 dan 13. Karena tidak ada diantara bilangan-bilangan prima tersebut yang membagi 227 maka disimpulkan 227 merupakan bilangan prima.

4. **Kelipatan Persekutuan Terkecil**

Kita mengetahui bahwa $30 = 6 . 5$ dan $30 = 10 . 3$. Ini berarti 30 merupakan kelipatan 5 dan juga kelipatan 3. Fakta ini mendasari konsep kelipatan persekutuan dan kelipatan persekutuan dan kelipatan persekutuan terkecilsebagaimana disajikan pada Definisi 1.6 dan Definisi 1.7.

Definisi 1.6

Bilangan-bilangan bulat $a_1, a_2, \dots, a_n$ dengan $a_i \neq 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$ mempunyai kelipatan persekutuan b jika $a_i | b$ untuk setiap i.

Kelipatan persekutuan bilangan-bilangan bulat $a_1, \dots, a_n$ selalu ada, yaitu $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1, a_2, \dots, a_n$.

Definisi 1.7

Jika $a_1, a_2, \dots, a_n$ bilangan-bilangan bulat dengan $a_i \neq 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$, maka kelipatan persekutuan terkecil (KPK) dari bilangan-bilangan tersebut adalah bilangan bulat positif terkecil di antara kelipatan-kelipatan persekutuan dari $a_1, a_2, \dots, a_n$.

KPK dari a_1 dan a_2 dituliskan sebagai $KPK\ [a_1, a_2]$.

KPK dari $a_1, a_2, \dots, a_n$ dituliskan sebagai $KPK\ [a_1, a_2, \dots, a_n]$.

Teorema 1.16

Jika b suatu kelipatan persekutuan dari $a_1, a_2, \dots, a_n$ maka $KPK\ [a_1, a_2, \dots, a_n] | b$.

Bukti:

Misalkan $KPK\ [a_1, a_2, \dots, a_n] = c$. Akan ditunjukkan $c|b$.

Andaikan tidak benar $c|b$. Berarti ada bilangan bulat q dan r sedemikian hingga $b = cq + r$ dengan $0 \leq r < c$.

Karena b suatu kelipatan persekutuan dari $a_1, a_2, \dots, a_n$ maka $a_i|b$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$.

Karena $c = KPK\ [a_1, a_2, \dots, a_n]$ maka $a_i|c$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$. Selanjutnya dari $b = cq + r$ diperoleh $a_i|r$ dengan $0 \leq r < c$, $i = 1, 2, \dots, n$. Ini berarti r kelipatan persekutuan dari a_1, a_2, ... , a_n dengan $0 \leq r < c$. Bertentangan dengan c adalah KPK dari $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Jadi pengandaian salah, yang benar $c|b$, yaitu $KPK\ [a_1, a_2, \dots, a_n] | b$.

Contoh 1.11

Karena 48 merupakan kelipatan persekutuan dari 2, 3, 6 dan 8 maka $24 = KPK[2, 3, 6, 8] | 48$.

Teorema 1.17

Jika $m > 0$ maka $KPK[ma, mb] = m \times KPK[a, b]$.

Bukti:

Misalkan $KPK[a,\ b] = d$, maka $a|d$ dan $b|d$. Sehingga $am|dm$ dan $bm|dm$. Akibatnya dm merupakan kelipatan persekutuan dari am dan bm. Menurut Teorema 1.12 diperoleh $KPK[am,\ bm]|dm$. Karena $KPK[ma,\ mb]$ kelipatan ma, maka $KPK[ma,\ mb]$ kelipatan m dan misalkan $KPK[ma,\ mb] = pm$ untuk suatu bilangan bulat p.

Karena $KPK[ma, mb]|dm$ maka $pm|dm$. Akibatnya $p|d$.

Karena $KPK[ma,\ mb] = pm$ maka $am|pm$ dan $bm|pm$, sehingga $a|p$ dan $b|p$. Akibatnya $KPK[a, b] = d|p$. Karena $p|d$ dan $d|p$ maka haruslah $p = d$, yang berarti $pm = dm$.

Jadi $KPK[ma, mb] = m. KPK[a, b]$.

Hubungan antara KPK dan FPB dari dua bilangan bulat dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 1.18

Jika a dan b bilangan-bilangan bulat positif, maka $KPK[a, b] \times FPB(a, b) = ab$.

Bukti:

Sebelumnya akan ditunjukkan bahwa teorema berlaku untuk $(a, b) = 1$.

Karena $KPK[a,\ b]$ merupakan kelipatan a, maka $KPK[a,\ b] = ka$ untuk suatu bilangan bulat k. Akibatnya $b|ka$ dan karena $(a, b) = 1$ maka $b|k$. Sehingga $b \leq k$ dan $ab \leq ak$, karena a positif.

Tetapi tidak mungkin $ab < ak$ karena ak adalah KPK dari a dan b, sehingga $ab = ak$.

Karena $ak = KPK[a, b]$ maka $KPK[a, b] = ab$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa torema berlaku untuk sebarang $d = FPB(a, b)$ dengan $d > 1$.

Misalkan $FPB(a, b) = d$ dengan d>1. Maka menurut Teorema 1.5 diperoleh $FPB(a: d, b: d) = 1$.

Akibatnya $KPK[a: d, b: d] = FPB(a: d)(b: d)$.

Karena $KPK[a: d, b: d].1 = FPB(a: d) \times FPB(b: d)$ maka diperoleh $KPK[a: d, b: d] \times FPB(a: d, b: d) = FPB(a: d)(b: d)$.

Jika kedua ruas persamaan terakhir dikalikan dengan d^2 maka diperoleh $KPK[a, b] \times FPB(a, b) = ab$.

Contoh 1.12

Jika n bilangan bulat positif maka $FPB(n, n + 1) = 1$. Akibatnya $KPK[n, n + 1] = n(n + 1)$.

Untuk memperjelas pemahaman saudara, saudara dapat melihat PPT berikut ini. PPT-M5-KB1

E. Forum Diskusi

Setelah saudara mempelajari materi tentang Keterbagian, Faktor Bilangan, Bilangan Prima, Kelipatan Bilangan, silahkan diskusikan soal-soal berikut dengan teman sejawat.

Ina dan Ani sepasang saudara kembar akan menyumbang ke Panti Asuhan “Kasih Bunda”. Pada panti asuhan tersebut terdapat 24 anak yatim piatu. Ina dan Ani berencana akan memberikan bingkisan yang berisi Roti dan Susu Kotak. Ina mempunyai 4 kaleng roti yang setiap kalengnya berisi 36 bungkus roti, sedangkan Ani membeli susu kotak yang dikemas dalam kardus yang masing-masing berisi 24 buah. Jika setiap anak menerima bingkisan yang sama, berapa kardus Ani harus membeli susu kotak?

F. Rangkuman

Selamat ya ...... saudara telah berhasil menyelesaikan kegiatan belajar tentang Keterbagian, Faktor Bilangan, Bilangan Prima, Kelipatan Bilangan. Hal-hal penting yang telah saudara pelajari dalam kegiatan belajar ini dapat dibaca pada rangkuman berikut ini.

1. Bilangan bulat a membagi habis bilangan bulat b (ditulis $a|b$) apabila terdapat bilangan bulat k sehingga $b = ak$.

2. Istilah-istilah lain yang mempunyai arti sama dengan $a|b$ adalah "a faktor dari b" atau "a pembagi b" atau "b kelipatan a".

3. Beberapa sifat terkait keterbagian pada bilangan bulat:

   - Jika $a|b$ dan $b|c$ maka $a|c$.
   - Jika $a|b$ dan $a|(b + c)$ maka $a|b$.
   - Jika $p|q$, maka $p|qr$ untuk semua $r \in Z$.
   - Jika $p|q$ dan $p|r$, maka $p|q + r$

4. Suatu bilangan bulat d disebut faktor persekutuan dari a dan b apabila $d|a$ dan $d|b$.

5. Bilangan bulat positif d disebut FPB dari a dan b jika dan hanya jika:

   (i). $d|a$ dan $d|b$

   (ii). jika $c|a$ dan $c|b$ maka $c \leq d$.

6. Bilangan bulat a dan b disebut relatif prima (saling prima) jika $FPB\ (a, b) = 1$.

7. Untuk setiap bilangan bulat positif a dan b terdapat dengan tunggal bilangan bulat q dan r sedemikian sehingga $b = qa + r$ dengan $0 \leq r < a$.

8. Setiap bilangan asli lebih dari 1, mempunyai paling sedikit 2 faktor yakni 1 dan bilangan itu sendiri. Jika bilangan asli hanya memiliki 2 faktor tersebut, maka bilangan tersebut dinamakan bilangan prima.

9. Dua bilangan bulat a dan b dikatakan saling prima (relatif prima) apabila $FPB(a, b) = 1$.

10. Selanjutnya jika $FPB(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = 1$ maka $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ dikatakan saling prima. Jika $FPB(a_i, a_j) = 1$ untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ dengan $i \neq j$ maka $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ saling prima dua-dua.

11. Setiap bilangan positif yang lebih besar dari 1 dapat dibagi oleh suatu bilangan prima.

12. Jika n suatu bilangan komposit maka n memiliki faktor k dengan $1 < k \leq \sqrt{n}$.

13. Bilangan-bilangan bulat $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dengan $a_i \neq 0$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ mempunyai kelipatan persekutuan b jika $a_i | b$ untuk setiap i.

14. Jika $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bilangan-bilangan bulat dengan $a_i \neq 0$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$, maka kelipatan persekutuan terkecil (KPK) dari bilangan-bilangan tersebut adalah bilangan bulat positif terkecil di antara kelipatan-kelipatan persekutuan dari $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

15. Jika a dan b bilangan-bilangan bulat positif, maka $KPK[a, b] \times FPB(a, b) = ab$.

Untuk menentukan tingkat penguasaan saudara terhadap materi ini, silahkan kerjakan tes berikut ini. Kunci jawaban diberikan pada akhir kegiatan belajar ini.

G. Tes Formatif

Pilihlah jawaban yang tepat dari setiap persoalan berikut.

1. Pasangan berurutan (a, b, c) yang memenuhi sifat "Jika $a|b$ dan $b|c$ maka $a|c$", adalah ....
   A. $(2,4,6)$
   B. $(2,6,8)$
   C. $(2,4,8)$
   D. $(3,6,8)$
   E. $(3,6,10)$

2. Di antara 5 pernyataan berikut, pernyataan yang bernilai salah adalah ...
   A. Jika $a|b$ dan $a|c$ maka $a^2|bc$.
   B. Jika $a|b$ dan $b|c$ maka $ab|bc$.
   C. Jika $a|b$ dan $c|d$ maka $ac|bd$.
   D. Jika $a|b$ dan $c|d$ maka $(a+c)|(b+d)$.
   E. Jika $a|b$ dan $a|c$ maka $a|bc$.

3. Jika d adalah faktor persekutuan terbesar dari a dan b, maka pernyataan berikut ini yang salah adalah ....
   A. $d|a$
   B. $d|b$
   C. $d|a-b$
   D. $d|a+b$
   E. $d|b: a)$

4. $FPB(1095,1679) = d$, dan $d = 1095.m + 1679.n$ untuk m dan n bilangan bulat. Nilai $d, m,$ dan n berturut-turut adalah .....
   A. $47, 23, 41$
   B. $51, 19, 37$
   C. $57, 17, 33$

D. $61, 17, 27$

E. $73, 15, 23$

5. Bilangan 101 merupakan bilangan prima yang tepat memiliki 2 angka kembar yakni 1. Banyak bilangan prima antara 100 sampai dengan 250 yang memiliki tepat 2 angka kembar adalah ....

   A. 9

   B. 10

   C. 11

   D. 12

   E. 13

6. Bilangan $1! \times 3! \times 5! \times \ldots \times 13!$ dapat dinyatakan sebagai hasil kali perpangkatan faktor-faktor primanya. Jumlah nilai pangkat pada faktor prima 2 dan 3 adalah....

   A. 21

   B. 41

   C. 49

   D. 62

   E. 74

7. Bilangan 229 merupakan bilangan prima yang tepat memiliki 2 angka kembar yakni 2. Banyak bilangan prima antara 200 sampai dengan 350 yang memiliki tepat 2 angka kembar adalah ....

   A. 4

   B. 5

   C. 6

   D. 7

   E. 8

8. Jika diketahui $FPB\ (a, a+b) = 1$, maka $FPB\ (a, b) = \ldots.$
   A. -1
   B. 1
   C. $-a$
   D. a
   E. b

9. Nilai dari $KPK\ [a, -b]$ sama dengan nilai dari ….
   A. $KPK\ [a, b]$
   B. $KPK\ [-a, b]$
   C. $KPK\ [-a, -b]$
   D. $KPK\ [a, a+b]$
   E. $KPK\ [a, a+1]$

10. Ari dan Ria mengikuti kursus renang. Jadwal kursus renang Ari 9 hari sekali, sedangkan Ria setiap 6 hari sekali. Jika pada hari Kamis tanggal 18 Februari 2016 mereka berlatih bersama-sama, maka mereka akan berlatih bersama-sama lagi pada hari dan tanggal ….
    A. Minggu, 7 Maret 2016
    B. Senin, 7 Maret 2016
    C. Minggu, 8 Maret 2016
    D. Senin, 8 Maret 2016
    E. Selasa, 8 Maret 2016

H. Daftar Pustaka

Herry Sukarman, 1994, *Teori Bilangan*, Depdikbud, Jakarta.

Herstein, I.N, 1975, *Topics in Algebra 2nd ed*, John Wiley & Sons, Singapura.

Karso, 1994, *Dasar-Dasar Pendidikan MIPA*

I. Kriteria Penilaian Tes Formatif

Cocokkanlah jawaban Saudara dengan Kunci Jawaban Tes Formatif yang terdapat di bagian akhir kegiatan belajar ini. Hitunglah jawaban yang benar. Gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Saudara terhadap materi pada kegiatan belajar ini.

Tingkat Penguasaan (TP) $= \frac{\text{banyaknya jawaban benar}}{\text{banyaknya soal}} \text{ x } 100\%$.

Arti tingkat penguasaan:

$90\% \leq \text{TP} \leq 100\%$: sangat baik

$80\% \leq \text{TP} < 90\%$: baik

$70\% \leq \text{TP} < 80\%$: cukup

$\text{TP} < 70\%$: kurang

Apabila tingkat penguasaan Saudara 80% atau lebih, Saudara dapat melanjutkan ke kegiatan belajar berikutnya. Bagus! Saudara telah berhasil mempelajari materi pada kegiatan belajar ini.

Apabila tingkat penguasaan saudara kurang dari 80%, Saudara harus mempelajari kembali materi pada kegiatan belajar ini.